ROBERT FORTET

Sur l'itération des substitutions algébriques linéaires à une infinité de variables et ses applications à la théorie des probabilités en chaîne

Thèses de l'entre-deux-guerres, 1939

<http://www.numdam.org/item?id=THESE_1939__221__1_0>

SÉRIE A, N°
N° D'ORDRE:

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

M. ROBERT FORTET

1re THESE.—Sur l'itération des substitutions algébriques linéaires à une infinité de variables et ses applications à la théorie des probabilités en chaîne.

2e THESE.—Propositions données par la Faculté.

Soutenues le **devant la Commission d'examen.**

MM. VILLAT *Président.*

FRÉCHET, VALIRON } *Examinateurs.*

Extracto de la Revista de Ciencias
N° 424 — Año XL
Lima - Perú
1938.

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen honoraire..... M. MOLLIARD.

Doyen .... C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du Globe.

Professeurs honoraires { H. LEBESGUE, A. FERNBACH, Émile PICARD, Léon BRILLOUIN, GUILLET, PÉCHARD, FREUNDLER, AUGER, BLAISE, DANGEARD, LESPIEAU, MARCHIS, VESSIOT, PORTIER, MOLLIARD, LAPICQUE.

PROFESSEURS

G. BERTRAND.....	T	Chimie biologique.
M. CAULLERY....	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. URBAIN	T	Chimie générale.
Émile BOREL....	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique
Jean PERRIN.....	T	Chimie physique.
H. ABRAHAM.....	T	Physique.
E. CARTAN.....	T	Géométrie supérieure.
A. COTTON	T	Recherches physiques
J. DRACH	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
Charles FABRY.	T	Enseignement de Physique
Charles PÉREZ	T	Zoologie.
Léon BERTRAND.	T	Géologie structurale et géologie appliquée.
E. RABAUD.....	T	Biologie expérimentale.
M. GUICHARD....	T	Chimie minérale.
Paul MONTEL...	T	Théorie des fonctions et Théorie des transformations.
P. WINTREBERT..	T	Anatomie et histologie comparées.
L. BLARINGHEM..	T	Botanique.
O. DUBOSCQ	T	Biologie maritime.
G. JULIA	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
C. MAUGUIN	T	Minéralogie.
A. MICHEL-LÉVY	T	Pétrographie.
H. BÉNARD.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.
A. DENJOY.....	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
L. LUTAUD.....	T	Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH .	T	Physique théorique et physique céleste.
G. BRUHAT.....	T	Physique.
E. DARMOIS.....		Enseignement de Physique
A. DEBIERNE	T	Physique Générale et Radioactivité.
A. DUFOUR	T	Physique (P. C. B.)
L. DUNOYER.....	T	Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND	T	Botanique
M. JAVILLIER.....		Chimie biologique.
L. JOLEAUD.....		Paléontologie.
ROBERT-LÉVY....	T	Physiologie comparée.
F. PICARD	T	Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Henri VILLAT ...	T	Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB	T	Géologie.
P. PASCAL	T	Chimie minérale.
M. FRÉCHET.....	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
E. ESCLANGON....	T	Astronomie.
M. RAMART-LUCAS	T	Chimie organique
H. BÉGHIN	T	Mécanique physique et expérimentale.
FOCH		Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER		Physique (P. C. B.).
De BROGLIE	T	Théories physiques.
CHRÉTIEN		Optique appliquée.
P. JOB		Chimie générale.
LABROUSTE.....		Physique du Globe.
PRENANT.....		Zoologie.
VILLEY		Mécanique physique et expérimentale.
BOHN		Zoologie (P. C. B.).
COMBES	T	Physiologie végétale.
GARNIER	T	Mathématiques générales
PÉRÈS.....		Mécanique théorique des fluides
HACKSPILL.....		Chimie (P. C. B.).
LAUGIER	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT.....		Technique Aéronautique.
M. CURIE		Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD.....	T	Hautes températures.
CHAZY.....	T	Mécanique rationnelle.
GAULT.....		Chimie (P. C. B.).
CROZE		Recherches physiques.
DUPONT.....	T	Théories chimiques.
LANQUINE.....		Géologie.
VALIRON.....		Mathématiques générales
BARRABÉ		Géologie structurale et géologie appliquée.
MILLOT.....		Zoologie (P. C. B.).
F. PERRIN		Théories physiques.
VAVON.....		Chimie organique.
G. DARMOIS		Calcul des probabilités et Physique-mathématique.

Secrétaire ..... A. PACAUD.

Secrétaire honoraire..... D. TOMBECK.

A MES PARENTS

A M. M. FRECHET

Professeur a l' Faculté des Sciences de Paris

EN TÉMOINAGE DE RESPECTUENSE TECONNAISSANCE

A M. H. VILLAT

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

Membre de l' Institut

HOMENAGE RESPECTUEUX

A M. C. VALIRON

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

HOMENAGE RESPECTUEUX

Première thèse

Sur l'itération des substitutions algébriques linéaires à une infinité de variables et ses applications à la théorie des probabilités en chaîne.

INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'étude de diverses questions relatives à la théorie des opérations linéaires et plus particulièrement à leur itération. Mises a part quelques équations intégrales singulières d'un type assez particulier, (1) on peut dire que seules les opérations linéaires dites *complètement continues* ont fait l'objet d'une étude complète, grace surtout aux travaux définitifs de M. F. Riesz à ce sujet (F. Riesz, 1,2).

Encore reste-t-il quelques points non résolus: par exemple, soit U une opération complètement continue et $U^{(n)}$ sa n^{ieme} itérée; M. Fréchet a donné (Fréchet, 1) une expression asymptotique des $U^{(n)}$ en fonction de n —du moins dans le cas très im-

(1) Voir par exemple la Thèse de M Torsten Carleman, «*Sur les équations intégrales singulières à noyan réel et symétrique*».

portant des équations de Fredholm; d'ailleurs la méthode et le résultat de M. Fréchet ont évidemment une portée très générale. Cette expression asymptotique est souvent suffisante pour les applications: il restait néanmoins intéressant de déterminer une expression exacte, et non plus asymptotique, des $U^{(n)}$ en fonction de *n:* la Section IV de ce travail est précisement consacrée à ce problème qui est, croyons-nous, très complexe et pour lequel nous n'apportons pas de solution générale: du moins, nous avons pu obtenir quelques résultats partiels.

Mais d'autre part, il est insuffisant d'étudier seulement les opérations linéaires complètement continues: c'est ce que montre la théorie des *probabilités «en chaîne».* On sait que ce chapitre du Calcul des Probabilités conduit naturellement à la considération d'opérations linéaires et à leur itération. Dans les cas les plus simples, ces opérations sont complètement continues: ainsi, les chaînes de Markoff simples ou multiples relatives à un système aléatoire pouvant prendre un nombre fini d'états, ou une infinité continue d'états formant un ensemble borné, ont conduit à l'itération respectivement des substitutions linéaires finies et des équations de Fredholm (Fréchet, 2,3).

Il en est autrement si l'on envisage des problèmes plus compliqués, par exemple les 2 suivants dont nous nous sommes principalement occupés:

PROBLÈME I.—*Problème des chaînes de Markoff, constantes, simples ou multiples, pour une infinité dénombrable d'états possibles:* comme les chaînes multiples se ramènent facilement aux chaînes simples, il suffit de considérer ces dernières. Soit alors un système aléatoire S prenant, à la suite d'expériences, l'un ou l'autre des états $E_1, E_2, \ldots E_i, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots \infty)$ d'une suite infinie dénombrable. Supposons que, la $(q-1)^{ième}$ expérience ayant réalisé l'état E_i, il ya une probabilité déterminée et indépendante de q, soit p_{ik}, pour que la $q^{ième}$ expérience réalise l'état E_k; à l'aide des principes des probabilités totales et des probabilités

composées, on montre facilement qu'il existe une probabilité bien déterminée P^n_{ik} pour que S passe de E_i à E_k à la suite de n expériences consécutives, ces quantités P^n_{ik} ($i, k = 1, 2, \ldots \infty$; $n = 1, 2, \ldots, \infty$) satisfaisant en outre aux conditions et relations suivantes:

$$(I_1) \qquad P^1_{ik} = p_{ik}$$

$$(P_1) \qquad P^n_{ik} \geqq 0$$

$$(T_1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} P^n_{ik} = 1$$

$$(R_1') \qquad P^{m+1}_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty} P^m_{ij} \cdot P^n_{jk}$$

(R_1') a lieu quels que soient m et n entiers positifs et donne en particulier pour $m = 1$

$$(R_1) \qquad P^{n+1}_{ik} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \, P^n_{ij}$$

La question essentielle est de déterminer le comportement des P^n_{ik} lorsque n augmente indéfiniment: or, d'après (I) et (R), ce problème est équivalent à celui de l'itération de l'opération linéaire P définie par les formules:

$$y_i = \sum_k p_{ik} \, x_k$$

Comme nous le verrons dans la section II, cette opération P est une substitution linéaire dans l'espace D_ω: elle n'est qu'exceptionnellement complètement continue.

PROBLÈME II. — Les états possibles d'un système aléatoire S pouvant en général être caractérisés par les valeurs d'un certain nombre de paramètres, un état E est pratiquement representé par un point E d'un espace à un nombre fini de dimensions. Si l'on suppose que les points E forment, non plus une suite dénombrable comme précédemment, mais un ensemble V mesurable, quelconque par ailleurs, si l'on admet en outre l'existence d'une densité de probabilité p (E, F) convenable, on est conduit (voir, par exemple, Fréchet, 4) à étudier le comportement, lorsque n croit indéfiniment, de fonctions P^n (E, F) satisfaisant aux conditions suivantes:

$$(I_2) \qquad P^1(E, F) = p(E, F)$$

$$(P_2) \qquad P^n(E, F) \geqq 0$$

$$(T_2) \qquad \int_V P^n(E, F)\, dF = 1$$

$$(R_2') \qquad P^{m+n}(E, F) = \int_V P^m(E, G)\, P^n(G, F)\, dG$$

$$(R_2) \qquad P^{n+1}(E, F) = \int_V p(E, G)\, P^n(G, F)\, dG$$

Nons préciserons l'énoncé de ce problème au chapitre II de la section I; dès maintenant, nous observerons ceci: lorsque Vest de mesure finie, le problème se ramène à l'itération d'une équation de Fredholm ordinaire; mais lorsque V est de mesure infinie, en général, l'opération $\varphi'(E) = \int_V p(E, F)\, \varphi(F)\, dF$ n'est pas complètement continue.

Ainsi nous avons été conduit à étudier les opérations linéaires non complètement continues, et en particulier l'itération des substitutions linéaires portant sur une infinité de variables, ou des équations de Fredholm à domaine non borné.

Nous disposions pour cela d'une méthode bien connue, dite «de Markoff», applicable seulement aux problèmes de probabilités, et d'ailleurs d'une puissance limitée, mais d'une grande simplicité: nous avons donc consacré la section I de ce travail à l'application de cette méthode aux problèmes I (sect. I, chap. I) et II (sect. I, chap. II).

Dans la section II nous abordons le cas général des substitutions non complètement continues: nous introduisons la notion très simple, mais très importante pour l'itération, du rayon polaire d'une substitution (plus généralement d'une opération linéaire continue); nons avons pu étudier l'itération d'une substitution quelconque de rayon polaire supérieur à 1 (sect. II, chap. I et II). Et nous appliquons les résultats ainsi obtenus au problème I (sect. II, chap. III).

En ce qui concerne les substitutions de rayon polaire inférieur ou égal à 1, il nous a semblé difficile d'indiquer une méthode générale: nous nous sommes bornés à traiter un cas particulier qui nous a paru intéressant (sect. II, chap. IV) et nous appliquons les résultats de cette étude au problème I (sect. II, chap. V).

Les probabilités en chaînes peuvent d'ailleurs conduire à des opérations linéaires d'un type plus complexe que les substitutions ou les équations intégrales: c'est ce qui a lieu à la section III, où nous reprenons le problème des chaînes «à liaisons complètes», envisagées par MM. Onicescu et Mihoc dont nous avons pu compléter les résultats.

Enfin nous avons rassemblé à la section V, sous forme de Notes, diverses remarques se rattachant aux sujets traités dans le reste de ce travail.

Nous ne terminerons pas cette Introduction sans adresser l'expression de nos remerciements et de notre reconnaissance à

M. le Professeur M. Fréchet, notre maître, sans qui ce travail n'aurait jamais abouti: car non seulement nous lui devons le sujet et les idées directrices de nos recherches, mais il a bien voulu suivre en quelque sorte pas à pas nos progrès et nous maintenir dans la bonne route.

J'adresse également mes remerciements et l'expression de ma reconnaissance à M. Manuel Prado, Directeur de la Revista de Ciencias, à M. Godofredo García, Doyen de la Faculté des Sciences de Lima et à M. le Professeur Alfred Rosenblatt qui ont bien voulu s'ocuper de la publication de ce travail.

Note

Les résultats que nous donnons, relativement aux problèmes I et II, et que nous avions résumés, il y a déjà quelques mois, dans 3 notes aux *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* [t. 201, p. 184; t. 202, p. 1362; t. 204, p. 315] se trouvent actuellement depassés à la suite des travaux sur les mêmes sujets de M. M. Kolmogoroff et Doeblin. Les résultats de M. Kolmogoroff sont résumés dans le *Recueil Mathématique* de Moscou [t. 1 (43), N. 4, p. 607]; ceux de M. Doeblin sont exposés dans sa thèse.

SECTION I.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE MARKOFF.

Chapitre I.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE MARKOFF AU PROBLÈME DES CHAÎNES CONSTANTES DE MARKOFF POUR UNE INFINITÉ DÉNOMBRABLE D'ÉTATS POSSIBLES.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'appliquer au problème I (voir Introduction p. 3) la méthode classique de Markoff. Nous allons d'abord rappeler et démontrer quelques propriétés qui nous seront utiles.

PARAGRAPHE 1: PRÉLIMINAIRES

LEMME: *Considérons des quantités* u_k^n $(k, n = 1, 2, \ldots, \infty)$ *qui admettent, lorsque* n *croit indéfiniment, des limites* u_k ; *supposons que les séries* $\sum_{n=1}^{\infty} u_k^n$ *convergent quel que soit* n.

Une condition suffisante pour que la série $\sum_k u_k$ *converge, que* $\sum_k u_k^n$ *ait une limite, lorsque* n *croit indéfiniment, égale à* $\sum_k u_k$, *est que les séries* $\sum_k u_k^n$ *convergent uniformément lorsque* n *varie.*

En effet posons: $S_n^h = \sum_{k=1}^{h} u_k^n$; $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^n$; $S^h = \sum_{k=1}^{h} u_k$; l'hypothèse étant que les séries $\sum_k u_k^n$ convergent uniformément,

on peut, quel que soit ϵ positif arbitrairement petit, trouver un nombre H entier positif indépendant de n, tel que l'on ait:

$$| S_n - S_n^h | < \epsilon \qquad (1) \qquad \text{pourvu que} \quad h \geqq H$$

En particulier, on a: $| S_n - S_n^H | < \epsilon$, et aussi: $| S_{n+m} - S_{n+m}^H | < \epsilon$, quel que soit l'entier positif m. H étant ainsi défini, on peut trouver, d'après un théorème de Cauchy, un nombre $N(\epsilon)$ tel que l'on ait:

$$| S_{n+m}^H - S_n^H | < 2 \qquad \text{pourvu que} \quad n > N(\epsilon)$$

car S_n a une limite qui est S^H; on a donc:

$$| S_{n+m} - S_n | < 3\,\epsilon$$

ce qui prouve, d'après le même théorème de Cauchy, que S_n à une limité S. D'autre part, en passant à la limite dans l'inégalité (1), on trouve:

$$| S - S^h | \leqq \epsilon \qquad \text{pourvu que} \quad h \geqq H$$

Donc, lorsque h croit indéfiniment, S^h tend vers S.

REMARQUE I: Maintenant, supposons de plus que les u_k^n soient tous de même signe ou nuls—par exemple positifs ou nuls: on peut alors démontrer la réciproque du lemme précedent, à savoir:

Une condition nécessaire pour que la série $\sum_k u_k$ converge, que $\sum_k u_k^n$ ait une limite, lorsque n croit indéfiniment égale à $\sum_k u_k$, est que les séries $\sum_k u_k^n$ convergent uniformément lorsque n varie.

En effet si $\sum_k u_k$ converge, si $\lim_{n \to \infty} \sum_k u_k^n = \sum_k u_k$, on a:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=h}^{\infty} u_k^n = \sum_{k=h}^{\infty} u_k$$

Choisissons un nombre H entier positif, tel que l'on ait : $|\sum_{k=H}^{\infty} u_k| < \epsilon$, ce qui est possible quel que soit ϵ. On peut trouver un entier positif $N(\epsilon)$, tel que l'on ait:

$$|\sum_{k=N}^{\infty} u_k^n - \sum_{k=H}^{\infty} u_k| < \epsilon \quad \text{pour} \quad n > N(\epsilon)$$

d'où l'on déduit que:

$$\sum_{k=H}^{\infty} u_k^n < 2\epsilon \quad \text{pourvu que} \quad n > N(\epsilon)$$

Comme $u_k^n \leqq 0$, on a

$$\sum_{k=h}^{\infty} u_k^n < 2\epsilon \quad \text{pour} \quad h \geqq H \quad \text{et} \quad n > N(\epsilon)$$

Or, pour chaque valeur de n, on peut trouver un nombre positif $H_n(\epsilon)$, tel que l'on ait: $\sum_{k=h}^{\infty} u_k^n < 2\epsilon$ pour $h > H_n(\epsilon)$; désig-

nons par $H(\epsilon)$ le plus grand des nombres $H_1(\epsilon)$, $H_2(\epsilon)$, .. ., $H_{N(\epsilon)}(\epsilon)$, H: on aura, quel que soit n,

$$\sum_{k=h}^{\infty} u_k^n < 2\epsilon \qquad \text{pour} \quad h \geq H(\epsilon)$$

ce qui entraîne bien que les séries $\sum_k u_k^n$ convergent uniformément.

REMARQUE II: Sans l'hypothèse que les u_k^n sont tous de même signe ou nuls, la réciproque énoncée à la remarque I serait fausse, cela résultera évidemment de ce qui va suivre.

Nous dirons que les séries $\sum_k u_k^n$ convergent quasi-uniformément lorsque n varie si, étant donnés un nombre ϵ positif arbitrairement petit, et un nombre H positif arbitrairement grand, on peut trouver un nombre $H' \geq H$, tel que à toute valeur de n on puisse faire correspondre un entier positif h_n satisfaisant aux conditions suivantes:

$$H \leq h_n \leq H' ; \quad \left| \sum_{k=h_n}^{\infty} u_k^n \right| < \epsilon$$

Supposons alors, comme pour le lemme, que les u_k^n ont des limites u_k et que la série $\sum_k u_k$ converge; on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème: Pour que, lorsque n croit indéfiniment, la somme S^n de la série $\sum_k u_k^n$ tende vers la somme S de la série $\sum_k u_k$,

il faut et il suffit que les séries $\sum_k u_k^n$ convergent quasi-uniformément lorsque n varie.

Ce théorème n'est pas autre chose qu'un théorème classique d'Arzelà, appliqué il est vrai à un cas qu'Arzelà n'a pas examiné; mais on vérifie facilement que la démonstration donnée par M. Borel du théorème d'Arzelà [1] s'étend au cas actuel.

Paragraphe 2: Définition du cas régulier

Rappelons le problème qui nous occupe (voir. Introd., p. 3): nous considérons les probabilités P_{ik}^n, $(i, k = 1,2,....,\infty)$ définies et conditionnées par les relations suivantes:

$$(I_1) \qquad P_{ik}^1 = p_{ik}$$

$$(P_1) \qquad P_{ik}^n \geqq 0$$

$$(T_1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} P_{ik}^n = 1 \qquad (i = 1,2,...,\infty)$$

$$(R_1') \qquad P_{ik}^{m+n} = \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}^m \cdot P_{jk}^n (i, k = 1,2,...\infty)(m, n, = 1,2,...)$$

$$(R_1) \qquad P_{ik}^{n+1} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} P_{jk}^n \qquad (i, k = 1,2,...,\infty) \ (n = 1,2,....)$$

(1)

où les p_{ik} doivent être considérées comme des données assujetties seulement aux conditions: $p_{ik} \geqq 0$, $\sum_k p_{ik} = 1$. Nous cherchons alors comment se comportent les probabilités P^n_{ik} lorsque n augmente indéfiniment, par valeurs entières positives.

Les bornes P_k *et* p_k: Lorsque, n et k restant fixes, i varie, les P^n_{ik} restent bornés par 0 et 1, et admettent par suite une borne inferiéure p^n_k et une borne superieure P^n_k; d'autre part ou déduit de (R_1) en tenant compte de (T_1), que:

$$P^{n+1}_k \geqq P^n_k ; \qquad p^{n+1}_k \geqq p^n_k$$

De sorte que l'on peut écrire:

$$0 \leqq p^{n-1}_k \leqq p^n_k \leqq P^n_{ik} \leqq P^n_k \leqq P^{n-1}_k \leqq \qquad (2)$$

On déduit de (2) que lorsque n croit indéfiniment, P^n_k et p^n_k tendent respectivement vers des limites P_k et p_k positives ou nulles, inférieures ou égales à 1, avec $p_k \leqq P_k$. On ne sait rien sur les séries $\sum_k P^n_k$, qui peuvent diverger; mais si $\sum_k P^n_k$ converge pour $n = \nu$, les séries $\sum_k P^n_k$ convergent uniformément pour $n > \nu$, puisque $P^{n+1}_k \leqq P^n_k$; en vertu du lemme de la page 191, on saura que $\sum_k P_k$ converge et a pour somme $\lim_{n \to \infty} \sum_k P^n_k$, et comme, puisque $\sum_k P^n_{ik} = 1$, $\sum_k P^n_k$ est forcément supérieur ou égal à 1, on aura: $\sum_k P_k \geqq 1$.

On est mieux renseigné sur les p_k^n et les p_k ; d'abord, puisque $\Sigma\, P_{ik}^n = 1$, quels que soient i et n, $\Sigma\, p_k^n$ converge quel que soit n, et l'on a: $\sum_k p_k^n \leqq 1$. Nous allons d'autre part établir le lemme suivant:

LEMME: *La série* $\sum_k p_k$ *converge, et sa somme, inférieure ou égale à 1, est égale à la limite, lorsque n croit indéfiniment, de* $\sum_k p_k^n$.

En effet, posons: $S_h = \sum_{k=1}^{h} p_k$; $S_h^n = \sum_{k=1}^{h} p_k^n$; on a visiblement: $S_h = \lim_{n \to \infty} S_h^n$. Or, $S_h^n \leqq 1$; donc $S_h \leqq 1$; mais S_h est une quantité non décroissante lorsque h augmente: donc S_h a une limite $S \leqq 1$ lorsque h augmente indéfiniment; autrement dit, $\sum_k p_k$ converge et a une somme inférieure ou égale à 1. Mais comme $p_k^n \leqq p_k$, les séries $\sum_k p_k^n$ convergent uniformément lorsque n varie: en vertu du lemme de la page 191, on a donc:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_k p_k^n = \sum_k p_k .$$

DÉFINITION DU CAS RÉGULIER: D'après ce qui précède, 2 cas seulement sont possibles: ou bien $\sum_k p_k = 0$, c'est à dire $p_k = p_k^n = 0$ quels que soient k et n; ou bien on a: $1 \geqq \sum_k p_k \geqq 0$, c'est à dire que l'un an moins des p_k, soit p_{j_0}, est différent

de 0: comme on le verra plus loin, c'est la condition nécessaire et suffisante pour que la méthode de Markoff s'applique: nous nous placerons donc dans ce cas, que nous appelerons le *cas régulier*, en raison de ses propriétés très simples que nous allons démontrer. Il est utile de remarquer que:

THÉORÈME $I_{1,1}$: *Pour que l'on soit dans le cas régulier, il faut et il suffit qu'il existe un nombre* η *positif, un rang* ν *et un indice* j_o *tels que* $P^{\nu}_{ij_o}$ *reste supérieur à* η *lorsque* i *varie.*

En effet, si p_{j_o} est positif, comme $p^n_{j_o}$ tend vers p_{j_o}, on peut trouver un rang ν tel que l'on ait: $p^{\nu}_{j_o} > \frac{p_{j_o}}{2} > 0$; et puisque $P^{\nu}_{ij_o} \geqq p^{\nu}_{j_o}$, on a en posant $\eta = \frac{p_{j_o}}{2}$, $P^{\nu}_{ij_o} > \eta > 0$: la condition énoncée est donc nécessaire; réciproquement, elle est suffisante, car si l'on a: $0 < \eta < P^{\nu}_{ij_o}$, on a forcément: $p^{\nu}_{j_o} \geqq \eta$ et puisque $p_{j_o} \geqq p^{\nu}_{j_o}$, on a $p_{j_o} \geqq \eta > 0$.

REMARQUE: En fait, le théorème $I_{1,1}$ n'est guère applicable que si l'on peut prendre $\nu = 1$; il est alors utile d'observer que:

En général (il y a une exception), il suffit, pour que l'on soit dans le cas régulier, que l'on puisse trouver $\eta > 0$ et j_o, tels que l'on ait: $p_{ij_o} > \eta$ pour $i \lesseqgtr j_o$; $p_{j_o j_o}$ pouvant être nul.

Cette remarque est due à M. Fréchet (Fréchet, 2, p. 3, 4) qui l'a faite pour les chaînes relatives à un nombre fini d'états possibles; mais sa démonstration s'étend immédiatement au cas actuel; le cas d'exception est caractérisé par le fait que l'on peut partager les indices j en 2 groupes non vides, les j' et les j'', tels que: $p_{j_0 j'} = 0$, $p_{j'' j_0} = 1$; alors les probabilités $P^n_{j_0 j_0}$ sont alternativement égales à 0 et à 1, ce qui est incompatible comme nous le verrons avec le cas régulier.

PARAGRAPHE 3: COMPORTEMENT DES P^n_{ik} POUR n INFINI, DANS LE CAS RÉGULIER

Le comportement des P^n_{ik}, lorsque n croît indéfiniment, est déterminé dans le cas régulier par le théorème suivant:

THÉORÈME $II_{1,1}$: *Dans le cas régulier, les bornes* P_k *et* p_k *sont égales, d'où il résulte que lorsque* n *croît indefiniment, les* P^n_{ik} *tendent, normalement lorsque* i *varie, vers des limites* $P_k = p_k = P_k$ *indépendantes de* i.

Nous démontrerons ce théorème en étendant au cas actuel la méthode que Markoff a employé pour démontrer un résultat analogue dans le cas où les indices i et k des P^n_{ik} restent finis ($i, k = 1, 2, ...r$) (voir par exemple Hostinsky, 1, p. 14).

Nous supposons donc qu'il existe un indice j_o et un indice ν tels que:

$$P^{\nu}_{ij_o} > \eta > 0 \tag{3}$$

Naturellement, $\eta < 1$, à cause de (T_1). Remarquons que les quantités $P^{\lambda\nu}_{ik}$ satisfont aux relations:

$$P^{\lambda\nu}_{ik} = \sum_j P^{\nu}_{ij} \cdot P^{(\lambda-1)\,\nu}_{jk} \tag{4}$$

d'où l'on déduit:

$$P^{\lambda\cdot\nu}_{ik} - P^{\lambda\cdot\nu}_{lk} = \sum_j \left(P^{\nu}_{ij} - P^{\nu}_{lj} \right) \cdot P^{(\lambda-1)\,\nu}_{jk}$$

et, comme toutes les sériés qui interviennent sont absolument convergentes,

$$P^{\lambda\nu}_{ik} - P^{\lambda\nu}_{lk} = \sum_{j'} \left(P^{\nu}_{lj'} - P^{\nu}_{ij'} \right) P^{(\lambda-1)\,\nu}_{j'k} - \sum_{j''} \left(P^{\nu}_{ij''} - P^{\nu}_{lj''} \right) P^{(\lambda-1\,\nu}_{j''k}$$

en appelant j' les indices j pour lesquels $P^{\nu}_{ij} - P^{\nu}_{lj} \geqq 0$, et j'' les autres. En vertu de (T_1), on a: $\sum_{j'} \left(P^{\nu}_{ij'} - P^{\nu}_{lj'} \right) = \sum_{j''} \left(P^{\nu}_{lj''} - P^{\nu}_{ij''} \right) = \theta_{il}$ et l'on voit que $0 \leqq \theta_{i,l} \leqq 1$. Supposons d'abord $\theta_{i,l}, \leqq 0$; on peut écrire:

$$P_{ik}^{\lambda\nu} - P_{lk}^{\lambda\nu} = \theta_{il} \left\{ \frac{\sum_{j'} (P_{ij'}^{\nu} - P_{lj'}^{\nu}) P_{j'k}^{(\lambda-1)\nu}}{\theta_{il}} - \frac{\sum_{j''} (P_{lj''}^{\nu} - P_{ij''}^{\nu}) P_{j''k}^{(\lambda-1)\nu}}{\theta_{il}} \right\}$$

Or, on a évidemment:

$$p_k^{(\lambda-1)\nu} \leqq \frac{\sum_{j'} (P_{ij'}^{\nu} - P_{lj'}^{\nu}) P_{j''k}^{(\lambda-1)\nu}}{\theta_{il}} \leqq P_k^{(\lambda-1)\nu}$$

et de même:

$$p_k^{(\lambda-1)\nu} \leqq \frac{\sum_{j''} (P_{lj''}^{\nu} - P_{ij''}^{\nu}) P_{j''k}^{(\lambda-1)\nu}}{\theta_{il}} \leqq P_k^{(\lambda-1)\nu}$$

de sorte que l'on peut écrire:

$$P_{ik}^{\lambda\nu} - P_{lk}^{\lambda\nu} \leqq \theta_{il} \left(P_k^{(\lambda-1)\nu} - p_k^{(\lambda-1)\nu} \right) \tag{5}$$

Si $\theta_{il}=0$, c'est que $P_{ij}^{\nu} - P_{lj}^{\nu} = 0$, quel que soit j: de sorte que $P_{ik}^{\lambda\nu} - P_{lk}^{\lambda\nu} = 0$, et la relation (5) est encore valable. Raisonnons alors de la façon suivante: ou bien j_0 est parmi les j', et alors on a

$$\theta_{il} = \sum_{j'} P_{ij}^{\nu} - \sum_{j'} P_{lj'}^{\nu} \leq 1 - \sum_{j'} P_{lj'}^{\nu} \leq 1 - P_{ljo}^{\nu} \leq 1 - \eta = q$$

ou bien j_o est parmi les j'', et alors on a:

$$\theta_{il} = \sum_{j''} P_{lj''}^{\nu} - \sum_{j''} P_{ij''}^{\nu} \leq 1 - \sum_{j''} P_{ij''}^{\nu} \leq 1 - P_{ij_o}^{\nu} \leq 1 - \eta = q$$

Dans tous les cas $\theta_{i,j} \leq 1 - \eta = q < 1$; et $0 < q$ puisque $\eta < 1$; de sorte que (5) donne:

$$P_{ik}^{\lambda\nu} - P_{lk}^{\lambda\nu} \leq q \left[P_k^{(\lambda-1)\nu} - p_k^{(\lambda-1)\nu} \right] \quad \text{ou:} \quad P_k^{\lambda\nu} - p_k^{\lambda\nu} \leq q \left[P_k^{(\lambda-1)\nu} - p_k^{(\lambda-1)\nu} \right]$$

et par récurrence:

$$P_k^{\lambda\nu} - p_k^{\lambda\nu} \leq q^{\lambda-1} (P_k^{\nu} - p_k^{\nu}) \leq q^{\lambda-1} \tag{6}$$

Soit maintenant n un entier quelconque $> \nu$; ou peut toujours trouver un nombre u, entier > 0, tel que: $u\nu \leq n < (n+1)\nu$, d'on: $n = u\nu + h$ $(h = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$; et l'on a:

$$0 \leq P_k^{n} - p_k^{n} \leq P_k^{n\nu} - p_k^{n\nu} \leq q^{n-1}$$

Posons $r^{\nu} = q$ $(0 < r < 1)$; on a:

$$P_k^{n} - p_k^{n} \leq r^{n} \cdot \frac{1}{r^{h+\nu}}$$

et si l'on appelle a le plus grand des nombres $\frac{1}{r^{\nu}}, \frac{1}{r^{\nu+1}}, \ldots, \frac{1}{r^{2\nu-1}}$,

$$P_k^n - p_k^n \leqq a \cdot r^n \qquad (7)$$

pour $n > \nu$, avec $0 < r < 1$, $0 < a$. Il en résulte que $P_k^n - p_k^n$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$ au moins «aussi vite» que le terme général d'une progression géométrique de raison $r = \sqrt[\nu]{1-\eta}$, indépendante de k.

On peut dans certains cas obtenir un résultat plus précis, en remarquant que l'on avait: $\theta_{i,l} = \sum_{j'}^{\nu} P_{ij}' - \sum_{j'}^{\nu} P_{lj}' = 1 - \sum_{j''}^{\nu} P_{ij}'' - \sum_{j'}^{\nu} P_{lj}'$ d'où: $\theta_{il} \leqq 1 - \sum_{j}^{\nu} p_i$; on peut donc prendre $q = 1 - \sum_{j}^{\nu} p_j$, avec $0 \leqq q < 1$, et $r = \sqrt[\nu]{1 - \sum_{j}^{\nu} p_j}$; si $\sum_{j}^{\nu} p_j$, qui est au moins égal à η, est supérieur à η, on obtient ainsi un résultat plus précis que celui précédemment trouvé.

Comme on a: $p_k^n \leqq P_{ik}^n \leqq P_k^n$, on voit que $P_k = p_k$, que P_{ik}^n tend vers une limite $P_k = p_k = \dot{P}_k$, indépendante de i, et comme on a: $P_k^n - p_k^n \geqq | \bar{P}_{ik}^n - P_k |$, P_{ik}^n tend vers sa limite normalement lorsque i varie.

Paragraphe 4: Calcul des limites $\bar{P}_k$ dans le cas régulier

Le Calcul des limites $\bar{P}_k$ dans le cas régulier repose sur 2 lemmes que nous allons démontrer.

LEMME: *Dans le cas régulier, quel que soit* ϵ *positif, on peut trouver 2 entiers positifs* $N(\epsilon)$ *et* $H(\epsilon)$, *indépendants de* i, *tels que pour* $n > N(\epsilon)$ *et* $h > H(\epsilon)$, *on ait:* $\sum_{k=h}^{\infty} P_{ik}^{n} < \epsilon$.

Plaçons nous en effet dans le cas régulier: il existe un indice ν, un indice j_o et un nombre $\eta > 0$, tels que, quel que soit i, on ait: $P_{ij_o}^{\nu} > \eta > 0$, η étant nécessairement inférieur à 1. Supposons, sans diminuer la généralité de la démonstration, que $j_o = 1$, et considérons la suite des itérées: P_{ik}^{ν}, $P_{ik}^{2\cdot\nu}$, $P_{ik}^{4\cdot\nu}$,..., $P_{ik}^{2^m\nu}$,...

a) soit un nombre α positif quelconque; on peut trouver un nombre h, entier positif indépendant de i, tel que: $\sum_{k=h_1}^{\infty} P_{ik}^{2\cdot\nu} < \alpha + (1-\eta)^2$. En effet, prenons $h_1 > 1$, et tel que $\sum_{k=h_1}^{\infty} P_{1k}^{\nu} < \alpha$; on aura:

$$\sum_{k=h_1}^{\infty} P_{ik}^{2\nu} = \sum_{j} P_{ij}^{\nu} \left(\sum_{k=h_1}^{\infty} P_{k}^{\nu} \right) = P_{i1}^{\nu} \left(\sum_{k=h_1}^{\infty} P_{1k}^{\nu} \right) + \sum_{j=2} P_{ij}^{\nu} \left(\sum_{k=h_1}^{\infty} P_{jk}^{\nu} \right)$$

Or puisque $h_1 > 1$, on a: $\sum_{k=h_1}^{\infty} P_{jk}^{\nu} < \sum_{k} P_{jk}^{\nu} - P_{j1}^{\nu} < 1-\eta$, et de même: $\sum_{j=2}^{\infty} P_{ij}^{\nu} < 1-\eta$; on en déduit: $\sum_{k=h_1}^{\infty} P_{ik}^{2\nu} < \alpha + (1-\eta)^2$.

b) on peut trouver h_2 entier positif indépendant de i, tel que: $\Sigma_{k=h_2}^{\infty} P_{ik}^{2^2.\nu} < \alpha\,[\alpha + (1-\eta)^2]^2$; prenons en effet $h_2 > h$, et tel que $\Sigma_{k=h_2}^{\infty} P_{ik}^{2^2.\nu} < \alpha$ pour $i \leqq h_1$; quel que soit i, on aura, puisque $h_2 > h_1$, $\Sigma_{k=h_2}^{\infty} P_{ik}^{2.\nu} < \alpha + (1-\eta)^2$; or : $\Sigma_{k=h_2} P_{ik}^{2^2.\nu} =$

$$= \Sigma_j P_{ij}^{2.\nu} \left(\Sigma_{k=h_2}^{\infty} P_{jk}^{2.\nu} \right) = \Sigma_{j=1}^{h_1} P_{ij}^{2.\nu} \left(\Sigma_{k=h_2}^{\infty} P_{jk}^{2.\nu} \right) + \Sigma_{j=h_1+1}^{\infty} P_{ij}^{2\nu} \left(\Sigma_{k=h_2} P_{ik}^{2\nu} \right)$$

d'où $\Sigma_{k=h_2}^{\infty} P_{ik}^{2^2.\nu} < \alpha + [\alpha + (1-\eta)^2]^2$

c) en répétant ce procédé, on voit qu'on pourra déterminer une suite d'entiers positifs indépendants de i, h_1, h_2,...., h_m,.... tels que pour $h = h_m$, et par suite pour $h \geqq h_m$, les quantités $\Sigma_{k=k}^{\infty} P_{ik}^{2^m.\nu}$ soient bornées supérieurement par les nombres B_m définis de la façon suivante: $B_1 = \alpha + (1-\eta)^2$; $B_{m+1} = \alpha + B_m^2$; or, on peut prendre m assez grand pour que $(1-\eta)^{2^m}$ soit inférieur à $\frac{\epsilon}{2}$; m ainsi déterminé, B_m est un polynôme en α, qui se réduit à $(1-\eta)^{2^m}$ pour $\alpha = 0$; on peut donc prendre α assez petit pour que: $| B_m - (1-\eta)^{2^m} | < \frac{\epsilon}{2}$, ce qui entraîne $B_m < \epsilon$. On aura alors: $\Sigma_{k=h}^{\infty} P_{ik}^{2^m.\nu} < \epsilon$ pour $h > h_m$ et m déterminé ; mais remarquons que:

$\sum_{k=h}^{\infty} P_{ik}^{n+1} = \sum_{j} P_{ii}^{1} \cdot \left(\sum_{k=h}^{\infty} P_{jk}^{n} \right)$, de sorte que l'hypothèse:

$$\sum_{k=h}^{\infty} P_{jk}^{n} < \epsilon \quad \text{quel que soit } j$$

entraîne: $\sum_{k=h}^{\infty} P^{n+1} < \epsilon$ quel que soit i.

Il en résulte que, quelque soit i, pour $h > h_m$ et $n > 2^m \nu$, on a: $\sum_{k=h}^{\infty} P_{ik}^{n} < \epsilon$, ce qui démontre le lemme, dont nous déduisons le suivant.

LEMME: *Dans le cas régulier, les séries* $\sum_{k} P_{ik}^{n}$ *convergent uniformément lorsque n varie, quel que soit i fixe.*

Considérons en effet une valeur i_o quelconque de i; d'après ce qui précède, on peut trouver $H(\epsilon)$ et $N(\epsilon)$ entiers positifs tels que, pour $h > H(\epsilon)$ et $n > N(\epsilon)$ on ait: $\sum_{k=h^o}^{\infty} P_{ik}^{n} < \epsilon$; mais, à chaque valeur de n inférieure on égale à $N(\epsilon)$, on peut fairè correspondre un nombre positif $H_n(\epsilon)$ tel que, pour $h > H_n(\epsilon)$, on ait: $\sum_{k=h}^{\infty} P_{i_o k}^{n} < \epsilon$; ou voit ainsi qu'en en appelant $H'(\epsilon)$ le plus grand des nombres $H_1(\epsilon)$, $H_2(\epsilon)$,..., $H_{N(\epsilon)}(\epsilon)$, $H(\epsilon)$, on a, pour $h > H'(\epsilon)$ et quel que soit n: $\sum_{k=h}^{\infty} P_{i_o k}^{n} < \epsilon$, ce qui établit le lemme.

On peut alors démontrer que:

THÉORÈME $III_{1,1}$: *Dans le cas régulier, la série* $\sum_k \overline{P}_k$ *des limites* $\overline{P}_k$ *des* P^n_{ik}, *série qui est convergente, a sa somme égale à 1.*

En effet la série $\sum_k P^n_{i_0 k}$ dont la somme est égale à 1, quel que soit n, est uniformément convergente lorsque n varie: d'après le lemme de la page 200, il en résulte, puisque: $\lim_{n\to\infty} P^n_{i_0 k} = \overline{P}_k$, que la série $\sum_k \overline{P}_k$ est convergente – ce que nous savions déjà et que:

$$\sum_k \overline{P}_k = \lim_{n\to\infty} \sum_k P^n_{i_0 k} = 1$$

ce qui établit le théorème.

REMARQUE: On sait que $\sum_k \overline{P}_k = \sum_k p_k$, puisque $\overline{P}_k = p_k$; donc: $\sum_k p_k = 1$. Ainsi, il n'y a, pour la série $\sum_k p_k$, qui est toujours convergente, que 2 possibilités: ou bien sa somme est nulle, ou bien sa somme est égale à 1.

LEMME: *Dans le cas régulier, les limites* $\overline{P}_k$ *des* P^n_{ik} *satisfont quel que soit* μ *aux relations:* $\overline{P}_k = \sum_k P^{\mu}_{jk} \overline{P}_j$ $(k = 1,2,\ldots,\infty)$

On a en effet: $P^{n+\mu}_{i_0 k} = \sum_j P^n_{i_0 j} \cdot P^{\mu}_{jk}$; la série $\sum_j P^n_{i_0 j}$ étant uniformément convergente lorsque n varie, il en est de même de

la série $\sum_k P^{\mu}_{jk} \cdot P^{n}_{iok}$, puisque P^{μ}_{jk} est inférieur à 1; il en résulte que:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_j P^{\mu}_{jk} \cdot P^{n}_{ioj} = \sum_j P^{\mu}_{jk} \cdot \overline{P}_j$$

la série $\sum_j P^{\mu}_{jk} \cdot \overline{P}_j$ étant convergente d'après le lemme de la page 200; comme d'autre part: $\lim_{n \to \infty} P^{n+\mu}_{iok} = \overline{P}_k$, on a bien:

$$\overline{P}_k = \sum_j P^{\mu}_{jk} \cdot \overline{P}_j$$

THÉORÈME $IV_{1,1}$: *Dans le cas régulier, les limites* $\overline{P}_k$ *des* P^{n}_{ik} *constituent, quel que soit* μ, *la seule solution du système d'équations:*

$$S\mu \begin{cases} x_k = \sum_j P^{\mu}_{jk} \, x_j & (k = 1, 2, \ldots, \infty) \\ 1 = \sum_k x_k \end{cases}$$

telle que les séries figurant dans les équations de $S\mu$ *convergent absolument.*

Il résulte d'abord du lemme précédant et du théorème $III_{2,1}$ que les $\overline{P}_k$ forment une telle solution de $S\mu$; montrons que c'est la seule; soit en effet (x_k) une telle solution; on a:

$$x_k = \sum_j P_{jk}^{\mu} x_j \qquad ; \quad x_j = \sum_l P_{lj}^{\mu} x_l$$

Comme, par hypothèse, $\sum_k | x_k |$ converge. on voit facilement que la série double: $\sum_{j,l} P_{jk}^{\mu} P_{lj}^{\mu} x_l$ est absolument convergente et l'on peut écrire:

$$x_k = \sum_j P_{jk}^{\mu} \left(\sum_l P_{lj}^{\mu} x_l \right) = \sum_l \left(\sum_j P_{lj}^{\mu} P_{jk}^{\mu} \right) x_l = \sum_l P_{lk}^{2 \cdot \mu} x_l$$

et d'une façon générale:

$$x_k = \sum_j P_{jk}^{n\mu} x_j$$

Comme $P_{jk}^{n\mu} \leqq 1$, et que $\sum_j | x_j |$ converge, la série $\sum_j P_{jk}^{n\mu} x_j$ est uniformément convergente lorsque n varie: on a donc, en vertu du lemme de la page 200,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j}^{n\mu} P_{jk}\, x_j = \sum_{j} \overline{P}_k\, x_j = \overline{P}_k \cdot \sum_{j} x_j = \overline{P}_k, \quad \text{d'où:}$$

$$x_k = \overline{P}_k$$

ce qui établit le théorème.

Paragraphe 5: la convergence au sens de Cesarò des P^n_{ik} dans le cas régulier.

Dans le cas régulier, considérons les quantités $\pi^n_{ik} = \frac{P^1_{ik} + P^2_{ik} + \ldots + P^n_{ik}}{n}$; lorsque n croît indéfiniment, π^n_{ik} tend vers $\overline{P}_k$: autrement dit les quantités $(\pi^n_{ik} - \overline{P}_k)$ sont des infiniments petits avec $\frac{1}{n}$; on a d'autre part, d'après (7) (p.): $P^t_k - p^t_k \leqq a \cdot r^t$; il en résulte puisque $| P^t_{ik} - \overline{P}_k | \leqq P^t_k - p^t_k$, que la série $\sum_{t=1}^{\infty} (P^t_{ik} - \overline{P}_k)$ est absolument convergente; posons: $s_{ik} = \sum_{t=1}^{\infty} (P^t_{ik} - \overline{P}_k)$; si l'on remarque que l'on a: $n\,(\pi^n_{ik} - \overline{P}_k) = \sum_{t=1}^{n} (P^t_{ik} - \overline{P}_k)$, on voit que: $s_{ik} = \lim_{n \to \infty} n\,(\pi^n_{ik} - \overline{P}_k)$ on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème $V_{1,1}$: *Dans le cas régulier, l'infiniment petit* $(\pi^n_{ik} - \overline{P}_k)$ *est équivalent à l'infiniment petit* $\frac{s_{ik}}{n}$, *donc de l'ordre*

de $\frac{1}{n}$ *lorsque* s_{ik} *n'est pas nul; il est d'ordre supérieur, lorsque* s_{ik} *est nul.*

Nous compléterons ce résultat, p. , lorsque nous aurons abordé le cas régulier par une autre méthode.

PARAGRAPHE 6: LE CAS POSITIVEMENT RÉGULIER.

Nous disons qu'un cas régulier est positivement régulier, si toutes les limites $\overline{P}_k$ des P^n_{ik} sont positives. Nous donnons ici des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi:

THÉORÈME: *Pour qu'on soit dans le cas positivement régulier, il suffit qu'il existe 2 indices* ν *et* α *et un nombre positif* η *tels que l'on ait:*

$$\begin{cases} P^{\nu}_{i\alpha} > \eta > 0 \quad \textit{quel que soit } i & (8) \\ P^{\nu}_{\alpha k} < 0 \qquad \textit{quel que soit } k & (9) \end{cases}$$

En effet, si (8) est réalisée; on est dans le cas régulier; et on a d'après (9): $P^{2\nu}_{ik} = \sum_j P^{\nu}_{ij} \cdot P^{\nu}_{jk} \geqq P^{\nu}_{i\alpha} \cdot P^{\nu}_{\alpha k} > \eta\, P^{\nu}_{\alpha k} > 0$;

donc: $p^{2\nu}_k > \eta\, P^{\nu}_{\alpha k} > 0$; donc: $p_k > 0$ quel que soit k.

THÉORÈME: *Pour qu'on soit dans le cas positivement régulier, il suffit que l'on ait, quel que soit* i, $p_{i1} > \eta > 0$ (10) et: $p_{i,i+1} > 0$ (11).

En effet, d'après (10), on est dans le cas régulier. On a: $P_{ik}^{n+1} = \sum_j P_{ij}^{n} p_{jk} > P_{i,k-1}^{n} \cdot p_{k-1,k}$; donc à la limite: $\bar{P}_k > \bar{P}_{k-1} \cdot p_{k-1,k}$ Comme $\bar{P}_1$ est supérieur à η donc positif, on voit par récurrence, que $\bar{P}_k$ est positif quel que soit k.

PARAGRAPHE 7: LE CAS RÉGULIER EXCEPTIONNEL.

Nous avons vu que dans le cas régulier, lorsque n croît indéfiniment, les P_{ik}^{n} tendent uniformément lorsque i varie, vers des limites $\bar{P}_k$ indépendantes de i; réciproquement, supposons que les P_{ik}^{n} tendent, uniformément lorsque i varie, vers des limites $\bar{P}_k$ indépendantes de i: est-on dans le cas régulier?

Puisque P_{ik}^{n} tend vers $\bar{P}_k$ uniformément, on peut, quel que soit ϵ, trouver un nombre N tel que pour $n > N$, on ait: $\bar{P}_k - \epsilon < P_{ik}^{n} < \bar{P} + \epsilon$; d'où l'on déduit: $| P_k^{n} - p_k^{n} | < \epsilon$; donc $P_k^{n} - p_k^{n}$ tend vers 0 et $P_k = p_k = \bar{P}_k$. Par suite:

1.°) si l'un au moins des nombres $\bar{P}_k$ est positif, on est dans le cas régulier;

2.°) si tous les $\overline{P}_k$ sont nuls, on n'est pas dans le cas régulier: nous dirons alors que l'on soit dans le *cas régulier exceptionnel.* Une telle circonstance est évidemment impossible dans le cas des chaînes de Markoff relatives à un nombre fini d'états possibles; dans le cas actuel, au contraire, le cas régulier exceptionnel est parfaitement réalisable: nous en rencontrerons plus loin un exemple (p.), mais cela résultera dès maintenant de la remarque suivante:

Supposons qu'il existe un indice ν tel que la série $\sum_i P_{ik}^{\nu}$ converge quel que soit k, et ait une somme inférieure à un nombre M indépendant de k; on prouve facilement que l'on a: $P_{ik}^{h\cdot\mu} < M^h$; et comme on a: $P_{ik}^{h\mu+m} = \sum_j P_{ij}^{m} \cdot P_{jk}^{h\mu} < M^h$, on en déduit aisément que si $M < 1$, on est dans le cas régulier exceptionnel: c'est par exemple ce qui a lieu si l'on a: $p_{ik} = \frac{1}{3^i}$ pour $k \leqq 3^i$; $p_{ik} = 0$ pour $k > 3^i$. On a en effet: $\sum_i p_{i1} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} = M < 1$; et comme $p_{i,k+1} \leqq p_{i,k}$, on a aussi: $\sum_i p_{ik} \leqq \sum_i p_{i1} = M \leqq 1$.

Chapitre II.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE MARKOFF AU PROBLÈME DES CHAÎNES CONSTANTES DE MARKOFF POUR UNE INFINITÉ NON DÉNOMBRABLE D'ÉTATS POSSIBLES.

Dans ce Chapitre, nous nous proposons d'appliquer la méthode de Markoff au problème II défini dans l'Introduction (p. 4), c'est à dire à l'étude des chaînes de Markoff simples, constantes, à une infinité non dénombrable d'états possibles, mais sous l'hypothèse de l'existence d'une densité de probabilité convenable. Pour donner au problème toute la généralité compatible avec notre méthode, nous en précisons l'énoncé de la façon suivante:

Etant donné, dans un espace à un nombre fini quelconque de dimensions, un ensemble V, borné ou non, mais mesurable, de mesure finie ou non, E et F étant des points variables sur cet ensemble, on considère une famille de fonctions $P^n(E, F)$ $(n = 1, 2, .., \infty)$, définies sur V et satisfaisant aux conditions:

(P_2) $\qquad P^n(E,F) \geqq 0$

(T_2) $\qquad \int_V P^n(E,F)\, dF = 1$

(R_2') $\qquad P^{m+n}(E,F) = \int_V P^m(E,G)\, P^n(G,F)\, dG$

donc en particulier, en posant:

$$(I_2) \qquad P^1(E, F) = p(E, F)$$

on a:

$$(R_2) \qquad P^{n+1}(E, F) = \int_V p(E, G)\, P^n(G, F)\, dG$$

Les intégrales indiquées dans (T_2), (R_2'), (R_2) sont des intégrales de Lebesgue.

Naturellement, on suppose que les $P^n(E, F)$ sont telles que les conditions (P_2), (T_2), (R_2') gardent toujours un sens; mais il n'est pas nécessaire d'expliciter les conditions auxquelles cela aura lieu. Toutefois, à cause de (T_2), la fonction de F: $P^n(E,F)$ doit être mesurable sur V, quels que soient n et E fixes; il faut aussi, pour (R_2'), que les produits $P^m(E, G)\, P^n(G,F)$ soient mesurables en G; on remarquera que cela n'exige pas nécessairement que $P^n(G, F)$ soit mesurable en G: $P^m(E,G)$ étant mesurable en G, il suffit, pour qu'il en soit de même du produit $P^m(E\ G)\ P^m(G,F)$ que $P^m(E, G)$ soit nulle sur les parties de V sur lesquelles $P^n(G, F)$ est non mesurable.

On considère aussi les quantités $P^n(E,\omega) = \int_\omega P^n(E, F)\, dF$, où ω est une partie mesurable quelconque de V; les $P^n(E,\omega)$

constituent une famille de fonctions d'ensemble au point de vue des probabilités, les $P^n(E,F)$ définies sur V sont des densités de probabilités, tandis que les $P^n(E,\omega)$ sont des probabilités proprement dites.

Ceci étant, nous nous proposons d'étudier le comportement, lorsque n croît indéfiniment, des $P^n(E,F)$ et des $P^n(E,\omega)$.[1]

Paragraphe 1: les bornes $p(F)$, $P(F)$, $p(\omega)$, $P(\omega)$ – définition de la condition (M).

Appelons $p^n(F)$ et $P^n(F)$ les bornes inférieures et supérieures, finies ou non, lorsque E varie sur V, de $P^n(E,F)$; on a, en vertu de (R_2), (T_2), (P_2):

$$0 \leqq p^n(F) \leqq p^{n+1}(F) \leqq P^{n+1}(E,F) \leqq P^{n+1}(F) \leqq P^n(F).$$

Par suite: 1.°) $p^n(F)$ tend, lorsque n croit indéfiniment, vers une limite $p(F)$, finie ou non;

(1) Tandis que le problème I auquel est consacré le chapitre précédent, n'avait à peu près pas été consideré jusqu'à notre travail, il n'en est pas de même du problème II actuel, qui a été examiné en particulier par M. Fréchet (Fréchet, 4); mais M. Fréchet n'a pas étudié, du moins directement, les $P^n(E,\omega)$ et surtout nous avons pu compléter ses résultats comme on le verra par la suite.

2.°) si les $p^n(F)$ sont mesurables, $p(F)$ l'est aussi: $p^n(F)$ et $p\ F)$ sont alors sommables, et l'on a: $\int_V p(F)\, dF = \lim_{n \to \infty} \int_V p^n(F)\, dF \leqq 1$ (voir: Fréchet, 4; de la Vallée – Poussin, 1, p. 32, p. 53); mais en général on ignore si les $p^n(F)$ sont mesurables; nous reparlerons de ce point au paragraphe:

3.°) $P^n(F)$ tend, lorsque n croît indéfiniment, vers une limite $P(F)$, finie ou non.

De même, appelons $p^n(\omega)$ et $P^n(\omega)$ les bornes inférieures et supérieures de $P^n(E, \omega)$ lorsque E varie sur V; d'après (R_2') on a:

$$P^{m+1}(E, \omega) = \int_V P^m(E, G)\, P^n(G, \omega)\, dG.$$

D'où l'on déduit, en tenant compte de (T_2), que:

$$0 \leqq p^n(\omega) \leqq p^{n+1}(\omega) \leqq P^{n+1}(E, \omega) \leqq P^{n+1}(\omega) \leqq P^n(\omega) \leqq 1$$

Il s'ensuit que les $p^n(\omega)$ et $P^n(\omega)$ ont des limites $p(\omega)$ et $P(\omega)$. Ceci étant, la méthode de Markoff exige pour être applicable, que la condition suivante, que nous appelerons condition de Mar-

koff ou *condition (M)* pour abréger, soit réalisée: *il faut qu'il existe une partie* Ω *de V, mesurable et de mesure positive, un rang* ν *et un nombre positif* η, *tels que l'on ait; en tout point* F de Ω, $p^{\nu}(F) \geqq \eta$.

PARAGRAPHE 2: ÉTUDE DES FONCTIONS D'ENSEMBLE $P^{n}(E, \omega)$.

Nous obtiendrons notre résultat fondamental en appliquant la méthode de Markoff: nous en avons indiqué le principe au Chapitre précédent, nous l'exposerons donc très rapidement: supposons la condition (M) réalisée, avec $\nu = 1$ pour simplifier. Etant donnés 2 points quelconques E_1 et E_2 de V, nous avons:

$$P^{n+1}(E_1, \omega) - P^{n+1}(E_2, \omega) = \int_V [P^1(E_1, G) - P^1(E_2, G)]\ P^n(G, \omega)\ dG \quad (1)$$

Soit A la partie mesurable de V sur laquelle $P^1(E_1, G) - P^1(E_2, G) \geqq 0$ et B la partie, également mesurable, de V, sur laquelle cette différence est négative. Il peut se faire que $P^1(E_1, G)$ et $P^2(E_2, G)$ soient simultanément infinis positifs; on ne sait alors quelle valeur atribuer à leur différence: mais les points G où cela a lieu ne peuvent former qu'un ensemble vide ou de mesure nulle; soit H cet ensemble; on a: $V = A + B + H$ et en posant:

$$M_1 = \int_A [P^1(E_1,G) - P^1(E_2,G)]\, dG;\quad M_2 = \int_B [P^1(E_2,G) - P^1(E_1,G)]\, dG$$

$$M_1 - M_2 = \int_{V-H} [P^1(E_1,G) - P^1(E_2,G)]\, dG = \int_V [P^1(E_1,G) - P^1(E_2,G)\, dG$$

$$= 1 - 1 = 0$$

donc: $M_1 = M_2$ (2)

Désignons d'une façon générale par $m \cdot \omega$ la mesure de l'ensemble ω; soit ΩA et ΩB les parties de Ω contenues respectivement dans A et B; quel que soit E, nous avons d'après le théorème de la moyenne:

$$\int_{\Omega A} P^1(E,G)\, dG \geqq \eta \times m \cdot \Omega A \quad \int_{\Omega B} P^1(E,G)\, dG \geqq \eta \times m \cdot \Omega B \quad (3)$$

Comme $m \cdot \Omega A + m \cdot \Omega B = m \cdot \Omega$, l'un au moins, ΩA par exemple, des 2 ensembles ΩA et ΩB a une mesure positive et supérieure à: $\dfrac{m \cdot \Omega}{2}$; donc en posant $q = \dfrac{\eta \times m \cdot \Omega}{2}$; on a, quel que soit E:

$$\int_A P^1(E,G)\, dG \geqq \int_{A\Omega} P^1(E,G)\, dG \geqq q > 0$$

$$\int_A [P^1(E_1,G) - P^1(E_2,G)]\, dG = \int_A P^1(E_1,G)\, dG - \int_A P^1(E_2,G)\, dG \leqq$$

$$1 - q < 1$$

donc, en posant $r = 1-q$, $0 \leqq M_1 = M_2 \leqq r < 1$. On en déduit simplement que l'on a:

$$P^n(\omega) - p^n(\omega) < a \cdot r^n \qquad (4)$$

où a et r sont 2 nombres positifs indépendants de n et de ω, r étant < 1; d'où:

THÉORÈME $I_{1,2}$: *Lorsque la condition (M) est réalisée, les limites* $p(\omega)$ *et* $P(\omega)$ *sont égales et lorsque n croît indéfiniment,* $P^n(E,\omega)$ *tend, normalement lorsque E et* ω *varient vers une limite* $\overline{P}(\omega)$ *indépendante de E et égale à la valeur commune de* $p(\omega)$ $P(\omega)$.

Indiquons quelques propriétés de la limite $P(\omega)$: d'abord, $\overline{V}(\omega)$ est absolument continue; sans cela, on pourrait trouver une suite infinie d'ensembles $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q, \ldots$ dont la mesure tendrait vers 0 et tel que, quel que soit q, $p(\omega_q) = \overline{P}(\omega_q)$ reste supérieur à un nombre positif fixe ϵ; or, on a: $P^n(E,\omega) \geqq p(\omega) - a\, r^n$ d'après (4); prenons n tel que $a\, r^n < \frac{\epsilon}{2}$; on aura: $P^n(E,\omega_q) \geqq p(\omega_q) - a\, r^n > \frac{\epsilon}{2}$; $P^n(E,\omega)$ ne serait donc pas absolument continue; cela est impossible, puisque $P^n(E,\omega)$ est une intégrale indéfinie (au sens de M. Lebesgue).

D'autre part, $\overline{P}(\omega)$ est évidemment additive au sens restreint sur V, car si ω_1, et ω_2 sont 2 parties mesurables, non empiétantes, de V, on a: $P^n(E, \omega_1) + P^n(E, \omega_2) = P^n(E, \omega_1 + \omega_2)$, donc à la limite: $\overline{P}(\omega_1) + \overline{P}(\omega_2) = \overline{P}(\omega_1 + \omega_2)$; mais $\overline{P}(\omega)$ est aussi additive au sens complet: soit en effet $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q, \ldots$ une suite infinie d'ensembles mesurables non empiétants situés dans V; on a, en posant: $S = \sum_{q=1}^{\infty} \omega_q$, $S_h = \sum_{q=1}^{h-1} \omega_q$, $R_h = \sum_{q=h}^{\infty} \omega_q$, $\overline{P}(S) = \sum_{q=1}^{h-1} \overline{P}(\omega_q) + \overline{P}(R_q)$; or $P^n(E, \omega)$ est additive au sens complet sur V: on peut donc trouver H positif, tel que l'on ait, pour $h > H$, et n et E fixes, $P^n(E, R_h) < \frac{\epsilon}{2}$; or, $\overline{P}(R_h) < P^n(E, R_h) + a\, r^n$; si l'on a pris n assez grand pour que $a\, r^n < \frac{\epsilon}{2}$, on en déduit que pour $h > H$, on a: $\overline{P}(R_h) < \epsilon$, ϵ étant aussi petit qu'on le veut; donc:

LEMME: *Lorsque la condition* (M) *est réalisée, la limite* $\overline{P}(\omega)$ *des* $P^n(E, \omega)$ *est additive au sens complet et absolument continue sur* V.

CONSÉQUENCE: *Il résulte du lemme précédent que* $\overline{P}(\omega)$ *est une intégrale indéfinie, et admet au moins une dérivée* $\overline{\pi}(F)$, c'est à dire qu'il existe au moins une fonction $\overline{\pi}(F)$ définie, mesurable et sommable sur V, telle que, pour toute partie mesurable

ω de V, on ait: $\overline{P}(\omega) = \int_{\omega} \overline{\pi}\,(F)\, dF$. (5)

En général d'ailleurs, $\overline{P}(\omega)$ admettra plusieurs dérivées: mais ces diverses dérivées ne pouvant différer qu'en des points contenus dans un ensemble de mesure nulle bien déterminé, nous pouvons par convention choisir l'une d'elles, soit $\overline{\pi}\,(F)$, une fois pour toute: on peut choisir par exemple la dérivée symétrique supérieure de $\overline{P}\,(\omega)$.

Remarque: Comme $P^n(E,\omega)$ est absolument continue, il en est de même de $p^n(\omega)$, puisque $p^n(\omega) \leqq P^n(E,\omega)$; mais en général $p^n(\omega)$ n'est pas additive; on a, avec les notations précédentes, $p^n(S) \geqq \sum_q p^n(\omega_q)$.

Indiquons enfin quelques propriétés des $P^n(E,\omega)$:

Lemme: *Lorsque la condition* (M) *est réalisée, quel que soit positif, on peut trouver 2 nombres positifs* $N(\epsilon)$ *et* $m(\epsilon)$ *indépendants de* E, *tels que pour* $n > N(\epsilon)$ *et* $m \cdot \omega < m(\epsilon)$, *on ait quel que soit* E: $P^n(E,\omega) < \epsilon$.

Nous avons en effet $P^n(E,\omega) \leqq \overline{P}(\omega) + a\, r^n$; prenons $N(\epsilon)$ tel que $n > N(\epsilon)$ entraîne $a\, r^n < \frac{\epsilon}{2}$, et $m(\epsilon)$ tel que: $m \cdot \omega < m(\epsilon)$ entraîne $\overline{P}(\omega) < \frac{\epsilon}{2}$, ce qui est possible, puisque $\overline{P}(\omega)$ est

absolument continue; on aura bien alors: $P^n(E,\omega) < \epsilon$, pour $n > N(\epsilon)$ et $m \cdot \omega < m(\epsilon)$.

Considérons maintenant une valeur quelconque mais fixe de E; à chaque valeur de n inférieure ou égale à $N(\epsilon)$, on peut faire correspondre un nombre positif $m_n(\epsilon)$ tel que l'on ait, pour $m \cdot \omega < m_n(\epsilon)$, $P^n(E,\omega) < \epsilon$, puisque $V^n(E,\omega)$ est absolument continue pour n et E fixes. Soit alors $m'(\epsilon)$ le plus petit des, nombres $m(\epsilon)$, $m_1(\epsilon)$, $m_2(\epsilon)$,..., $m_{N(\varepsilon)}$ (ϵ), on a quel que soit n pour $m \cdot \omega < m'(\epsilon)$, $P^n(E,\omega) < \epsilon$; donc:

THÉORÈME: *Lorsque la condition* (M) *est réalisée, l'absolue continuité de la fonction* $P^n(E,\omega)$ *est, pour* E *fixe, uniforme lorsque* n *varie.*

Plaçons nous maintenant dans le cas où V est de mesure infinie. Considérons une suite infinie d'ensembles W_s satisfaisant aux conditions suivantes: *a)* la mesure de W_s est finie; *b)* $W_s \leq W_{s+1}$; *c)* $\lim_{s \to \infty} W_s = V$; les W_s preuvent être quelconques par ailleurs. On sait que l'on a: $\int_V P^n(E,F)dF = \lim_{s \to \infty} \int_{W_s} P^n(E,F)dF$, d'où il résulte que, quels que soient E et n, $\int_{V-W_s} P^n(E,F)\,dF = P^n(E, V-W_s)$ tend vers 0 avec $\frac{1}{s}$. On a alors les propriétés suivantes:

LEMME: *Quel que soit* ϵ *positif, on peut, lorsque la condition* (M) *est réalisée trouver 2 nombres positifs* $N(\epsilon)$ *et* $S(\epsilon)$ *tels que, quel que soit* E, on ait, pour $n \geqq N(\epsilon)$ et $s > S(\epsilon)$, $P^n(E, V-W_s) < \epsilon$.

On a en effet: $P^n(E, V-W_s) \leqq p^n(V-W_s) + a\, r^n$; prenons N entier positif tel que $a\, r^N < \frac{\epsilon}{2}$; pour une valeur E_o de E, on peut trouver $S(\epsilon)$ positif tel que, pour $s > S(\epsilon)$, on ait: $P^N(E_o, V-W_s) < \frac{\epsilon}{2}$, donc a fortiori: $p^N(V-W_s) < \frac{\epsilon}{2}$; mais alors on a, pour $s > S(\epsilon)$, et quel que soit E: $P^{N+1}(E, V-W_s) = \int_V P'(E,G) \times P^N(G, V-W_s)\, dG < \epsilon \cdot \int_V P'(E, G)\, dG = \epsilon$ et d'une façon générale: $P^n(E, V-W_s) < \epsilon$ pour $n \geqq N$, $s > (\epsilon)$, ce qui établit le lemme en prenant $N(\epsilon) = N$; on en déduit facilement que:

THÉORÈME: *Lorsque la condition* (M) *est réalisée, quel que soit* E *fixe,* $P^n(E, V-W_s)$ *tend vers* 0 *avec* $\frac{1}{s}$ *uniformément lorsque* n *varie.*

PARAGRAPHE 3: ÉTUDE DES FONCTIONS DE POINTS $P^n(E, F)$.

On peut toujours poser: $P^n(E, F) = \bar{\pi}(F) + R^n(E, F)$, et d'après (4) et (5), on a, quels que soient n, E, et ω:

$$\left| \int_\omega R^n(E, F)\, dF \right| < a\, r^n$$

Comme $P^n(E, F)$ et $\bar{\pi}(F)$ sont mesurables et sommables, il en est de même de $R^n(E, F)$; considérons alors une valeur déterminée de E et soit A_n^q l'ensemble des points F pour lesquels on a: $| R^n(E, F) | > \frac{1}{q}$, q entier positif. Soit $A_n^{q,1}$ l'ensemble sur lequel on a: $R^n(E, F) > \frac{1}{q}$, et A_n celui sur lequel on a: $R^n(E, F) < -\frac{1}{q}$; évidemment, $A_n^q = A_n^{q,1} + A_n^{q,2}$. Et:

$$\frac{m \cdot A_n^{q,1}}{q} < \left| \int_{A_n^{q,1}} R^n(E, F)\, dF \right| < a\, r^n$$

$$\frac{m \cdot A_n^{q,2}}{q} < \left| \int_{A_n^{q\,2}} R^n(E, F)\, dF \right| < a\, r^n$$

donc: $m \cdot A_n^q < 2\, a\, q\, r^n$; posons $B_k^q = \sum_{n=k}^{\infty} A_n^q$; on a:

$$m \cdot B_k^q < \left(\frac{2\, a}{1-r} \right) q\, r^k \quad \text{et} \quad B_k^q \geq B_{k+1}^q$$

Posons $B^q = \lim_{k \to \infty} B_k^q$; on a: $m \cdot B^q \leq \lim_{k \to \infty} \left(\frac{2\, a}{1-r} \right) q\, r^k = 0$ ou: $m \cdot B^q = 0$. Enfin soit $W(E) = \sum_{q=1}^{\infty} B^q$; on a: $m \cdot W(E) = 0$;

$W(E)$ peut dépendre de E, parce que A_n et par suite B^q peuvent dépendre de E.

Ceci étant, soit F un point en lequel $P^n(E, F)$ ne tend pas vers $\bar{\pi}(F)$; c'est à dire où $R^n(E,F)$ ne tend pas vers 0 avec $\frac{1}{n}$; on peut trouver un nombre positif α et une suite indéfinie $n_1, n_2, .., n_p, ...$ tels que, quel que soit p, on ait: $|R^{n_p}(E,F)| > \alpha$; on voit, en prenant $q > \frac{1}{\alpha}$, que F appartient à $A^q_{n_p}$ quel que soit p, donc à B^q_k quel que soit k, donc à B^q, donc à $W(E)$: on peut donc énoncer:

THÉORÈME $II_{1,2}$: *Lorsque la condition* (M) *est réalisée,* $P^n(E,F)$ *tend vers la dérivée* $\bar{\pi}(F)$ *de* $\bar{P}\omega$ *– donc vers une limite indépendante de* E *– sauf peut être en des points* F *appartenant à un ensemble de mesure nulle, qui peut dépendre de* E.

Envisageons maintenant le cas d'un point F où $P(F)$ est finie; il existe un entier M tel que $P^M(F)$ soit finie; considerons alors, d'après (R_2'):

$$P^{l+M}(E, F) = \int_V P^l(E, G)\, P^M(G, F)\, dG$$

qu'on peut écrire:

$$P^{l+M} = \int_V \bar{\pi}(F)\, P^M(G,F)\, dG + \int_V R^l(E,G)\, P^M(G,F)\, dG$$

La condition (M) étant réalisée, on a pour $l > \nu$:

$$\left| \int_V R^l(E,G)\, P^M(G,F)\, dG \right| < a\, r^l\, P^M(F)$$

En posant $A = 2a\, \dfrac{P^M(F)}{r^M}$, $n = l + M$, $\mu = \nu + M$ et $L(F) = \int_V \bar{\pi}(G)\, P^M(G,F)\, dG$

on pour $n > \mu$, quel que soit E:

$$L(F) - \frac{A}{2} r^n < P^n(E,F) < L(F) + \frac{A}{2} r^n$$

d'où l'on a le théorème suivant, indiqué par M. Fréchet (Fréchet, 4):

Lorsque la condition (M) *est realisée, en tout point* F *tel que* P(F) *soit finie,* P(F)=p(F) *et lorsque n croît indéfiniment* $P^n(E,F)$ *tend, normalement lorsque* E *varie, vers une limite indépendante de* E *et égale à la valeur commune de* P(F) *et* p(F).

Appelons alors R l'ensemble des points F tels que P(F) soit finie et W l'ensemble des points communs à tous les ensembles W(E); W est de mesure nulle, ou contenu dans un ensemble de

mesure nulle, il en est donc de même de R. W.; on peut donc, d'après ce qui précède, énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME $III_{1,2}$: *En tout point* F *de* R, *sauf peut être en des points appartenant à l'ensemble* $R \cdot W$, *la dérivée* $\pi(F)$ de $P(\omega)$ *est égale à la valeur commune des bornes* $p(F)$ et $P(F)$.

Ainsi $P'(F)$ et $p(F)$ sont mesurables et sommables sur tout ensemble mesurable contenu dans $R - R \cdot W$.

On a également le théorème suivant:

THÉORÈME $IV_{1,2}$: *Pour tout point* F *de l'ensemble* $R - R \cdot W$, *on peut trouver un entier positif* $M(F)$ *tel que, pour* $m > M(F)$, *on ait:* $\bar{\pi}(F) = \int_V \bar{\pi}(G)\, P^m(G, F)\, dG$.

On a vu en effet qu'on pouvait trouver $M(F)$ tel que pour $m > M(F) \int_V \bar{\pi}(G)\, P^m(G,F)\, dG$ soit égale à $p(F)$; mais si F est sur $R - R \cdot W$, $p(F) = \bar{\pi}(F)$; ce qui démontre le théorème.

PARAGRAPHE 4: CAS PARTICULIER OÙ IL EXISTE UN RANG μ TEL QUE $P^\mu(E, F)$ SOIT MESURABLE (B) EN (E, F)

Nous ne rappellerons pas la définition des fonctions mesurables (B) [V. de la Vallée - Poussin, 1, p. 33 et sq.] Nous nous proposons dans ce paragraphe d'examiner le cas particulier où *pour une valeur* μ de n, $P^\mu(E, F)$ *est mesurable* (B) *en* (E, F), ce qui entraîne diverses simplifications dans les énoncés des résultats de ce chapitre.

Observons d'abord que *si* A (E, F) *est une fonction mesurable* (B) *en* (E, F), *la fonction:* $B(E) = \int_V A(E, F)\, dF$ *est mesurable* (B) *en* E; cela est évident pour les fonctions continues, c'est à dire de classe 0; et comme une fonction de classe α est limite de fonctions de classe inférieure à α, ce résultat s'établit par récurrence.

On en déduit que $P^{n\mu}(E, F)$ est mesurable (B) en (E, F) quel que soit $n \geqq 1$; nous en déduisons aussi que $p^{n.\mu}(F)$ est mesurable (B) en F, quel que soit $n \geqq 1$; il suffit pour cela de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME: *Soit une fonction* $F(x, y)$ *de 2 variables* x *et* y, *mesurable* (B) *par rapport à l'ensemble de ces 2 variables, la borne inférieure* $f(x)$ *de* $F(x,y)$ *lorsque* y *varie, est une fonction mesurable* (B) *de* x.

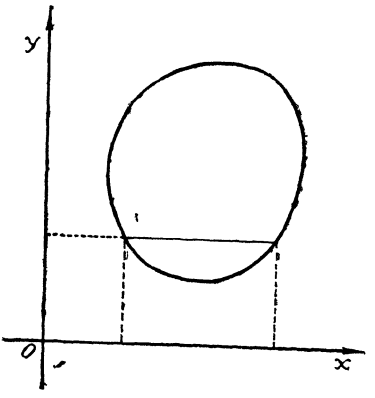
En effet, $F(x, y)$ étant supposée définie et uniforme, sur un certain ensemble à 2 dimensions E, mesurable (B) quelles sont les valeurs de x pour lesquelles on a: $f(x) \geqq a$? ce sont évidemment les valeurs de x pour lesquelles on a, quel que soit y, $F(x, y) \geqq a$. Soit $E(a)$ l'ensemble à 2 dimensions sur lequel $F(x, y) \geqq a$; si je coupe $E(a)$ par des parallèles à $0x$, d'ordonnée variable y, si je projette les sections obtenues sur $0x$, le produit de ces projections est l'ensemble $e(a)$ des valeurs de x pour lesquelles $f(x) \geqq a$. (J'emploie le mot produit dans un seus large, car les sections et par suite les projections ne sont en

général ni en nombre fini, ni même en infinité dénombrable). Si $e(a)$ est mesurable sur $0x$, nous dirons que $E(a)$ est mesurable sur $0x$, ou: est $m/0r$ c'est là une propriété d'ensemble qui n'est pas intrinsèque, car elle dépend non seulement de $E(a)$, mais aussi de la direction de $0x$ par rapport à $E(a)$.

Observons que l'ensemble $e(a)$ que nous venons ainsi de déterminer sur $0x$ peut être consideré comme le complémentaire de la projection $e'(a)$ sur $0x$ du complémentaire $E'(a)$ de $E(a)$: si donc $e(a)$ est mesurable, $e'(a)$ l'est aussi et réciproquement; donc: les ensembles $m/0x$ sont les complémentaires des ensembles dont la projection sur $0x$ est mesurable.

On voit facilement que le produit d'un nombre fini, ou d'une infinité dénombrable d'ensembles $m/0x$ est $m/0x$; il n'en est pas de même pour la somme.

Ceci étant, nous n'avons pas encore utilisé l'hypothèse que $E(a)$ est mesurable (B) quel que soit a; autrement dit, $E(a)$ est obtenu par addition, soustraction, multiplication d'une infinité dénombrable de rectangles ou de segments de droite: il en résulte que la section de $E(a)$ par une droite s'obtient par addition, soustraction, multiplication des intervalles fermés et des points constituant les sections par la droite, des rectangles et des segments de droite en question: la section considérée est donc mesurable (B), ce prouve que *si la fonction* $F(x,y)$



est mesurable (B) *par rapport à* (x, y), *elle est mesurable* (B) *en* x *et en* y *séparement.*

D'autre part $E(a)$ étant mesurable (B), il en est de même de son complémentaire $E'(a)$; or la projection d'un rectangle ou d'un segment de droite sur une droite quelconque est un intervalle fermé ou un point: de sorte que la projection d'un ensemble mesurable (B) sur une droite quelconque est mesurable (B); il en résulte que $E(a)$ est m/D par rapport à toute droite D: donc $f(x)$ est mesurable (B) en x.

On raisonnerait de même sur la borne supérieure de $F(x, y)$.

Il y a lieu d'observer que la condition imposée à $F(x, y)$ pour que $f(x)$ soit mesurable est presque nécessaire: considérons en effet une fonction $F(x, y)$ définie dans le domaine $0 \leqq \frac{x}{y} \leqq 1$, et égale à 1 partout sauf en des points M, situés sur le segment $x = y$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ et formant sur ce segment un ensemble linéairement non mesurable; supposons que $F(x, y) = 0$ en ces points; $F(x, y)$ est alors mesurable en (x, y) et même mesurable (B) séparément en x et y, mais non par rapport à l'ensemble (x, y); cependant $f(x)$ n'est pas mesurable en x: en effet, $f(x) = 1$, sauf si x est l'abscisse d'un point M, auquel cas $f(x) = 0$: comme l'ensemble des abscises des points M est évidemment non mesurable, il en est de même de $f(x)$.

Il en résulte que $p(F)$ est mesurable (B): *dans ces conditions, la condition* (M) *équivaut à:* $\int_V p(F)\, dF > 0$.

Nous pouvons alors répondre à une question de M. Fréchet (Fréchet, 4, p. 205) : ayant défini le cas quasi-régulier comme celui où, lorsque n croît indéfiniment, $P^n(E, F)$ tend vers une limite indépendante de E soit $\bar{\pi}(F)$, uniformément lorsque E varie, sauf peut être si F appartient à un certain ensemble de mesure nulle U, M. Fréchet demande: *peut-on trouver des cas quasi réguliers, tels que l'on ait:* $0 < \int_V \bar{\pi}(F)\, dF < 1$; *il faut répondre non.*

En effet, sauf peut être sur U, on aura $p(F) = P(F) = \bar{\pi}(F)$; on en tire: $0 \leq \int_V p(F)\, dF = \int_V \bar{\pi}(F)\, dF = \lim_{n \to \infty} \int_V p^{n \cdot \mu}(F)\, dF \leq 1$; et $\bar{\pi}(F)$ est mesurable, abstraction faite de U; alors ou bien $\bar{\pi}(F)$ est nulle presque partout; ce qui entraîne $\int_V \bar{\pi}(F)\, dF = 0$ (ce cas se présente effectivement, M. Fréchet en a fourni un exemple); ou bien il existe un ensemble mesurable, de mesure non nulle, sur lequel $\bar{\pi}(F)$ est positive: on en déduit que la condition (M) est satisfaite; d'après (5) et $II_{1,2}$, il en résulte que: $\int_V \bar{\pi}(F)\, dF = \bar{P}(V) = 1$.

SECTION II.

ITÉRATION DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.

Chapitre I.

DÉFINITION, PROPRIÉTÉS ET CALCUL DU RAYON POLAIRE D'UNE SUBSTITUTION LINÉAIRE ALGÉBRIQUE À UNE INFINITÉ DE VARIABLES.

Nous nous proposons, dans les chapitres I et II de la présente section, d'étudier diverses questions relatives aux substitutions linéaires algébriques dans l'espace D_ω, et en particulier leur itération; dans le chapitre III, nous étendrons les résultats obtenus aux opérations linéaires en général; mais nous avons préféré commencer par le cas particulier des substitutions dans l'espace D_ω, parce que ce sont elles qui interviennent dans les applications au problème I, que nous avons en vue.

PARAGRAPHE 1: GÉNÉRALITÉS SUR LES SUBSTITUTIONS ALGÉBRIQUES LINÉAIRES DANS L'ESPACE D_ω.

Rappelons que l'espace D_ω (v. Fréchet, 5) est l'espace des points x dont les coordonnées: $x_1,\ldots, x_k,\ldots$ ($k = 1, 2,\ldots, \infty$) sont telles que $| x_k |$ reste borné quand k varie (la borne pouvant

varier avec le point considéré, bien entendu); dans ces espaces on appelle distance de 2 points, x et x', et l'on note: $|x-x'|$, la borne supérieure de $|x_k-x_k'|$ lorsque k varie; on appelle norme de x, et l'on note: $|x|$, la distance de x au point Θ de coordonnées: 0, 0,..., 0,.... . Une suite de points $x(1)$,..., $x(n)$,... tend vers x, si $|x-x(n)|$ tend vers 0 avec $\frac{1}{2}$.

Ceci étant, on appelle *substitution linéaire*, dans D_ω, toute transformation ponctuelle, univoque, distributive et continue; la continuité équivaut à dire que la transformation est bornée, c'est à dire qu'il existe un nombre positif M tel que l'on ait, quel que soit x, et si x' designe le transformé de x:

$$|x'| \leqq M \cdot |x| \qquad (1)$$

[cf. F. Riesz, p. 79].

Soit alors une substitution A: le plus petit nombre M satisfaisant à (1) s'appelle la *borne de A*, et se désigne par le symbole $\|A\|$; étant données des substitutions A_1, A_2,..., A_q, et un nombre algébrique ρ, on a évidemment:

$$\|A_1 + A_2 + .. + A_q\| \leqq \sum_i \|A_i\| \quad \text{et} \quad \|A_1 \cdot A_2 \cdot ..... \cdot A_q\| \leqq \pi_i \|A_i\|$$

$$\|\rho \cdot A\| = |\rho| \times \|A\|$$

Etant donnée une substitution A, soient a_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$ les coordonnées du transformé, par A, du point $x(k)$ de coordonnées $\left(x_j = \begin{matrix} 0 \text{ si } j \lesseqgtr k \\ 1 \text{ si } j = k \end{matrix}\right)$; on montre (cf. F. Riesz, 2, p. 79-80) que:

a) les coordonnées x_i' du transformé x' du point x de coordonnées x_k sont données par les formules:

$$x_i' = \sum_k a_{ik}\, x_k \tag{2}$$

b) les séries $\sum_k |a_{ik}|$ convergent; nous poserons $M_i = \sum_k |a_{ik}|$;

Posons alors: $x_k = \overline{\text{signe}}\ a_{ik}$ ($\overline{\text{signe}}\ z = 1$ si $z = 0$, $\dfrac{|z|}{z}$ dans les autres cas); on trouve: $x_i' = \sum_k |a_{ik}| = M_i$; on en déduit que les M_i admettent une borne supérieure $M \leqq \| A \|$; mais il est clair que nécessairement, $|x_i'| \leqq M \cdot |x|$; donc $M = \| A \|$.

Réciproquement, soit un tableau de nombres a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots \infty)$, tels que les séries $\sum_k |a_{ik}|$ convergent et que leurs sommes M_i aient une borne supérieure finie M: on voit facilement que les formules (2) représentent alors, dans D_ω, une substitution linéaire de borne M; en raison des formules (2), on qualifie parfois la substitution d'algébrique.

On dit quelque fois qu'une suite de points: $x(1),.., x(n), ...$ tend faiblement vers un point x si $|x(n)|$ reste borné, et si $x_k - x_k(n)$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$, quel que soit k; il est à remarquer qu'en partant de la continuité faible, on définit dans D_ω les mêmes substitutions qu'en partant de la continuité ordinaire.

Une substitution A est dite *complétement continue*, si elle transforme tout ensemble borné de points de D_ω en un ensemble compact; ce qui équivaut à dire qu'elle transforme toute suite faiblement convergente en une suite convergente. On montre (F. Riesz, 2, p. 99) que la condition nécessaire et suffisante pour que A soit complétement continue est que les séries $\sum_k |a_{ik}|$ convergent uniformément par rapport à i.

Nous désignerons par $A^1 = A, A^2,.., A^n,..$ les puissances ou iterées successives de A, et par n^n_{ik} leurs coefficients respectifs; on a:

$$a^{n+m}_{ik} = \sum_j a^n_{ij} \times a^m_{jk} \qquad (3)$$

Rappelons que la *réciproque* A^{-1} — unique si elle existe—d'une substitution A est la substitution telle que: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, E désignant la substitution identique dans D_ω.

Au tableau des a_{ik}, on peut faire correspondre le tableau des a_{ki}, son transposé et considérer les formules:

$$y_i' = \sum_k a_{ik}\, y_k \tag{4}$$

Plaçons nous dans l'espace (A), c'est à dire dans l'espace des points y dont les coordonnées $y_1, \ldots, y_k, \ldots$ $(k = 1, 2, \ldots, \infty)$ sont telles que la série $\sum_k |y_k|$ converge. Dans cet espace, les formules (4) définissent une transformation ponctuelle, univoque, distributive, qui sera continue si l'on définit dans (A) la continuité en disant que $y(n)$ tend vers y lorsque $\sum_k |y_k - y_k(n)|$ tend vers 0: alors (4) représente une substitution A dans (A), que nous appelons la *transposée* de A.

PARAGRAPHE 2: LES SÉRIES ENTIÈRES DE SUBSTITUTIONS.

Une suite de substitutions $A_{(1)}, \ldots, A_{(n)}, \ldots$ *tend uniformément* vers une substitution A, si $||A - A_{(n)}||$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$; *étant donnée une suite* $A_{(1)}, \ldots, A_{(n)}, \ldots$, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une limite* A *vers laquelle elle tende uniformément, est que, quel que soit* ϵ, *on ait pour n assez grand:* $||A_{(n+p)} - A_{(n)}|| < \epsilon$ *quel que soit p*. Ce résultat a eté indiqué par M. Riesz (F. Riesz, 2, p. 108); nous en donnons la démonstration suivante, plus commode pour l'extension aux opérations linéaires quelconques.

La condition est évidemment nécessaire; montrons qu' elle est suffisante; $\| A_{(n)} \|$ tend vers une limite **M**, car : $| \| A_{(n+p)} \| - A_{(n)} \| | \leq \| A_{(n+p)} - A_{(n)} \|$, comme on le vérifie facilement. Posons $x'(n) = A_{(n)}(x)$; on a: $| x'(n+p) - x'(n) | \leq \| A_{(n+p)} - A_{(n)} \| \cdot | x | \leq \epsilon \cdot | x |$

Il en résulte que $x'(n)$ tend vers une limite x'; soit T la transformation qui transforme x en x': c'est une transformation ponctuelle, univoque distributive; et continue, car: $|x_1' - x_2'| \doteq \lim_{n \to \infty} |x_1'(n) - x_2'(n)| \leq M \cdot |x|$; T est donc une substitution linéaire A; je dis que $\| A - A_{(n)} \|$ tend vers 0; en effet, on a: $\| A - A_{(n)} \| = \text{Max} \cdot \dfrac{|x' - x'(n)|}{|x|}$; or, si n est assez grand, on a par hypothèse, quel que soit p: $\text{Max} \cdot \dfrac{|x'(n+p) - x'(n)|}{|x|} < \epsilon$; comme $x' = \lim_{p \to \infty} x'(n+p)$, on en déduit que $\| A - A_{(n)} \| \leq \epsilon$; ce qui établit la propriété. On remarque en outre que $M = \lim_{n \to \infty} \| A_{(n)} \| = \| A \|$.

Evidemment, si $A_{(n)}$ tend uniformément vers A, les $a_{ik}(n)$, coefficients de $A_{(n)}$, tendent vers les coefficients a_{ik} de A, uniformément lorsque i et k varient, puisque: $| a_{ik}(n) - a_{ik} | \leq \| A - A_{(n)} \|$.

On peut définir les séries uniformément convergentes de substitutions; considérons en particulier une infinité dénombrable de

substitutions : $A_{(0)}$, $A_{(1)}$, .. , $A_{(n)}$, ... et la « série entière » : $\sum_{n=0}^{\infty} A_{(n)} \lambda^n$, où λ est un paramètre complexe; soit R le rayon de convergence de la série: $\sum_n || A_{(n)} || \lambda^n$.

THÉORÈME: *Pour toute valeur de* λ *telle que* $|\lambda| < R$, la série $\sum_n A_{(n)} \lambda^n$ *converge uniformément.*

On a en effet: $|| A_{(n)} \lambda^n + A_{(n+1)} \lambda^{n+1} + .. + A_{(n+p)} \lambda^{n+p} ||$ $\leqq || A_{(n)} || \, |\lambda|^n + ... + || A_{(n+p)} || \cdot |\lambda|^{n+p}$, et par hypothèse le second membre de cette inégalité tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$.

THÉORÈME: *Si* λ_0 *est tel que série* $\sum_n A_{(n)} \lambda_0^n$ *converge uniformément on a:* $|\lambda_0| \leqq R$.

En effet, si $\sum_n A_{(n)} \lambda_0^n$ converge uniformément, il existe un nombre M, tel que l'on ait: $|| A_{(n)} \lambda_0^n || = || A_{(n)} || \cdot |\lambda_0|^n \leqq M$ quel que soit *n;* soit alors λ tel que $|\lambda| < |\lambda_0|$; on a: $|| A_{(n)} || \cdot |\lambda|^n = || A_{(n)} || \cdot |\lambda_0|^n \times \left|\frac{\lambda}{\lambda_0}\right|^n \leqq M \cdot \left|\frac{\lambda}{\lambda_0}\right|^n$; et comme $\left|\frac{\lambda}{\lambda_0}\right| < 1$, la série $\sum_n || A_{(n)} || \cdot |\lambda|^n$ est absolument convergente, donc: $|\lambda| < R$, d'ou l'on conclut que, aussi: $|\lambda_0| \leqq R$, car $|\lambda|$ peut être pris aussi voisin qu'on le veut de $|\lambda_0|$.

CONSÉQUENCE I: En raison des propriétés du nombre R, constatées par les 2 théorèmes précédents, nous dirons que R est le *rayon de convergence* de la série $\sum_n A_{(n)} \lambda^n$.

CONSÉQUENCE II: Soient $a_{ik}(n)$ les coefficients de $A_{(n)}$; à tout nombre positif $f < R$, on peut faire correspondre un nombre positif $M(\rho)$ indépendant de i et k, tel que l'on ait $|a_{jk}(n)| \leqq \frac{M(\rho)}{\rho^n}$; ou peut en effet déterminer $M(\rho)$ tel que l'on ait: $||A_{(n)}|| \leqq \frac{M(\rho)}{\rho^n}$, et on a: $|a_{ik}(n)| \leqq ||A_{(n)}||$. Ceci établit que le rayon de convergence de la série $\sum_n a_{ik}(n) \lambda^n$ est au moins égal à R.

CONSÉQUENCE III: Sur tout domaine intérieur à son cercle de convergence, la série $\sum_n A_{(n)} \lambda^n$ a pour somme une fonction uniformément continue de λ. Cela résulte immédiatement du fait que, sur un tel domaine, la serie converge uniformément, et que d'autre part un «polynôme» en λ de la forme $\sum_{n=0}^{q} A_{(n)} \lambda^n$ est évidemment une fonction uniformément continue de λ.

PARAGRAPHE 3: RÉSOLVANTE ET RAYON DE CONVERGENCE D'UNE SUBSTITUTION.

Etant donnée la substitution A, considérons la substitution $E - \lambda A$, où λ est un paramètre complexe; pour certaines valeurs

de λ, dites valeurs ordinaires, $E - \lambda A$ admet une réciproque, $(E-\lambda A)^{-1}$; pour les autres valeurs, dites singulières, $(E-\lambda A)^{-1}$ n'existe pas. On démontre que l'ensemble des valeurs ordinaires est un ensemble ouvert 0 (F. Riesz, 2, p. 116); et par suite l'ensemble des valeurs singulières est un ensemble fermé F; 0 comprend toujours l'origine $(\lambda=0)$.

Lorsque les a_{ik} sont tous réels, si λ_o est une valeur de λ singulière, il en est de même de la valeur conjuguée $\bar{\lambda}_o$; cela tient à l'équivalence des systèmes : $x_i - \bar{\lambda}_o \sum_k a_{ik} x_k = y_i$ et $\bar{x}_i - \bar{\lambda}_o \cdot \sum_k a_{ik} \bar{x}_k = \bar{y}_i$.

Considérons la substitution $A(\lambda)$, fonction de λ, définie sur 0 par les conditions:

$A(\lambda) = A$ pour $\lambda = 0$; $A(\lambda) = \frac{1}{\lambda}[(E-\lambda A)^{-1}-E]$ en tout autre point de 0.

Nous appellerons $A(\lambda)$ la *résolvante de* A; on démontre que (F. Riesz, 2, p. 115 et 19).

1.° sur 0, on a: $A(\lambda_1) \cdot A(\lambda_2) = A(\lambda_2) \cdot A(\lambda_1)$

2.° sur 0, on a: $A(\lambda_1) - A(\lambda_2) = (\lambda_1-\lambda_2) \cdot A(\lambda_1) \cdot A(\lambda_2)$ (5)

3.° au voisinage de tout point μ de 0, $A(\lambda)$ est *holomorphe* et admet le développement en série de Taylor suivant:

$$A(\lambda) = A(\mu) + (\lambda - \mu)\, A^2(\mu) + (\lambda - \mu)^2 \cdot A^3(\mu) + \ldots\ldots \qquad (6)$$

En particulier, au voisinage de l'origine, on a:

$$A(\lambda) = A + \lambda A^2 + \ldots + \lambda^{n-1} A^n + \ldots. \qquad (6)'$$

Par l'expression d'«holomorphe», il faut entendre que les calculs et les résultats qui valent pour les fonctions holomorphes ordinaires gardent un sens et se conservent formellement pour $A(\lambda)$.

Soit R le rayon de convergence de la série (6)': nous l'appelerons pour la commodité le *rayon de convergence de* A; on a évidemment: $R \geqq \dfrac{1}{\|A\|}$.

D'autre part, puisque $A(\lambda)$ est holomorphe, on peut lui appliquer la théorie du prolongement analytique; mais il faut observer que le domaine d'existence 0 de $A(\lambda)$ n'est pas forcément d'un seul tenant; et que le prolongement, d'un point quelconque à un autre point quelconque, peut être impossible. Cette difficulté disparaît si l'on se borne à considérer, au lieu de 0, *la plus grande partie de* 0, *soit* 0', *qui est d'un seul tenant et contient l'origine*.

Soit $A_n(\lambda)$ la résolvante de A^n; comme on a: $\|A^n\| \leqq \|A\|^n$, la série entière: $\sum_{q=1}^{\infty} A^{qn} \cdot \lambda^{q-1}$ est uniformément convergente dans le cercle: $|\lambda| < \dfrac{1}{\|A\|^n}$; et par suite y représente $A_n(\lambda)$; alors $A_n(\lambda^n)$ admettra le développement:

$$A_n(\lambda^n) = A^n + \lambda^n A^{2n} + ... + \lambda^{(q-1)n} A^{qn} + ... \qquad (7)$$

uniformément convergente à l'intérieur du cercle (C) : $|\lambda| < \frac{1}{\sqrt[n]{\|A\|^n}} = \frac{1}{\|A\|}$; d'ailleurs, daus le même domaine, le développement (6)' est uniformément convergent; posons :

$$H(\lambda) = A + \lambda A^2 + ... + \lambda^{n-2} A^{n-1} \qquad (8)$$

On vérifie, en tenant compte de (6)', (7), (8), que l'on a dans (C):

$$A(\lambda) = H(\lambda) + \lambda^{n-1} [E + \lambda \cdot H(\lambda)] \cdot A_n(\lambda^n)$$

Et comme (c) est dans 0', on peut grâce au prolongement analytique, énoncer que:

THÉORÈME $I_{2,1}$: *Sur la partie 0' de son domaine d'existence, la résolvante $A(\lambda)$ de A et celle $A_n(\lambda)$ de A^n, satisfont quel que soit n à la relation:*

$$A(\lambda) = H(\lambda) + \lambda^{n-1} A_n(\lambda^n) + \lambda^n \cdot H(\lambda) \cdot A_n(\lambda^n) \qquad (9)$$

où $H(\lambda)$ représente la substitution: $A + \lambda A^2 + ... + \lambda^{n-2} \cdot A^{n-1}$.

PARAGRAPHE 4: PÔLES DE LA RÉSOLVANTE ; SUBSTITUTIONS PRINCIPALES D'UNE SUBSTITUTION.

Toujours parce qu'elle est une fonction holomorphe, la résolvante $A(\lambda)$ admet, au voisinage d'un point singulier isolé α, un développement en série de Laurent (cf. F. Riesz, 2, p. 117-118):

$$A(\lambda) = B_0 + B_1(\lambda-\alpha) + B_2(\lambda-\alpha)^2 + \ldots.$$

$$+ \frac{C_1}{(\lambda-\alpha)} + \frac{C_2}{(\lambda-\alpha)^2} + \ldots.$$

où la première ligne, dont nous désignerons la somme par $B(\lambda)$, représente la partie régulière de $A(\lambda)$, et la deuxième ligne, de somme $C(\lambda)$, la partie principale de $A(\lambda)$; si cette partie principale ne comporte qu'un nombre fini de termes, on dira que α est un *pôle* de $A(\lambda)$; $A(\lambda)$ admet alors le développement suivant:

$$A(\lambda) = B(\lambda) + C(\lambda) = B_0 + B_1(\lambda-\alpha) + \ldots.$$

$$+ \frac{C_1}{(\lambda-\alpha)} + \frac{C_2}{(\lambda-\alpha)^2} + \ldots + \frac{C_m}{(\lambda-\alpha)^m} \text{ avec } C_m \lesseqgtr 0 \quad (10)$$

m est l'ordre du pôle α;

Rappelons que 2 substitutions A et B sont orthogonales, si l'on a: $A \cdot B = B \cdot A = 0$. Il est aisé de voir que, si A et B sont orthogonales, la résolvante de $(A + B)$ est la somme de la résolvante de A et de celle de B (du moins au voisinage de l'origine).

Ceci étant nous allons appliquer à $A(\lambda)$ les méthodes employées, pour l'étude des équations intégrales et des noyaux orthogonaux, dans le Cours d'Analyse de M. Goursat, auquel nous renvoyons pour le détail de la marche à suivre (Goursat, 1, p. 398,403). On obtient ainsi les résultats suivants:

a) en portant le développement (10) dans l'égalité: $A(\lambda) = A + \lambda \cdot A \cdot A(\lambda)$ que l'on tire de (5) en faisant $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 0$, on trouve en identifiant que:

$$C_m = \alpha \cdot A \cdot C_m \tag{11}$$

b) la substitution $C(\lambda)$ étant une « fonction rationnelle » de λ peut être considérée comme définie partout; il n'en est pas de même de $B(\lambda)$; mais si l'on suppose que α appartient à 0', il est clair que, par prolongement analytique $B(\lambda)$ est défini sur 0'; on prouve alors, en portant le développement (10) dans (5) et en identifiant,

que les substitutions $B(0)$ et $C(0)$ sont orthogonales;

que l'on a: $A = A(0) + B(0)$ (12)

que, sur 0', $B(0)$ et $C(0)$ ont pour résolvantes respectivement $B(\lambda)$ et $C(\lambda)$, d'où il résulte que $E - \lambda B(0)$ admet une réciproque pour $\lambda = \alpha$, puisque $B(\lambda)$ est holomorphe en α.

La substitution $C(0)$ est caractérisée par le fait que sa résolvante est une fonction rationnelle nulle à l'infini et possédant un pôle unique pour tout point singulier: nous l'appellerons la *substitution principale* de A relative au pôle α. Deux substitutions principales de A relatives à 2 pôles différents sont orthogonales entre elles (Goursat, 1, p. 404).

ITÉRATION DES SUBSTITUTIONS PRINCIPALES: on a: $C(\lambda) = \frac{C_1}{\lambda-\alpha} + \ldots + \frac{C_m}{(\lambda-\alpha)^m}$, avec $C_m \gtrless 0$; ce qui peut s'écrire:

$$C(\lambda) = -\frac{C_1}{\alpha\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)} + \ldots\ldots + (-1)^m \frac{C_m}{\alpha^m\left(1-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^m}$$

Développons au voisinage de $\lambda = 0$:

$$C(\lambda) = \sum_n C(0)^n \lambda^{n-1} = \sum_n \left[\sum_{q=1}^m C_q \cdot \binom{q-1}{n+q-2}\right] \frac{\lambda^{n-1}}{\alpha^{n-1}}$$

$\binom{q-1}{n+q-2}$ désigne le nombre des combinaisons de $n+q-2$ nombres $q-1$ à $q-1$: c'est un polynôme en n de degré $q-1$; comme C_m n'est pas nulle, on en déduit que:

$$C(0)^n = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n Q(n) \qquad (13)$$

où $Q(n)$ est un «polynôme» de degré $m-1$; il en résulte, si l'on appelle $C_{ik}(0)$ les coefficients de $C(0)$, que l'on a:

$$C_{ik}^n(0) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \cdot Q_{ik}(n) \qquad (13)'$$

où $Q_{ik}(n)$ est un polynôme en n de degré $m-1$ au plus, ce degré étant atteint pour au moins un couple (i, k).

On peut préciser les formules (13) et (13)' dans un cas particulier; de (11), on tire:

$$C_m(x) = \alpha \cdot A\,[C_m(x)] \qquad (11)'$$

d'où il résulte que le système:

$$x_i = \alpha \cdot \sum_k a_{ik}\, x_k \qquad (11)''$$

admet au moins 1 solution non nulle: supposons qu'il n'en admette que r de linéairement distinctes: $x(1), .., x(r)$: nous dirons alors que α est un *pôle de rang fini* r. Plaçons nous dans ce cas.

D'après (11)', on a: $C_m(x) = \sum_{h=1}^{r} x(h)\, \lambda_h(x)$, où $\lambda_h(x)$ est un certain nombre dépendant de x; on en déduit (Goursat, 1, p. 407) que $C_i(x)$ $(i = 1,2, ., m)$ et par suite $C(0)(x)$, sont de la même forme; ainsi

$$C(0)(x) = \sum_{h=1}^{s} x'(h)\, \lambda_h'(x) \qquad (12)$$

où les $x'(h)$ sont des points de D_ω, qu'on peut supposer linéairement distincts, et les $\lambda_h(x)$ des nombres correspondants à x: il en résulte évidemment que l'itération de $C(0)$ se ramène à celle d'une substitution linéaire algébrique finie: problème dont on possède la solution (v. Fréchet, 6).

Pour préciser, remarquons que les $\lambda_h(x)$ satisfont aux conditions:

$$\lambda_h(fx) = f \cdot \lambda_h(x); \quad \lambda_h(x^1 + x^2) = \lambda_h(x^1) + \lambda_h(x^2)$$

et qu'il existe des nombres positifs $\| \lambda_h \|$ tels que l'on ait: $|\lambda_h(x)| \leq \| \lambda_h \| \cdot |x|$. Les $\lambda_h(x)$ sont donc des fonctionnelles linéaires de x, nécessairement de la forme: $\lambda_h(x) = \sum_k \overset{(h)}{\lambda_k} x_k$, avec: $\sum_k |\overset{(h)}{\lambda_k}| < \infty$. On obtient alors, en suivant M. Goursat (Goursat, 1, p. 405) le résultat suivant:

Si le pôle α est d'ordre 1 et de rang r, il existe r systèmes de nombres (φ_i^h) $[h = 1, 2, \ldots, r;\ i = 1, 2, \ldots, \infty]$ et r autres (ψ_k^h) $h = 1, 2, \ldots, r;\ k = 1, 2, \ldots, \infty)$ tels que l'on ait:

$$1^\circ) \quad \varphi_i^h = \alpha \cdot \sum_j a_{ij} \varphi_j^h \quad \text{avec} \quad |\varphi_i^h| \text{ bornée;}$$

$$2^\circ) \quad \psi_k^h = \alpha \cdot \sum_j a_{jk} \psi_j^h \quad \text{avec} \quad \sum_j |\psi_j^h| < \infty;$$

$$3^\circ) \quad \sum_j \varphi_j^{h_1} \psi_j^{h_2} = \begin{matrix} 0 & \text{si} & h_1 \lessgtr h_2 \\ 1 & \text{si} & h_1 = h_2 \end{matrix}$$

$$4^\circ) \quad a_{ik}^n = \left(\frac{1}{\alpha}\right) (\sum_h \varphi_i^h \psi_k^h) \tag{13}$$

Pour un pôle d'ordre supérieur à 1, le résultat est plus compliqué, bien qu'analogue (v. Goursat, 1, p. 411).

PARAGRAPHE 5: DÉFINITION DU RAYON POLAIRE.

Nous appelons *rayon polaire* P de $A(\lambda)$ ou de A, le plus grand des nombres positifs ρ tels que, dans tout domaine complétement intérieur au cerele $|\lambda| \leqq \rho$, $A(\lambda)$ n'ait, pour points singuliers qu'un nombre fini de pôles de rang fini. Nous appelons *cercle polaire* de $A(\lambda)$ ou de A, le cercle $|\lambda| \leqq P$. Il résulte de ce qui précède que:

THÉORÈME $II_{2,1}$: *Etant donnée la substitution* A *de rayon polaire* P, *tant que* $|\lambda| < P$, *on peut appliquer à l'équation.*

$$x - \lambda A(x) = y$$

les théorèmes classiques de Fredholm.

On a évidemment $P \geqq R \geqq \frac{1}{\|A\|}$, R désignant le rayon de convergence de A; étant données 3 substitutions A_1, A_2, A_3, telles que $A_1 = A_2 + A_3$, et que A_2 et A_3 soient orthogonales, et de rayons polaires respectifs P_1, P_2, P_3, P_1 est $\geqq$ au plus petit des 2 nombres P_2 et P_3, l'égalité ayant lieu dès que P_2 et P_3 sont inégaux.

Il résulte des travaux de M. Riesz (F. Riesz, 1) que *toute substitution complétement continue a un rayon polaire infini:* (cela

tient en particulier au fait que les substitutions principales des substitutions complétement continues sont du type (12)).

PARAGRAPHE 6: CALCUL DU RAYON POLAIRE.

L'évaluation du rayon polaire repose sur les 2 théorèmes suivants:

THÉORÈME $III_{2,1}$: *Le rayon polaire de la* n^{ieme} *itérée* A^n *de la substitution* A *est égal à la puissance* n^{ieme} *du* P *rayon polaire de* A.

Soit P le rayon polaire de A, $P(n)$ celui de A^n; soit ϵ un nombre positif (inférieur à P) aussi petit qu'on le veut; soit λ_1, λ_2,..., λ_s les pôles—de rang fini—de A, tels que $|\lambda_j| \leq P - \epsilon$; soient A_1, ., A_j,.. A_s les substitutions principales de A correspondantes; on peut poser:

$$A = \sum_{j=1}^{s} A_j + B = C + B \qquad \text{avec: } C = \sum_{j} A_j \tag{14}$$

Il est clair que B a un rayon de convergence $\geq P - \epsilon$; par conséquent $\| B^{qu} \|$ est bornée supérieurement par une expression de la forme: $\frac{M}{(P-\epsilon)^{qn}}$; par suite le rayon de convergence et a fortiori le rayon polaire P' de B^u est $\geq (P-\epsilon)^u$; d'ailleurs C et B sont orthogonales, et C^n et B^u aussi; or on a: $A^u = C^n + B^n$;

C^n, qui est du type (12), a un rayon polaire infini: on a donc, d'après une remarque précédente: $P(n) \geqq (P-\epsilon)^n$, donc:

$$P(n) \geqq P^n \tag{15}$$

D'autre part, d'après la formule (9), on voit que, tant que $|\lambda|^n < P(n)$, c'est à dire $|\lambda| < \sqrt[n]{P(n)}$, $A(\lambda)$ n'a, comme points singuliers que des pôles, qui sont de rang fini, car les pôles correspondants de A^n le sont, et toute solution non nulle du système

$$x_i - \alpha \cdot \sum_k a_{ik}\, x_k = 0$$

est aussi solution du système

$$x_i - \alpha^n \cdot \sum_k a^n_{ik}\, x_k = 0$$

Donc: $$P \geqq \sqrt[n]{P(n)} \tag{16}$$

La comparaison de (15) et (16) donne: $P^n = P(n)$

Soit maintenant $A^n_{(q)}$ la substitution obtenue en remplaçant, dans le tableau des a^n_{ik}, les éléments des q premières lignes et des q premières colonnes par des zéros. En utilisant une méthode due à Dixon, M. Riesz a démontré un theorème qui peut s'énoncer ainsi (ef. F. Riesz, 2, p. 98–105):

THÉORÈME DE DIXON-RIESZ: Le rayon polaire P de la substitution A est supérieur ou égal à $\frac{1}{\| A^1_{(q)} \|}$ quel que soit q.

Nous verrons au chapitre III comment on peut démontrer simplement ce théorème en s'appuyant sur des travaux ultérieurs de M. Riesz (F. Riesz, 1).

Pour le moment, du théorème $III_{2,1}$ et du théorème de Dixon-Riesz, nous déduisons que:

$$P \geqq \text{borne super. de } \sqrt[n]{\frac{1}{\| A^n_{(q)} \|}} \tag{17}$$

Nous allons préciser (18); soit ρ un nombre positif inférieur à P; soit C la somme des substitutions principales de A relatives aux pôles de $A(\lambda)$ de module inférieur ou égal à ρ. Posons:

$$A = B + C$$

On a: $B \cdot C = C \cdot B = 0$; $A^n = B^n + C^n$; $A^n_{(q)} = B^n_{(q)} + C^n_{(p)}$

D'ailleurs, C^n est de la forme (12) et on en déduit que:

$$\lim_{q \to \infty} \| C^n_{(q)} \| = 0$$

On a d'autre part, quel que soit q, et R étant le rayon de convergence de A: $\| A^n_{(q)} \| > \| A^n_{(q+1)} \|$

$$R = \lim_{n \to \infty} \inf \frac{1}{\sqrt[n]{\| A^n \|}} \leqq \text{borne sup.} \frac{1}{\sqrt[n]{\| A^n \|}} \leqq \text{borne sup.}_n \frac{1}{\sqrt[n]{\| A^n_{(q)} \|}}$$

Soit alors R_B et P_B le rayon de convergence et le rayon polaire de B; on a:

$$P = P_B \geqq R_B > \rho \tag{18}$$

$$R_B \leqq \text{borne sup.} \frac{1}{\sqrt[n]{\| B^n_{(q)} \|}} \tag{19}$$

$$\| A^n_{(q)} \| < \| B^n_{(q)} \| + \| C^n_{(q)} \|$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\| A^n_{(q)} \|}} \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{\| B^n_{(q)} \| + \| C^n_{(q)} \|}}$$

$$\text{borne sup.}_q \frac{1}{\sqrt[n]{\| A^n_{(q)} \|}} = \lim_{q \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\| A^n_{(q)} \|}} \geqq \lim_{q \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\| B^n_{(q)} \| + \| C^n_{(q)} \|}} =$$

$$\lim_{q \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\| B^n_{(q)} \|}}$$

D'où finalement:

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\|B^n_{(q)}\|}} = \text{borne sup.}_{q} \frac{1}{\sqrt[n]{\|B^n_{(q)}\|}}$$

$$\text{borne sup.}_{n,\,q} \frac{1}{\sqrt[n]{\|A^n_{(q)}\|}} \geqq \text{borne sup.}_{n,\,q} \frac{1}{\sqrt[n]{\|B^n_{(q)}\|}}$$

D'où l'on tire:

$$\rho < R_B \leqq \text{borne sup.} \frac{1}{\sqrt[n]{\|A^n_{(q)}\|}}$$

Et comme ρ est aussi voisin qu'on le veut de P, on a:

THÉORÈME $IV_{2,1}$: *Le rayon polaire* P *de la substitution* A *est égal à la borne supérieure, lorsque* n *et* q *varient, de* $\dfrac{1}{\sqrt[n]{\|A^n_{(q)}\|}}$.

On en conclut aisément que:

THÉORÈME $V_{2,1}$: *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution* A *dans* D_ω *ait un rayon polaire supérieur à* 1, *est qu'il existe un rang* ν, *un nombre* $1-\eta$ *inférieur à* $1\,(1>\eta>0)$ *et un entier positif* h, *tels que l'on ait quel que soit* i:

$$\sum_{k=h+1}^{\infty} | a^{\nu}_{ik} | \leqq 1-\eta$$

GÉNÉRALISATION: La plupart des considérations précédentes et en particulier le théorème $IV_{2,1}$ sont valables pour les substitutions linéaires dans les espaces $L^{(p)}$ quelconques [L'espace $L^{(p)}$ est l'espace des points x dont les coordonnées x_i $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$ satisfont à la condition: $\sum_i |x_i|^p < \infty$ si $1 \leq p < \infty$, $|x_i|$ borné si $p = \infty$.

REMARQUE: *Les substitutions complétement continues ont un rayon polaire infini, mais ce ne sont pas les seules.* Soit en effet la substitution A dans D_ω, de coefficients:

$$a_{ik} = \frac{i^2 k}{(i^2 + k^2)^2}$$

A n'est pas complétement continue, car $||A^{\frac{1}{(q)}}||$ ne tend pas vers 0 avec $\frac{1}{q}$, ce qui aurait lieu si A était complétement continue [voir F. Riesz, 2, p. 99]; mais $||A^{\frac{1}{(q)}}||$ tend vers 0 avec $\frac{1}{q}$, de sorte que A^2 est complétement continue [F. Riesz, 2, p. 113] et, d'après le théorème $IV_{2,1}$, le rayon polaire de A est infini.

Chapitre II.

Itération d'une substitution linéaire dans D_ω de rayon polaire supérieur à 1.

Soit A une substitution linéaire dans D_ω; nous allons dans ce chapitre étudier le comportement de A^n et des coefficients a_{jk}^n lorsque n croît indéfiniment.

Soit ρ un nombre positif ρ inférieur au rayon polaire P de A. Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ les pôles, en nombre fini et de rang fini, de $A(\lambda)$ dans le cercle (c): $|\lambda| \leq \rho$; soient m_j l'ordre de λ_j et A_j la substitution principale correspondante; en posant $A = \sum_j A_j + B$, on a; d'après le chapitre précédent:

$$A^n = \sum_j A_j^n + B^n$$

$$A_j^n = \left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^n Q^j(n) \quad \text{avec: degré de } Q^j(n) = m_j - 1;$$

$$\| B^n \| \leq \frac{M}{\rho^n} \quad M \text{ étant un nombre indépendant de } n. \quad (17)$$

donc: $$A^n = \sum_j \left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^n Q^j(n) + B^n \qquad (18)$$

Pour le comportement de la partie $\sum_j \left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^n Q^j(n)$, nous renvoyons à un Mémoire de M. Fréchet [Fréchet, 1] où ce problème est complétement traité. Mais en général on n'est pas suffisamment renseigné sur B^n par l'inégalité (17): le seul cas où elle permet de conclure est celui où P est supérieur à 1: en effet, dans ce cas on peut choisir ρ supérieur à 1, et alors $\| B^n \|$ tend vers 0 au moins aussi vite que $\frac{M}{\rho^n}$; *dans tout ce chapitre nous nous placerons donc dans ce cas.* Nous n'indiquerons pas tous les résultats que l'on peut alors énoncer (voir par analogie Fréchet, 1). Nous préciserons seulement ce qui suit:

Lorsque $\| A^n \|$ reste bornée quand n varie, nous disons, avec M. Fréchet, que l'on est dans le *cas borné;* pour que l'on soit dans le cas borné, il faut et il suffit:

1.°) que les pôles λ_j soient tous de module supérieur ou égal à 1.

2.°) que les pôles de module 1 soient d'ordre 1.

On démontre alors que:

THÉORÈME $I_{2,2}$: Dans le cas borné, les A^n convergent au au sens de Cesarò; si l'on pose: $\pi(n) = \frac{A + A^2 + \ldots + A^n}{n}$ $\pi = \lim_{n \to \infty} \pi(n)$, l'infiniment petit $\| \pi - \pi(n) \|$ reste inférieur à une

quantité de la forme $\frac{M}{n}$ où M est indépendant de n et π n'est autre que la substitution principale de A relative au pôle 1, s'il existe, sans quoi π est identiquement nulle.

THÉORÈME $II_{2,2}$: Pour que les a_{ik}^n restent bornés en module, quels que soient i, k et n, lorsque n varie, il faut et il suffiit que les pôles λ_j soient tous de module égal ou supérieur à 1, et que ceux de module 1 soient d'ordre 1; autrement dit: il faut et il suffit que l'on soit dans le cas borné.

Ainsi, ce qui n'était pas évident: pour que l'on soit dans le cas borné, il faut, nécessairement mais aussi il suffit que les $|a_{ik}^n|$ restent bornés.

THÉORÈME $III_{2,2}$: Dans le cas borné, les a_{ik}^n convergent, uniformément par rapport à i et k, au sens de Cesarò; si l'on pose: $\pi_{i,k}(n) = \dfrac{a_{ik} + a_{ik}^2 + \ldots + a_{ik}^n}{n}$, $\pi_{ik} = \lim\limits_{n \to \infty} \pi_{ik}(n)$, on a: $|\pi_{ik} - \pi_{ik}(n)| < ||\pi - \pi(n)|| < \frac{M}{n}$; si 1 n'est pas pôle de $A(\lambda)$, $\pi_{ik} = 0$; sinon, les π_{ik} sont les coefficients de π et par suite peuvent s'écrire, d'après la formule (13), sous la forme: $\pi_{ik} = \sum\limits_{h=1}^{m} \varphi_i^h \psi_k^h$, m étant d'ordre du pôle 1, les φ_i et les ψ_k satisfaisant aux conditions indiquées page . Par suite les sêries $\sum\limits_k |\pi_{ik}|$ convergent et ont leurs sommes bornées lorsque i varie.

Pour pousser plus loin l'étude du cas borné, nous avons besoin de quelques proprietés, d'ailleurs intéressantes en elles mêmes, des séries $\sum_k |a_{ik}^n|$.

LEMME: Dans le cas borné, quel que soit le nombre positif ϵ, on peut trouver 2 entiers positifs $N(\epsilon)$ et $H(\epsilon)$ tels que pour $n \geqq N(\epsilon)$ et $h \geqq H(\epsilon)$, on ait: $\sum_{k=h}^{\infty} |a_{ik}^n| < \epsilon$ quel que soit i.

Plaçons nous en effet dans le cas borné; soient λ_j les pôles de module 1 de $A(\lambda)$, A_j $(a_{ik,j})$ les substitutions principales correspondantes; Posons $A = \sum_j A_j + B$ avec les relations d'orthogonalité habituelles; on peut trouver un nombre positif $\rho > 1$, tel que l'on ait; $||B^n|| \leqq \frac{M}{\rho^n}$; d'autre part: $a_{ik,j}^n = a_{ik,j} \times \left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^n$, donc:

$$|a_{ik,j}^n| = |a_{ik,j}|$$

$$|\sum_{k=h}^{\infty} |\sum_j a_{ik,j}^n|| \leqq \sum_{k=h} (\sum_j |a_{ik,j}|)$$

Posons: $\sum_j |a_{ik,j}| = \alpha_{ik}$; on a évidemment:

$$\sum_{k=h}^{\infty} |a_{ik}^n| \leqq \sum_{k=h}^{\infty} \alpha_{ik} + \frac{M}{\rho^n} \qquad (19)$$

On peut trouver un entier positif $N(\epsilon)$ tel que pour $n \geqq N(\epsilon)$ on ait:

$$\frac{M}{\rho^n} < \frac{\epsilon}{2} \tag{20}$$

Si l'on tient compte de la forme (13) des $a_{ik,j}$ on voit que l'on peut trouver un entier positif $H(\epsilon)$ tel que pour $h \geqq H(\epsilon)$ on ait, quel que soit i,

$$\sum_{k=\infty}^{\infty} \alpha_{ik} < \frac{\epsilon}{2} \tag{21}$$

(19), (20) et (21) établissent le lemme. On en déduit aisément que:

THÉORÈME $IV_{2,2}$: *Dans le cas borné, quel que soit i fixe, les séries* $\sum_k |a_{ik}^n|$ *convergent uniformément lorsque n varie.*

COROLLAIRE: Dans le cas borné, quel que soit i fixe, les séries $\sum_k |\pi_{ik}(n)|$ convergent uniformément lorsque n varie.

On en déduit aisément que l'on a, dans le cas borné:

$$\pi_{ik} = \sum_j a_{ij}\,\pi_{jk}\,; \qquad \pi_{ik} = \sum_j a_{jk}\,\pi_{ij}\,; \qquad \pi_{ik} = \sum_j \pi_{ij}\,\pi_{jk}\,.$$

et que:

THÉORÈME $V_{2,2}$: Dans le cas borné, pour que les limites au sens de Cesarò, π_{ik} des a_{ik}^n soient indépendantes de i, il faut et il suffit:

ou bien que 1 ne soit pas pôle, et alors $\pi_{ik} = 0$

ou bien que, 1 étant pôle, les 2 conditions suivantes soient réalisées:

a) on a quel que soit i, $\sum_k a_{ik} = 1$

b) le système d'équations:

$x_k = \sum_j a_{jk} x_j$ $(k = 1,2,\cdots,\infty)$; $\sum_k x_k = 1$; avec la condition $\sum_k |x_k| < \infty$

admet une solution et une seule – qui est précisément le système des nombres π_k auxquels se réduisent les π_{ik} indépendants de i.

La démonstration est semblable à celle exposée, pour un problème analogue, par M. Fréchet (Fréchet, 1), compte tenu du théorème $IV_{2,2}$.

Enfin:

THÉORÈME $VI_{2,2}$: Pour que a_{ik}^n converge au sens ordinaire, dans le cas borné, il faut et il suffit que $A(\lambda)$ n'ait pas de pôle de module 1 autre que 1, et alors la convergence est normale par rapport à i et k.

Chapitre III.

Extension des résultats des Chapitres I et II aux opérations linéaires en général.

Soit un espace vectoriel, distancié, complet (B), constitué par des objets quelconques x [voir Fréchet 5, pour la définition et les propriétés de ces espaces]. Soit $\| x \|$ la norme de l'objet x dans (B). Considérons les opérations univoques, distributives et continues U dont le domaine est l'espace (B) et dont le contre-domaine est contenu dans (B); par continuité de U nous entendons qu'il existe un nombre positif M tel que l'on ait, quel que soit x:

$$\| U(x) \| \leq M \cdot \| x \| \qquad (1)$$

Etant donnée alors une opération U, on appelle borne de U et l'on désigne par $\| U \|$ le plus petit nombre M tel que (1) soit satisfaite.

Il est clair que les substitutions linéaires A dans D_ω sont des opérations du type U: aussi peut-on étendre aux opérations U la plupart des résultats des Chapitres I et II précédents.

Une opération U est dite *complétement continue*, si elle transforme l'ensemble des objets x tels que $\| x \| \leq 1$ en un ensemble compact: il est facile de voir que dans le cas des substitutions A, cette définition coïncide avec celle donnée p .

On définit, comme p. , les suites d'opérations $U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}, \ldots$

uniformément convergentes, et on montre exactement comme p. que: la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $U_{(n)}$ converge uniformément vers une limite U est que $\| U_{(n+p)} - U_{(n)} \|$ tende vers 0 avec $\frac{1}{n}$ uniformément par rapport à *p:* on peut alors répéter les théorèmes établis au paragraphe 1 du Chapitre I.

On définit, en désignant par E l'opération identique, la *résolvante* U_λ de U par les conditions:

a) $U_\lambda = 0$ pour $\lambda = 0$

b) $(E - \lambda U)^{-1} = E + \lambda U_\lambda$ pour les valeurs de λ autres que 0 pour lesquelles $(E - \lambda U)^{-1}$ existe.

La résolvante est encore une fonction «*holomorphe* de λ», dans son domaine d'existence; les théorèmes $I_{3,1}$, $II_{3,1}$ subsistent évidemment: de même, la définition des *pôles de rang fini*, et par suite celles du *rayon polaire* et des *opérations principales*. On trouve que l'opération principale $C_0(x)$ relative à un pôle de rang fini est de la forme:

$$C_0(x) = \sum_{h=1}^{s} x(h) \cdot \lambda_h(x) \qquad (2)$$

où les $x(h)$ $(h = 1, .., s)$ sont des objets de (B) et les $\lambda_h(x)$ des fonctionnelles linéaires de x (c'est à dire des opérations distributives continues qui font correspondre à x un nombre, réel ou

complexe). Il est clair que l'étude de toute opération de la forme (2), et en particulier son itération, se ramène à celle d'une substitution linéaire algébrique finie; de plus les opérations complétement continues ont un rayon polaire infini. On trouve alors que:

THÉORÈME $I_{2,3}$: *Etant donnée l'opération U, de rayon polaire P, on peut appliquer à l'équation*

$$x - \lambda U(x) = y \tag{3}$$

les théorèmes classiques de Fredholm, pourvu que $|\lambda| < P$.

THÉORÈME $II_{2,3}$: *Le rayon polaire de la* n^{ieme} *itérée* U^n *de l'opération U est la* n^{ieme} *puissance du rayon polaire de U.*

On définit également le rayon de convergence d'une opération U. Soit $U = U_1 + U_2$, et supposons U complétement continue; soient P_2 et R_2 le rayon polaire et le rayon de convergence de U_2; soit λ tel que

$$|\lambda| \cdot R_2 < 1$$

L'opération $E - \lambda U_2$ admet une réciproque. Posons:

$$(E - \lambda U_2)^{-1} = V_\lambda$$

$$x - \lambda U_2(x) = x' \qquad x = V_\lambda(x')$$

L'équation (3) s'écrit:

$$x' - \lambda U_1 V_\lambda(x') = y \tag{3}'$$

Or l'opération $\lambda U_1 \cdot V\lambda$ est complétement continue, puisque U_1 l'est (3)' est donc facile à étudier; on en déduit que λ ne peut être pour U_λ qu'un point ordinaire ou un pôle de rang fini: et finalement le rayon polaire P de U est $\geqq R_2$.

Mais soit ρ un nombre positif inférieur à P_2, mais aussi voisin de P_2 qu'on le voudra; soit U_2' la somme des opérations principales de U_2 relatives à des pôles de $U_{2\lambda}$ de module $\leqq \rho$; on pourra poser:

$$U = (U_1 + U_2') + (U_2 - U_2')$$

$(U_1 + U_2')$ est complétement continue; le rayon de convergence de $(U_2 - U_2')$ est $\geqq \rho$; donc on aura $P \geqq \rho$ et par suite: $P \geqq P_2$; d'où :

THÉORÈME $III_{2,3}$: *Si* $U = U_1 + U_2$, *si* U_1 *est complétement continue, le rayon polaire de* U *est supérieur ou égal au rayon polaire de* U_2.

Le théorème de Dixon-Riesz (p.) se déduit immédiatement du théorème $III_{2,3}$, en remarquant que $A^1 - A^1_{(q)}$ est complétement continue, et que le rayon polaire de $A^1_{(q)}$ est $\geqq \frac{1}{\|A^1_{(q)}\|}$.

L'itération d'une opération U, de rayon polaire supérieur à 1, s'étudie par les méthodes du chapitre II; on définit le *cas borné*

par le fait que $\| U^n \|$ reste borné lorsque n croît indéfiniment. On trouve alors que:

THÉORÈME $IV_{2,3}$: *Etant donnée une opération U, de rayon polaire supérieur à 1, si l'on est dans le cas borné, la* $n^{\text{ième}}$ *iterée* U^n *de U converge au sens Cesarò, vers une opération limite* π, *de telle sorte que:*

$$\left\| \frac{U + U^2 + U^3 + \ldots + U^n}{n} - \pi \right\| \leq \frac{M}{n}$$

OPÉRATION ASSOCIÉE D'UNE OPÉRATION U: Soit $\overline{B}$ l'espace vectoriel, distancié, complet constitué par les fonctionnelles linéaires $\Psi(x)$ des objets x de B. Soit $\overline{U}$ l'opération linéaire continue qui fait correspondre à toute fonctionnelle Ψ de $\overline{B}$ la fonctionnelle $\Psi[U(x)]$; $\overline{U}$ est dite *l'associée* de U.

On montre sans grandes difficultes que:

THÉORÈME $V_{2,3}$: *Une opération U et son associée* $\overline{U}$ *ont même rayon polaire.*

Chapitre IV.

Application de la théorie du rayon polaire au problème I

Paragraphe 1: Définition du cas quasi-régulier.

Reprenons notre problème I (défini dans l'Introduction et p.); les nombres p_{ik} peuvent être considérés comme les coefficients d'une substitution linéaire P dans l'espace D_ω, substitution dont nous désignerons la résolvante par $P(\lambda)$ et le rayon polaire par P: notre problème I n'est donc pas autre chose que l'étude de l'itération de P: or nous avons appris à traiter ce problème dans le cas où $P > 1$; nous nous placerons donc dans ce cas, que nons appellerons le cas *quasi régulier.*

Il est clair que $\| P^n \| = 1$ quel que soit n; d'ailleurs 1 est toujours un point singulier pour $P(\lambda)$, car le système homogène

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}\, x_k \qquad (i = 1,2,\ldots,\infty) \tag{1}$$

admet toujours au moins 1 solution non nulle: $x_i = 1$ $(i = 1,2,\ldots,\infty)$; le rayon de convergence de P est donc égal à 1, et P est $\geqq 1$. Mais du théorème $V_{2,1}$, on tire immédiatement que la condition nécessaire et suffisante pour que l'on soit dans le cas quasi régulier est qu'il existe un rang ν, un nombre positif η, un entier h tels que l'on ait: $\sum_{k=1}^{h} P^{\nu}_{ik} \geqq \eta > 0$, quel que soit i; autrement dit,

le cas quasi-regulier, est le cas où, parmi l'infinité dénombrable des états possibles E_k $(k = 1, 2, .., \infty)$, *il en existe un nombre fini:* E_{k_1}, E_{k_2}, ..., E_{k_q}, *tels que, quel que soit l'état* E_i *actuellement réalisé, il y ait une probabilité* $\sum_{\alpha=1}^{q} P_{ik_\alpha}^{\nu}$ *supérieure à un nombre positif déterminé* η *de réaliser l'un ou l'autre des états* E_{k_α} *en un nombre fini et déterminé* ν *d'expériences.* Le cas quasi régulier est ainsi caractérisé tant au point de vue de l'analyse qu'au point de vue du calcul des probabilités.

Plaçons nous dans un cas quasi-régulier: il existe au moins un groupe de q indices k, avec un rang ν et un nombre η correspondants, tel que $\sum_{\alpha=1}^{q} P_{ik_\alpha}^{\nu}$ reste supérieur à η lorsque i varie: mais il se peut qu'il existe plusieurs tels groupes, et même une infinité; il y en a en tous cas un ou plusieurs pour les quels q est le plus petit possible; c'est toujours l'un de ceux-ci que nous considérons par la suite, et le nombre q ainsi bien déterminé sera appelé *l'ordre* du cas quasi-régulier considéré; évidemment q, c'est à dire l'ordre, est au moins égal à 1; il est clair que *le cas régulier défini au chapitre I de la section I n'est autre que le cas quasi-régulier d'ordre* 1.

Au point de vue de l'itération de P, puisque $\| P^n \| = 1$, on est dans le cas borné défini au chapitre II de la section II; nous en déduisons immédiatement que:

LEMME 1: Dans le cas quasi-régulier, on peut quel que soit ϵ trouver 2 entiers positifs $N(\epsilon)$ et $H(\epsilon)$ tels que l'on ait, pour $n > N(\epsilon)$, $h > H(\epsilon)$, et quel que soit i: $\sum_{k=h}^{\infty} P_{ik}^{n} < \epsilon$.

Page , nons avons démontré cette propriété pour le cas régulier, par un procédé direct, d'ailleurs applicable aussi au cas quasi-régulier; on remarquera que la propriété exprimée par ce lemme est une condition nécessaire et suffisante pour le cas quasi-régulier.

LEMME 2: *Dans le cas quasi-régulier, les séries* $\sum_k P_{ik}^n$ *convergent uniformément lorque n varie, quel que soit i fixe.*

Posons: $\pi_{ik}^n = \dfrac{\sum_{j=1}^n P_{ik}^j}{n}$; on a, comme corollaire du lemme 2:

LEMME 3: *Les séries* $\sum_k \pi_{ik}^n$, *qui évidemment convergent et ont pour somme* 1, *convergent dans le cas quasi-regulier uniformément lorsque n varie, quel que soit i fixe.*

PARAGRAPHE 2: LES PÔLES DE MODULE 1 DE $P(\lambda)$ DANS LE CAS QUASI-RÉGULIER.

Les méthodes de ce paragraphe sont celles d'un Mémoire de M. Fréchet [Fréchet, 3], convenablement transposées. Dans le cas quasi-régulier, un nombre c, de module 1, est un pôle de rang r de $P(\lambda)$, si l'on peut trouve r, et r seulement, systèmes linéairement distincts de nombres non tous nuls φ_i $(i = 1,2,...\infty)$ satisfaisant aux relations:

$$\varphi_i = c^n . \sum_k P_{ik}^n \varphi_k \qquad (2) \qquad n = 1, 2,.., \infty.$$

et tels que $|\varphi_i|$ reste borné lorsque i varie; nons poserons $\varphi =$

borne sup. $|\varphi_i|$. Soit q l'ordre du cas quasi-régulier considéré.

LEMME 4: $|\varphi_i|$ atteint sa borne supérieure φ pour au moins 1 valeur de i inférieure ou égale à q.

En effet, φ est > 0; soit V l'ensemble des nombres entiers positifs tels que: $|\varphi_i| = \varphi$ si $i \in V$, $|\varphi_i| < \varphi$ si $i \in U - V$, U désignant l'ensemble de tous les entiers positifs. Il s'agit de montrer que V contient l'un au moins des nombres $1, 2, \ldots, q$.

Soit ϵ et ϵ' deux nombres positifs arbitrairement choisis parmi ceux pour lesquels $\epsilon < \varphi$, $\epsilon' < \eta$; soit $V(\epsilon)$ l'ensemble des entiers positifs i' pour lesquels on a: $|\varphi_{i'}| > \varphi - \epsilon$; $V(\epsilon)$ n'est pas vide, et il existe au moins 1 indice i_o pour lequel on a:

$$\varphi - |\varphi_{i_o}| < \epsilon\,\epsilon'$$

Et comme on a: $\varphi_i = c^{\nu} \cdot \sum_k P_{ik}^{\nu} \varphi_k$, on peut écrire:

$$|\varphi_i| \leq \sum_{k \in V(\epsilon)} P_{ik}^{\nu} \cdot \varphi + \sum_{k \in U-V(\epsilon)} P_{ik}^{\nu} \cdot (\varphi - \epsilon) = \varphi - \epsilon \cdot \sum_{k \in U-V(\epsilon)} P_{ik}^{\nu}$$

Ce qui donne, pour $i = i_o$:

$$\sum_{k \in U-V(\epsilon)} P_{i_o k}^{\nu} \leq \epsilon' \quad \text{ou:} \quad 1 - \epsilon' \leq \sum_{k \in V(\epsilon)} P_{i_o k}^{\nu} \tag{3}$$

Mais on a par hypothèse:

$$\sum_{k>q} P^{\nu}_{i_0 k} \leq 1 - \eta \qquad (4)$$

Comme $\epsilon' < \eta$, la comparaison de (3) et (4) indique que $V(\epsilon)$ contient au moins l'un des entiers $1, 2, \ldots q$; prenons $\epsilon = \frac{\varphi}{n}$; on a: $V\left(\frac{\varphi}{n}\right) \subset V\left(\frac{\varphi}{n-1}\right)$, et $V = \lim_{n \to \infty} V\left(\frac{\varphi}{n}\right)$; ou encore: V est la partie commune à tous les $V\left(\frac{\varphi}{n}\right)$; il en résulte évidemment que V contient l'un au moins des entiers $1, 2, \ldots, q$.

LEMME 5: *Dans le cas quasi régulier, tout pôle c de module 1 de* $P(\lambda)$ *est racine de l'unité.*

Soit α_0 un entier $< q + 1$, appartenant à V; on a: $|\varphi'_{\alpha_0}| = \varphi > 0$; or: $\varphi_{\alpha_0} = c^{\nu} \cdot \sum_k P^{\nu}_{\alpha_0 k} \varphi_k$

et puisque:

$$1 = \sum_k P^{\nu}_{\alpha_0 k}$$

on a:

$$\sum_k P^{\nu}_{\alpha_0 k} \left[1 - c^{\nu} \cdot \frac{\varphi_k}{\varphi_{\alpha_0}}\right] = 0 \qquad (5)$$

Posons:

$$a_k + i\, b_k = c^{\nu} \cdot \frac{G_k}{\varphi_{a_o}}$$

On a:

$$a_k^2 + b_k^2 = \left| c^{\nu} \cdot \frac{\varphi_k}{\varphi_{a_o}} \right| = \frac{|\varphi_k|^2}{\varphi^2} \leq 1$$

$$1 - a_k \geq 0 \qquad (6)$$

Mais de (5), on tire:

$$0 = \sum_k P^{\nu}_{a_o k} \; (1 - a_k)$$

Donc $a_k = 1$, pour toutes les valeurs de k telles que $P^{\nu}_{a_o k}$ soit > 0, ce qui a nécessairement lieu pour une valeur α, inférieure à $q + 1$, d'après:

$$\sum_{k=1}^{q} P^{\nu}_{a_o k} > \eta > 0$$

Mais $a_{a_1} = 1$ entraîne $b_{a_1} = 0$, d'où: $\varphi_{a_1} = \frac{1}{c^{\nu}} \cdot \varphi_{a_o}$, $|\varphi_{a_1}| = \varphi$; on peut alors raisonner sur α_1 comme sur α_o; on peut ainsi déterminer de proche en proche une suite indéfinie d'entiers α_o, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \ldots$ tels que l'on ait, quels que soient h et s:

$$\begin{cases} 1 \leqq \alpha_s \leqq q & (7) \\ \varphi_{\alpha_{s+h}} = \dfrac{1}{c^{\nu \cdot h}} \cdot \varphi_{\alpha_s} & (8) \end{cases}$$

Donc, dans toute suite de $(q+1)$ nombres α consécutifs: α_s, $\alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_{s+q}$, il y en a au moins 2 d'égaux, soient α_t et α_u, avec $0 < u-t \leqq q$; et l'on a d'après (8):

$$\varphi_{\alpha_u} = \frac{\varphi_{\alpha_t}}{c^{\nu(u-t)}} = \frac{\varphi_{\alpha_u}}{c^{\nu(u-t)}}$$

$$c^{\nu(u-t)} = 1 \qquad (9)$$

ce qui établit le lemme 5.

Comme on a: $0 < u-t \leqq q$, on pourrait en fonction de α et q donner une limite supérieure du nombre des pôles de module 1 de $P(\lambda)$; voici a ce sujet un résultat intéressant:

LEEME 6: Dans le cas quasi-régulier d'ordre 1, c'est à dire régulier, $P(\lambda)$ n'admet que 1 comme pôle de module 1.

En effet, puisque $q = 1$, $\alpha_s = 1$ quel que soit s; et, quels que soient s et h, on a:

$$\varphi_1 = \varphi_{\alpha_{s+h}} = \varphi_{\alpha_s} \quad \text{avec:} \quad \varphi_{\alpha_{s+h}} = \frac{1}{c^{\nu \cdot h}} \cdot \varphi_{\alpha_s}$$

c satisfait donc à l'équation $x^{\nu \cdot h} = 1$ quel que soit h, ce qui ne peut avoir lieu que si $c = 1$.

D'autre part, à l'aide des lemmes 4 et 5, on étend facilement au problème actuel des démonstrations de M. Fréchet [Fréchet, 3, p. 75 à 79] relatives a un autre problème de probabilités en chaîne. On trouve ainsi:

PROPRIÉTÉ 1: marquons sur le plan complexe les images des quantités φ_i, pour $i \in V$; soit A l'ensemble de ces images; A est constitué par un nombre fini de points; q au plus.

PROPRIÉTÉ 2: Posons $c = e^{i\Psi}$, avec $\Psi \lesseqgtr 0$, c'est à dire qu'il ne s'agit pas du pôle 1; A est invariant par une rotation d'angle Ψ. On en déduit que A est constitué par les sommets d'un polygône régulier de j côtés, j étant au plus égal à q; et que, γ_0 désignant le plus petit degré des équations binômes dont c est racine, on a $\gamma_0 \leq j \leq q$; enfin, qu'il existe un entier N, au plus égal à $q!$, tel que tous les pôles de module 1 de $P(\lambda)$ soient racines de l'équation $x^N = 1$.

PROPRIÉTÉ 3: Soit z un point de A, et z son affixe, soit $V(z)$ la partie de V, telle que $\varphi_i = z$ pour $i \in V(z)$; si $i \in V(z)$, p_{ik} ne peut être > 0 que si $k \in V\left(\frac{z}{c}\right)$.

PARAGRAPHE 3: REMARQUES SUR LE RANG DU PÔLE 1 DE $P(\lambda)$ DANS LE CAS QUASI-RÉGULIER.

Examinons particulièrement le pôle 1 de $P(\lambda)$ au point de vue de son rang; supposons ce rang supérieur à 1; on a; en con-

servant les notations du paragraphe précédent, mais où l'on suppose $c = 1$, $\varphi = 1$, et pour $i \in V$:

$$\begin{cases} 1 = \sum_k p_{ik} & \text{d'où:} \quad 1 = \sum_k p_{ik} \geqq \sum_k p_{ik} \, |\varphi_k| \\ \varphi_i = \sum_k p_{ik} \, \varphi_k & \text{d'où:} \quad 1 = |\varphi_i| = |\sum_k p_{ik} \, \varphi_k| \leqq \sum_k p_{ik} \, |\varphi_k| \end{cases}$$

donc : $\Sigma \, p_{ik} \, |\varphi_k| = 1$; par suite :

$$\sum_{k \in V}^{k} p_{ik} = 1 \quad \text{pour} \quad i \in V \ (10); \quad p_{ik} = 0 \quad \text{pour} \quad i \in V, \ k \in U - V \ (11)$$

On en déduit que :

$$\sum_{k \in V}^{\nu} P_{ik} = 1 \qquad \text{si} \quad i \in V \tag{12}$$

Par suite, en désignant par Q l'ensemble des entiers : $1, 2, .., q$, le produit V·Q, qui n'est pas vide, est tel que :

$$\sum_{k \in V \cdot Q}^{\nu} P_{ik} > \eta \qquad \text{si} \quad i \in V \tag{13}$$

D'ailleurs V·Q comprend au plus $q - 1$ éléments; en effet, les équations :

$$x_i - \sum_{k \in U-V}^{\nu} P_{ik} \cdot x_k = \sum_{k \in V}^{\nu} P_{ik} \qquad (i \in U - V)$$

le pôle 1 n'étant pas de rang 1, admettent outre la solution $x_i = 1$, une autre solution $x_i = \varphi_i$ $(i \in U-V)$; donc, la substitution A, de coefficients $a_{ik} = P^{\nu}_{ik}$ pour $i \in U\text{-}V$, $k \in U\text{-}V$, $a_{ik} = 0$ dans les autres cas, est telle que la substitution $E-A$ n'admette pas de réciproque; donc: $\| A \| \geqq 1$; or si $V \cdot Q = Q$, on aurait: $\sum_{k \in U-V} P^{\nu}_{ik} < 1-\eta$, ce qui entraînerait: $\| A \| < 1$.

Mais alors, si l'on se place dans le cas régulier, $q=1$, V devrait être vide, ce qui est impossible et nous fait conclure que:

Lemme 7: Dans le cas régulier—ou quasi-régulier d'ordre 1,—le pôle 1 est de rang 1. Plaçons nous donc dans le cas où, le rang du pôle 1 étant supérieur à 1, l'ordre q est également > 1. Du groupe G de tous les états E_k, extrayons le groupe G^1 des états E_k pour lesquels $k \in V$; d'après (10), (11) et (13), on voit que:

A] Si une expérience réalise l'un des états de G^1, les expériences suivantes ne pourront réaliser que des états de G^1: on peut donc étudier à part le comportement des probabilités P^{n}_{ik} où $i \in V$, $k \in V$; elles ne dépendent que des p_{ik} pour lesquelles $i \in V$ $k \in V$.

B] relativement à G^1 on est dans un cas quasi-régulier d'ordre $q-1$ au plus, [G^1 peut ne compter qu'un nombre fini d'états; on est alors ramené à un problème de probabilités en chaîne pour un nombre fini d'états possibles, problème qui peut toujours être considéré comme un cas particulier du problème I, et auquel on

peut étendre la définition du cas quasi-régulier: il est à noter alors que la quasi-régularité est toujours réalisée].

Ceci étant pour G^1, ou bien le pôle 1 est de rang 1, ou bien non: dans ce dernier cas on raisonne sur G^1 comme on a raisonné sur G; et on détermine ainsi des groupes successifs $G^1, G^2, \ldots$ non vides, et quasi-réguliers d'ordres décroissants: on aboutira donc en $q-1$ opérations au plus à un groupe pour lequel le pôle 1 sera de rang 1.

LEMME 8: dans le cas quasi-régulier, on peut toujours déterminer un groupe non vide, H d'états E_k jouissant des propriétés A et B et pour lequel le pôle 1 soit de rang 1.

Avec M. Hostinsky, appelons cas (H) le cas où il existe un rang μ tel que dans le tableau des P_{ik}^{μ}, les éléments de la diagonale principale et des 2 diagonales adjacentes soient tous positifs, d'où il résulte que quel que soient i et k, on peut trouver un entier positif n tel que P_{ik}^{n} soit > 0; dans le cas où il n'y a qu'un nombre fini d'états possibles on en déduit qu'on est dans un cas positivement régulier; il n'en est pas de même ici.

Soit un cas (H); soit λ un nombre complexe de module 1, tel que le système d'équations dans D_ω :

$$x_i = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}\, x_k \qquad (14)$$

admette au moins 1 solution non nulle; nous disons que le cas (H) considéré est simple pour λ, si parmi les diverses solutions

de (14), il y en a au moins une, $x_i = \varphi_i$, telle que $|\varphi_i|$ atteigne sa borne supérieure φ pour au moins une valeur finie de i. Plaçons nous dans cette hypothèse, supposons $q=1$, et soit V l'ensemble d'entiers positifs qui est tel que:

$$|\varphi_i| = 1 \quad \text{si} \quad i \in V ; \quad |\varphi_i| < 1 \quad \text{si} \quad i \in U-V ;$$

On a, pour $i \in V$ et quel que soit n:

$$\begin{cases} 1 = \sum_k P_{ik}^n \\ \varphi_i = \lambda^n \cdot \sum_k P_{ik}^n \cdot \varphi_k \end{cases} \quad \text{d'où l'on déduit que} \quad \begin{cases} 1 = \sum_k P_{ik}^n \geq \sum_k P_{ik}^n |\varphi_k| \\ 1 = |\varphi_i| = |\sum_k P_{ik}^n \varphi_k| \leq \sum_k P_{ik}^n |\varphi_k| \end{cases}$$

Il en résulte que, pour $i \in V$ et quel que soit n:

$$\begin{cases} 1 = \sum_k P_{ik}^n |\varphi_k| = |\sum_k P_{ik}^n \varphi_k| \\ 1 = \sum_k P_{ik}^n \qquad = \sum_k P_{ik}^n |\varphi_k| \end{cases}$$

Ceci exige que l'on ait, quel que soit n, pour $i \in V$ et $k \in U-V$:

$$P_{ik}^n = 0 .$$

Mais, quels que soient i et k, on peut choisir n de telle façon que l'on ait: $P_{ik}^n > 0$: d'où une contradiction, qui nous oblige à admettre que $V = U$; D'autre part, l'inégalité: $\sum_k P_{ik}^n |\varphi_k| = |\sum_k P_{ik}^n \varphi_k|$ exige que $\varphi_k = |\varphi_k| e^{i\theta}$, avec θ indépendant de k,

pour toutes les valeurs de k telles que P_{ik}^n soit non nul (toujours sous la condition $i \in V$); or le fait que l'on est dans un cas (H) entraîne que, pour une valeur donnée de l'indice i, et quel que soit h, on peut trouver un rang n tel que tous les P_{ik}^n soient positifs pour $k \leqq h$; on a donc: $\varphi_k = |\varphi_k| e^{i\theta} = e^{i\theta}$, quel que soit k; on peut d'ailleurs supposer $\theta = 0$; on tire alors de (14) que l'on a, quel que soit n:

$$1 = \lambda^n \cdot \sum_k P_{ik}^n$$

De sorte que λ est nécessairement égal à 1.

On déduit aisément de ces proprietés, en les rapprochant des résultats du paragraphe 5, que :

THÉORÈME: Si l'on est à la fois dans un cas quasi-régulier, et dans un cas (H), on est sûrement dans le cas régulier.

PARAGRAPHE 4: COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES P_{ik}^n DANS LE CAS QUASI-RÉGULIER.

Soient $c_1, c_2, \ldots, c_l$ les pôles de module 1, autres que 1, de $P(\lambda)$ dans le cas quasi-régulier; soit r un nombre positif inférieur à 1, supérieur à $\frac{1}{P}$, et tel que $P(\lambda)$ n'ait pas de pôle dans la couronne:

$$1 < |\lambda| \leqq \frac{1}{r}$$

Les résultats du chapitre II de la section 3 nous indiquent qu'il existe des nombres $\rho_{ik}^{(n)}$ bornés en module par un nombre déterminé M, et des nombres π_{ik}, α_{ik}^{j}, tels que l'on ait:

$$P_{ik}^{n} = \pi_{ik} + \sum_{j=1}^{l} \alpha_{ik}^{j} \times \frac{1}{c_j^n} + \rho_{ik}^{(n)} \cdot r^n \qquad (15)$$

π_{ik}, α_{ik}^{j}, $\rho_{ik}^{(n)}$ sont tels, en outre, que les séries $\sum_k \pi_{ik}$, $\sum_k \alpha_{ik}^{j}$, $\sum \rho_{ik}^{(n)}$ convergent absolument, et uniformément lorque n varie en ce qui concerne $\sum_k \rho_{ik}^{(n)}$.

Plus généralement, soit W un sous-ensemble quelconque de de l'ensemble U de tous les entiers positifs; posons: $P_{iw}^{n} = \sum_{k \in W} P_{ik}^{n}$; $\pi_{i,w} = \sum_{k \in W} \pi_{ik}$, $\alpha_{i,w}^{j} = \sum_{k \in W} \alpha_{ik}^{j}$, $f_{i,w}^{(n)} = \sum_{k \in W} \rho_{ik}^{(n)}$; on peut supposer encore: $| \rho_{i,w}^{(n)} | < M$; on a alors:

$$P_{i,w}^{n} = \pi_{i,w} + \sum_{j=1}^{l} \alpha_{i,w} \times \frac{1}{c_j^n} + \rho_{i,w}^{(n)} \cdot r^n \qquad (15)'$$

Les c_j étant racines de l'unité, on tire de (15) et (15)' que:

THÉORÈME $I_{2,4}$: *Dans le cas quasi-régulier les* $P_{i,w}^{n}$, *et en particulier les* P_{ik}^{n} *sont des fonctions asymptotiquement périodiques de* n.

THÉORÈME $II_{2,4}$: *Dans le cas quasi-régulier, les* $P_{i,w}^{n}$ *et en particulier les* P_{ik}^{n} *convergent, au sens de Cesarò, et normalement,*

vers des limites $\pi_{i,w}$ *ou* π_{ik} ; *et on peut déterminer un nombre* N *tel que l'on ait, en posant* $\pi_{ik}^{n} = \dfrac{P_{ik}^{1} + P_{ik}^{2} + \ldots + P_{ik}^{n}}{n}$,

$$| \pi_{ik}^{n} - \pi_{ik} | \leq \frac{N}{n}$$

Les π_{ik} *sont positifs ou nuls, et l'on a:* $\sum_{k} \pi_{ik} = 1$.

Si l'on fait $w = u$ dans (15)' on trouve:

$$1 = 1 + \sum_{j=1}^{l} \overset{j}{\alpha}_{i,u} \times \frac{1}{c_j^n} + \overset{(n)}{\rho}_{i,u} \cdot r^n$$

D'où l'on déduit:

$$\overset{j}{\alpha}_{i,u} = \sum_{k} \overset{j}{\alpha}_{ik} = 0 \qquad (16) \qquad\qquad \overset{(n)}{\rho}_{i,u} = \sum_{k} \overset{(n)}{\rho}_{i+k} = 0 \qquad (17)$$

THÉORÈME $III_{2,4}$: *Si le pôle 1 de* $P(\lambda)$ *est de rang 1, et dans ce cas seulement, les limites* π_{ik} *sont indépendantes de i et se réduisent à des nombres* π_k, *qui satisfont quel que soit* μ, *en posant* $x_k = \pi_k$, *au système d'équations* $S(\mu)$:

$$S(\mu) \begin{cases} x_k = \sum_{j} \overset{\mu}{P}_{jk}\, x_y \\ \sum_{k} x_k = 1 \qquad \text{avec la condition } \sum_{k} |x_k| < \infty \end{cases}$$

et constituent d'ailleurs sa seule solution.

THÉORÈME IV_{24}: *Si le pôle 1 de* $P(\lambda)$ *n'est pas de rang 1 on peut en tous cas déterminer un ensemble non vide* W *d'entiers positif, tel que pour* $i \notin W$, $k \notin W$, *les* π_{ik} *soient indépendants de* i

Ce théorème résulte immediatement du lemme 8 précédent.

THÉORÈME $V_{2,4}$: Si $P(\lambda)$ *n'admet pas de pôle de module 1 autre que 1, les* P^n_{ik} *convergent, au sens ordinaire et normalement, vers les limites* π_{ik}.

PARAGRAPHE 5: CAS PARTICULIER DU CAS RÉGULIER OU QUASI-RÉGULIER D'ORDRE 1

Il est clair que, dans le cas régulier, le pôle 1 est de rang 1 et que $P(\lambda)$ n'admet pas de pôle de module 1 autre que 1; il est facile de voir également que si $P(\lambda)$ n'admet pas de pôle de module 1 autre que 1, et si le pôle 1 est de rang 1, on est dans le cas régulier; les formules (15) et (15)' deviennent alors:

$$P^n_{ik} = \bar{P}_k + \overset{(n)}{\rho_{ik}} \cdot r^n \qquad \text{avec} \quad |\rho_{ik}| < M \qquad (18)$$

$$P^n_{i,w} = \bar{P} + \overset{(n)}{\rho_{i,w}} \cdot r^n \qquad \text{avec} \quad |\overset{(n)}{\rho_{i,w}}| < M \qquad (18)'$$

On retrouve ainsi toutes les propriétés obtenues directement au chapitre I de la section 1; les quantités que nous avons alors appelées s_{ik} sont:

$$s_{ik} = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{(n)}{\rho_{ik}} \cdot r^n \qquad (19)$$

On en déduit que les séries $\sum_k s_{ik}$ convergent absolument, car on a:

$$\sum_{k=1}^{h} | s_{ik} | \leq \sum_{k=1}^{h} \left(\sum_n | \rho_{ik}^{(n)} | r^n \right) = \sum_n \left(\sum_{k=1}^{h} | \rho_{ik}^{(n)} | \right) \cdot r^n < M \cdot \frac{r}{1-r}$$

Et si l'on pose: $S_i = \sum_k s_{ik}$, on peut déterminer $H(\epsilon)$ de telle façon que l'on ait:

$$| s_i - \sum_{k=1}^{h} s_{ik} | < \epsilon \qquad | \sum_{k=1}^{h} \rho_{ik}^{(n)} | < \epsilon \qquad \text{pour} \quad h > H(\epsilon)$$

puisque $\sum_k \rho_{ik}^{(n)} = 0$ d'après (17), et que, pour i fixe d'après le théorème $IV_{2,2}$, les séries $\sum_k | \rho_{ik}^{(n)} |$ convergent uniformément lorsque n varie; alors:

$$| \sum_{k=1}^{h} s_{ik} | = | \sum_n \left(\sum_{k=1}^{h} \rho_{ik}^{(n)} \right) r^n | \leq \sum_n | \sum_{k=1}^{h} \rho_{ik}^{(n)} | \cdot r < \epsilon \cdot \frac{r}{1-r} \text{ pour } h > H(\epsilon)$$

On en tire que:

$$\sum_k s_{ik} = 0 \qquad (20)$$

On démontre de même que l'on a:

$$s_{ik} = \sum_j s_{ij} \, p_{jk} + (p_{ik} - \pi_k) \qquad (21) \qquad (i, k = 1,2,\ldots, \infty)$$

(20 et (21) généralisent certains résultats de M. Fréchet (Fréchet, 2, p. 14).

REMARQUE: Dans le cas régulier, la méthode de Markoff nous a montré qu'on pouvait trouver un nombre positif a, tel que l'on ait quel que soient i, k et n :

$$| P_{ik}^{n} - \overline{P} | \leqq a \, (\sqrt[\nu]{1-\eta})^{n}$$

Si l'on rapproche ce résultat de notre théorie actuelle, il signifie que $P(\lambda)$ n'a pas de pôles dans la couronne : $1 < |\lambda| < \frac{1}{\sqrt[\nu]{1-\eta}}$

Chapitre V

ITÉRATION D'UNE CLASSE PARTICULIÈRE DE SUBSTITUTIONS : LES SUBSTITUTIONS HOMOGÈNES FINIES, DE RAYON POLAIRE QUELCONQUE.

PARAGRAPHE 1: PROBLÈME RELATIF AUX FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

Soit $y = f(x)$ l'une des déterminations, holomorphe à l'origine, d'une fonction algébrique de la variable complexe x; au voisinage de l'origine, y admet un développement en série de Taylor de la forme :

$$y = g_0 + g_1 x + \ldots + g_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

Nous nous proposons de fournir une expression approchée de g_n *pour les grandes valeurs de* n, *connaissant les points singuliers de* y. y ne peut avoir qu'un nombre fini de points singuliers; soit ρ l'un d'eux; au voisinage de ρ, y admet un développement de la forme :

$$y = \left[\frac{\alpha_1}{\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\frac{1}{\Psi}}} + \frac{\alpha_2}{\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\frac{2}{\Psi}}} + \ldots + \frac{\alpha_\varphi}{\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\frac{\varphi}{\Psi}}} \right] +$$

$$+ \left[\beta_0 + \beta_1 \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\frac{1}{\Psi}} + \ldots + \beta_n \left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^{\frac{n}{\Psi}} + \ldots \right] \qquad (2)$$

Ψ est un entier supérieur ou égal à 1; $\left(1-\frac{x}{\rho}\right)^{\frac{1}{\Psi}}$ représente une détermination bien déterminée de la racine $\Psi^{\text{ième}}$ de $\left(1-\frac{x}{\rho}\right)$; la partie du développement (2) située dans le 1er. crochet constitue ce que nous appellerons *la partie principale de y relative à* ρ; 2 cas sont à envisager:

1.°) Cette partie principale n'est pas identiquement nulle; ρ est alors un point singulier polaire pour y (si $\Psi = 1$, c'est un pôle ordinaire); φ est égal ou supérieur à 1; α_φ est non nul par hypothèse. Nous dirons que $\frac{\varphi}{\Psi}$ est l'ordre de y relatif à ρ.

2.°) La partie principale est identiquement nulle: ρ est alors un point singulier simple; il faut supposer $\Psi > 1$, sans quoi ρ ne serait pas singulier du tout. Nous appellerons alors ordre de y relatif à ρ le nombre $-\frac{\varphi'}{\Psi}$, où φ' représente le plus petit entier positif tel que $\beta_{\varphi'}$ soit non nul et $\frac{\varphi'}{\Psi}$ non entier.

Ainsi, nous avons défini dans tous les cas *l'ordre de y relatif à* ρ: nous le désignerons par la lettre θ et nous l'appellerons simplement l'ordre θ de ρ. Remarquons qu'on ne modifie pas l'ordre de y relatif à ρ en lui ajoutant une fonction régulière en ρ.

Traitons d'abord un cas particulier simple:

CAS PARTICULIER : Suposons que $y = (1-x)^{\alpha}$ où α est reel et rationnel; y n'a évidemment qu'un seul point singulier: $x=1$, d'ordre $-\alpha$, si toute fois α n'est pas un entier positif. Posons:

$$(1-x)^{\alpha} = \sum_{n} G_n(\alpha)\, x^n .$$

Si α est entier positif, $G_n(\alpha)$ est nul à partir d'une certaine valeur de n. Plaçons nous dans le cas où α n'est pas un entier positif; on sait que :

$$G_n(\alpha) = (-1)^n \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,\ldots\,(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{-\alpha(-\alpha+1)\ldots(-\alpha+n-1)}{n!} =$$

$$= \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\,\Gamma(n+1)} \qquad (3)$$

Or, rappelons la formule de Stirling, valable pour $z > 0$:

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi}\, z^{z+\frac{1}{2}}\, e^{-z+\tau}$$

où τ tend vers zero avec $\frac{1}{z}$; il vient, d'après cette formule :

$$G_n(\alpha) = \frac{(n-\alpha-1)^{n-\alpha-\frac{1}{2}}\, e^{-n+\alpha+1+\tau_1}}{\Gamma(-\alpha)\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n+\tau_2}}$$

$$= \frac{e^{\alpha+1}}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \left(1 - \frac{\alpha+1}{n}\right)^{n-\alpha-\frac{1}{2}} e^{\tau_1 - \tau_2}$$

où τ_1 et τ_2 tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$; lorsque n croît indéfiniment, $\left(1 - \frac{\alpha+1}{n}\right)^{n-\alpha-\frac{1}{2}}$ tend vers $e^{-(\alpha+1)}$; on peut donc écrire:

$$G_n(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \times \frac{1}{n^{1+\alpha}} (1 + \epsilon_n) \qquad (4)$$

où ϵ_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Etant donné d'ailleurs que $\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}$ est nul si α est entier positif, la formule (4) reste valable même dans ce cas, tout au moins pour les valeurs suffisamment grandes de n.

Cas général: Envisageons maintenant le cas général. Soit R le module de ceux des points singuliers de y qui ont le plus petit module. Supposons d'abord que y n'admette, sur le cercle $|x| = R$, que des points singuliers simples, ρ_1 et ρ_2 par exemple, d'ordre θ_1 et θ_2; h désignant un entier positif, y admet, au voisinage de ρ_1, un développement de la forme suivante:

$$y = \sum_{j=0}^{\varphi_1'-1} \beta_j^1 \left(1-\frac{x}{\rho_1}\right)^{\frac{j}{\Psi_1}} + \sum_{j=\varphi_1'}^{\varphi_1+h\Psi_1} \beta_j^1 \left(1-\frac{x}{\rho_1}\right)^{\frac{j}{\Psi_1}} + \sum_{j>\varphi_1'+h\Psi_1} \left(1-\frac{x}{\rho_1}\right)^{\frac{j}{\Psi_1}} \quad (5)$$

avec $\theta_1 = -\frac{\varphi_1'}{\Psi_1}$, $\theta_2 = -\frac{\varphi_2'}{\Psi_2}$, conformément aux notations de la page précédente. $y = S_1 + Y_1 + Y$

en désignant respectivement par S_1, Y_1, Y les 3 sommes qui figurent au second membre de (5). Y est une fonction algébrique régulière à l'intérieur du cercle $|x| = R$ et qui sur ce cercle admet comme points singuliers peut-être ρ_1 (avec un ordre certainement inférieur ou au plus égal à $\theta_1 - h$) et sûrement ρ_2, avec précisément l'ordre θ_2 ; ainsi, au voisinage de ρ_2, Y admet un développement de la forme:

$$Y = \sum_{j=0}^{\varphi_2'-1} \beta_j^2 \left(1-\frac{x}{\rho_2}\right)^{\frac{j}{\Psi_2}} + \sum_{j=\varphi_2'}^{\varphi_2'+h\Psi_2} \beta_j^2 \left(1-\frac{x}{\rho_2}\right)^{\frac{j}{\Psi_2}} + \sum_{j>\varphi_2'+h\Psi_2} \beta_j^2 \left(1-\frac{x}{\rho_2}\right)^{\frac{j}{\Psi_2}} \quad (6)$$

$$= S_2 + Y_2 + Z$$

en désignant par S_2, Y_2, Z les 3 sommes que figurent dans le 2.° membre de (6). Y_1, Y_2, Z admettent, au voisinage de l'origine des développements de la forme:

$$Y_1 = \sum_n g_n^1 x^n ; \quad Y_2 = \sum_n g_n^2 x^n ; \quad Z = \sum_n h_n x^n$$

D'après notre définition de l'ordre, S_1 et S_2 sont des polynômes; on a donc, à partir d'une certaine valeur de n:

$$g_n = g_n^1 + g_n^2 + h_n$$

On a évidemment, d'après (4) et la valeur de Y_1 :

$$g_n^1 = \frac{1}{\rho_1^n} \sum_{j=\varphi_1'}^{\varphi_1'+h\Psi_1} {}^1\beta_j \times \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{j}{\Psi_1}\right)} \times \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\Psi_1}}} (1 + \epsilon_n^{(j)})$$

où ${}^1\beta_{\varphi_1'}$ est différent de 0, les $\epsilon_n^{(j)}$ tendant vers 0 avec $\frac{1}{n}$; on peut donc écrire, en prenant seulement la partie principale de g_n^1, et en posant $c_1 = \frac{{}^1\beta_{\varphi_1'}}{\Gamma(0_1)} \lessgtr 0$:

$$g_1^n = \frac{c_1}{\rho_1^n} n^{0_1 - 1} (1 + \epsilon_n^1) \qquad \epsilon_n^1 \text{ tendant vers } 0 \qquad (7)$$

$$g_n^2 = \frac{c_2}{\rho_2^n} n^{0_2 - 1} (1 + \epsilon_n^2) \qquad \epsilon_n^2 \text{ tendant vers } 0 \qquad (8)$$

Considérons d'autre part la fonction Z, qui est évidemment une détermination de fonction algébrique; à l'intérieur du cercle $|x| = R$, elle est régulière; sur ce cercle, elle est finie et continue; elle est même uniforme si l'on fait la convention suivante: Z a comme y, une valeur bien déterminée à l'origine; attribuons à Z sur le cercle $|x| = R$ les valeurs que l'on obtient pour cette fonction lorsque, partant de l'origine, on atteint ce cercle par un chemin qui n'a préalablement ni touché ni franchi ce cercle. Alors la fonction de ω: $\bar{Z}(\omega) = Z(Re^{i\omega})$ uniforme, finie, continue, et périodique de période 2π, admet un développement en série trigonométrique qui n'est autre que:

$$\bar{Z}(\omega) = Z(Re^{i\omega}) = \sum_{n} R^n h_n \quad (\cos n\omega + i \sin n\omega)$$

d'après des propriétés bien connues. Mais d'autre part, d'après la façon même dont on a obtenu Z, $\bar{Z}(\omega)$ est pourvu de h dérivées successives d'ordre $1, 2, \ldots, h$, toutes uniformes, continues et finies: il en résulte, d'après un théorème dû à Darboux (Darboux, 1, p. 10) que la quantité $n^{h+1} R^n h_n$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$; on peut donc poser: $h_n = \frac{1}{R^n} n^{-h-1} \epsilon_n^3$, où ϵ_n^3 tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$; et si l'on a pris h supérieur à $-\theta_1$ par exemple on peut poser:

$$h_n = \frac{c_1}{\rho_1^n}\, n^{\theta_1 - 1}\, \epsilon_n^4 \qquad (9)$$

En vertu de (7), (8), et (9) on peut écrire, en modifiant l'expression de ϵ_n^1 :

$$g_n = \frac{c_1}{\rho_1^n}\, n^{\theta_1 - 1}\,(1 + \epsilon_n^1) + \frac{c_2}{\rho_2^n}\, n^{\theta_2 - 1}\,(1 + \epsilon_n^2)$$

On raisonnerait de même si, au lieu de 2, il y avait un nombre quelconque r de points singuliers simples sur le cercle $|x| = R$. On trouverait pour g_n une expression de la forme:

$$g_n = \Sigma_{i=1}^{r} \frac{c_i}{\rho_i^n}\, n^{\theta_i - 1}\,(1 + \epsilon_n^i) \qquad (10)$$

où aucun des c_i n'est nul et où les ϵ^n sont infiniments petits avec $\frac{1}{n}$.

Passons maintenant au cas le plus général, où y admet à la fois des points singuliers polaires et des points singuliers simples sur le cercle $|x| = R$. Soient ρ_1 , ρ_2 ,..., ρ_s les points singuliers polaires de y sur le cercle $|x| = R$, Q_1 , Q_2,..., Q_s les parties principales correspondantes, soient ρ_{s+1} , ρ_{s+2} ,..., ρ_r $(r > s)$ les

points singuliers simples ($|\rho_{s+i}| = R$). Posons: $Y_1 = \sum_{i=1}^{s} Q_i$; $Y_2 = y - Y$; Y_1 et Y_2 admettent au voisinage de l'origine des développements de la forme:

$$Y_1 = \sum_n g_n^1 x^n \; ; \qquad Y_2 = \sum_n g_n^2 x^n$$

et l'on a: $g_n = g_n^1 + g_n^2$; Q_i peut être développé au voisinage de l'origine, et en vertu de sa forme, d'après (2) et (4), on a:

$$Q_i = \sum_n \left\{ \sum_{j=1}^{\varphi_i} \frac{\overset{(i)}{\alpha_j}}{\Gamma\left(\frac{j}{\Psi_i}\right)} n^{\frac{j}{\Psi_i}-1} (1 + \epsilon_n^{j,i}) \right\} \left(\frac{x}{\rho_i}\right)^n$$

En ne gardant que les parties principales, et en posant $c_i = \frac{\overset{(i)}{\alpha_{\varphi_i}}}{\Gamma\left(\frac{\varphi_i}{\Psi_i}\right)} \lesseqgtr 0$, on trouve:

$$g_n^1 = \sum_{i=1}^{s} \frac{c_i}{\rho_i^n} n^{\theta_i - 1} (1 + \overset{i,}{\epsilon_n}) \qquad (11)$$

où aucun des c_i n'est nul, les $\epsilon_n^{i'}$ étant infiniment petits avec $\frac{1}{n}$.

D'autre part, Y_2 n'admet comme points singuliers sur le cercle $|x| = R$, que des points singuliers simples, parmi lesquels $\rho_{s+1}, \ldots, \rho_r$ avec les ordres $\theta_{s+1}, \ldots, \theta_r$, et peut être certains des

points ρ_1, ρ_2,..., ρ_s, soit ρ_1, ρ_2,..., ρ_t ($t \leq s$) avec des ordres, nécessairement négatifs, θ_1', ... θ_t' ; d'après (10), on peut écrire:

$$g_n^2 = \Sigma_{i=1}^{t} \frac{c'_i}{\rho_i} n^{\theta_i - 1} (1 + \epsilon_n^{i''}) + \Sigma_{i=s+1}^{r} \frac{c_i}{\rho_i^n} n^{\theta_i - 1} (1 + \epsilon_n^i)$$

d'où :

$$g_n = \Sigma_{i=1}^{s} \frac{c_i}{\rho_i^n} n^{\theta_i - 1} (1+\epsilon_n^{i'}) + \Sigma_{i=1}^{t} \frac{c'_i}{\rho_i^n} n^{\theta_i' - 1} (1+\epsilon_n^{i''}) + \Sigma_{i=s+1}^{r} \frac{c_i}{\rho_i^n} n^{\theta_i - 1} (1+\epsilon_n^i)$$

$$= \Sigma_{i=1}^{t} \frac{c_i}{\rho_i^n} n^{\theta_i - 1} \left[1 + \epsilon_n^{i'} + \frac{c'_i}{c_i} n^{\theta_i' - \theta_i} (1+\epsilon_n^{i''}) \right] + \Sigma_{i=t+1}^{r} \frac{c_i}{\rho_i^n} n^{\theta_i - 1} (1+\epsilon_n^i)$$

et puisque l'on a nécessairement $\theta_i' - \theta_i < 0$, on a, en posant:

$$\bar{\epsilon}_n^i = \epsilon_n^{i'} + \frac{c'_i}{c_i} n^{\theta_i' - \theta_i} (1 + \epsilon_n^{i''}) \qquad (i = 1, 2, \ldots t)$$

$$\boxed{g_n = \Sigma_i \frac{c_i}{\rho_i^n} n^{\theta_i - 1} (1 + \epsilon_n^i)} \qquad (12)$$

La formule (12) résout le problème que nous nous étions proposé; elle ne fait intervenir que les points singuliers de module minimum, avec leurs ordres. Nous allons en déduire diverses conséquences.

THÉORÈME $I_{2,5}$: *La fonction* $y = f(x)$ *étant une détermination, régulière à l'origine, d'une fontion algébrique et admettant au voisinage de l'origine le développement:* $y = \sum_{n=0} g_n x^n$, *pour que* $|g_n|$ *reste borné lorsque n croît indéfiniment, il faut et il suffit que y n'admette pas de point singulier de module inférieur à 1, et que les poins singuliers de module 1, s'il y en a, soient d'ordre inférieur ou égal à 1.*

LEMME: Pour que les coefficients g_n du développement, au voisinage de l'origine, d'une fraction rationnelle y, régulière à l'origine et pourvue d'un pôle au moins à distance finie, soient tous réels et positifs ou nuls, au moins à partir d'un certain rang, il faut que parmi les pôles de module minimum de y figure un nombre réel positif.

En effet, d'abord on peut supposer les g_n réels et $\geqq 0$ à partir de g_0 inclus; cela revient à retrancher de y peut être un pôlynome, ce qui ne modifie en rien les singularités de y; d'autre part, en appelant R le module des pôles de module minimum, on peut supposer $R = 1$, car on peut toujours se ramener à ce cas par le changement de variable $x = R x'$.

Imaginons alors que parmi les pôles de module 1 ne figure pas le nombre 1: le nombre 1 étant régulier, et la série $\sum_n g_n x^n$ ayant tous ses coefficients positifs ou nuls, y ne saurait admettre aucun pôle de module 1, ce qui est contraire à l'hypothèse.

CONSÉQUENCE: Soient ρ_1, ρ_2,... ρ_j,... ρ_h des nombres tous distincts, $Q_j(n)$ des pôlynomes en n; on sait que l'expression

$$g_n = \Sigma^h \frac{Q_j(n)}{\rho_i^n} \tag{13}$$

peut être considérée comme la coefficient du développement au voisinage de l'origine, d'une fraction rationnelle de p les ρ_1, ρ_2,..., ρ_h: d'après le lemme précédent, une expression de la forme (13) ne pourra être constamment réelle et positive ou nulle (du moins à partir d'une certaine valeur de n) que si, parmi les ρ_j, figure au moins un nombre réel positif.

Revenons alors à notre fonction algébrique y, de développement: $y = \sum_n g_n x^n$, les g_n étant de la forme (12); soient ρ_1,.., ρ_j,.. ρ_h les points singuliers de module minimum et d'ordre maximum de y; on peut supposer $|\rho_j| = 1$; soit θ d'autre part l'ordre maximum des points singuliers de module 1; d'après (12), on peut écrire:

$$g_n = n^{\theta} \sum_{j=1}^{h} \frac{c_j}{\rho_j^n} + n^{\theta} \cdot \epsilon_n$$

où ϵ_n tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$; supposons que les g_n soient réels et positifs ou nuls, à partir d'un certain rang, qu'on peut d'ailleurs

supposer être le rang 0 ; alors $\frac{g_n}{n^\theta}$ est, également, réel et positif ou nul; on a:

$$\frac{g_n}{n^\theta} = \sum_j \frac{c_j}{\rho_j^n} + \epsilon_n$$

la quantité $F(n) = \Sigma \frac{c_j}{\rho_j^n}$ est une fonction presque periodique de n; je dis qu'elle est réelle; supposons en effet que, pour une valeur n_1 de n, on ait: $| F(n) - R(F(n) | = \eta > 0$, $R(F(n))$ désignant la partie réelle de $F(n)$; d'après les propriétés des fonctions presque périodiques, on peut, quel que soient l'entier positif N et le nombre positif ϵ, trouver un entier $n_2 > N$ et tel que: $|F(n_2) - F(n_1)| < \epsilon$; prenons alors $\epsilon < \frac{\eta}{4}$, et N tel que pour $n > N$ on ait: $|\epsilon_n| < \frac{\eta}{4}$; on aura: $|F(n_2) - R(F(n_2))| > \frac{3\eta}{4}$ et $|F(n_2) + \epsilon_{n_2} - R(F(n_2) + \epsilon_{n_2})| > \frac{\eta}{2} > 0$ de sorte que $\frac{g_n}{n^\theta}$ ne serait pas réel.

Mais d'autre part, $F(n)$ est de la forme (13) : on en déduit que:

THÉORÈME $II_{2,5}$: *La série entière* $\sum_{n=\theta}^{\infty} g_n x^n$ *représentant le développement, au voisinage de l'origine, d'une détermination régulière à l'origine et pourvue de point singulier à distance finie, soit*

$y = f(x)$, d'une fonction algébrique, pour que les coefficients g_n soient tous reels et positifs ou nuls (du moins a partir d'un certain rang), il faut qu'un nombre réel positif figure parmi les points singuliers de module minimum et d'ordre maximum de y.

Paragraphe 2: Définition des substitutions homogènes finies.

Nous appelons *homogènes finies* les substitutions algébriques linéaires A de coefficients a_{ik} $(i, k = 1, 2, .., \infty)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1°) Pour chaque valeur de i, il n'y a qu'un nombre fini de a_{ik} non nuls;

2°) Sauf pour un nombre fini de valeurs de i, les a_{ik} ne dépendent que de $i - k$; on peut alors supposer que les valeurs exceptionnelles de i, au nombre de q par exemple, sont les valeurs $1, 2, ...q$. Pour $i > q$, on peut poser: $a_{ik} = a_{k-i}$; d'ailleurs la condition 1.° exige que a_j soit nul, sauf pour un nombre fini de valeurs de j: on peut supposer que a_j est nul pour $j < -r$ et $j > s$, a_{-r} et a_s étant non nuls. Les formules de la substitution A s'écrivent alors:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}\, x_1 + ... + a_{1 t_1}\, x_{t_1} \\ \\ y_q = a_{q1}\, x_1 + ... + a_{q t_q}\, x_{t_q} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{q+1} = a_{-r}\, x_{q+1-r} + a_{-r+1}\, x_{q+1-r+1} + \ldots + a_0\, x_{q+1} + \ldots + a_s\, x_{q+1+s} \\ y_i = \sum_{j=-r}^{s} a_j\, x_{i+j} \qquad \text{pour } i > q \end{cases}$$

avec évidemment $q \geqq r$.

Une telle substitution peut être considérée dans l'espace D_ω : c'est ce que nous faisons dans la suite de ce chapitre. Ceci étant, nous nous proposons de déterminer le comportement, lorsque n croît indéfiniment, des coefficients a_{ik}^n de la $n^{\text{ième}}$ itérée A^n de A.

Paragraphe 3: Cas particuliers.

Supposons d'abord que l'un au moins des 2 nombres r et s soit nul; soit par exemple $r = 0$. Il est alors aisé de voir que a_{ik}^n est le coefficient de rang (i, k) de la $n^{\text{ième}}$ itérée A'^n d'une substitution A' obtenue en remplaçant dans A par des 0 certains a_{jl} :

Si l'un au moins des 2 nombres i et k est supérieur à q, on remplace par 0 les a_{jl} tels que l'un au moins des 2 nombres j et l soit supérieur au plus grand des 2 nombres i et k ;

Si i et k sont tous inférieurs ou égaux à q, on remplace par 0 les a_{jl} tels que l'un au moins des 2 nombres j et l soit supérieur à q.

On est ainsi ramené à l'itération des substitutions finies, problème résolu par M. Fréchet (v. Fréchet, 6). Dans ce qui suit, nous écarterons donc ce cas particulier.

PARAGRAPHE 4: CAS GÉNÉRAL r ET s SONT SUPÉRIEURS À 0.

Posons: $a_{ik}(\lambda) = a_{ik} + a^2_{ik}\,\lambda + a^3_{ik}\,\lambda^2 + \ldots + a^n_{ik}\,\lambda^{n-1} + \ldots$ (13)

$a_{ik}(\lambda)$ est une fonction analytique dont nous nous proposons de déterminer la nature; de cette nature, nous déduirons le comportement du coefficient a^n_{ik} de son développement en série au voisinage de $\lambda = 0$; $a_{ik}(\lambda)$ est le coefficient de rang (i, k) de la résolvante $A(\lambda)$ de A, lorsque $A(\lambda)$ existe; posons: $-B(\lambda) = E + \lambda A(\lambda) = (E - \lambda A)^{-1}$. Soient $b_{ik}(\lambda)$ les coefficients de $B(\lambda)$; on a:

$$a_{ik}(\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{b_{ik}(\lambda)}{\lambda} & \text{si } i \lessgtr k \\ -\dfrac{b_{ik}(\lambda) - 1}{\lambda} & \text{si } i = k \end{cases} \qquad (14)$$

Le système d'équations (S) que je représente symboliquement par $(\lambda A - E)\,(x) = y$ admet une solution et une seule lorsque $|\lambda|$ est $< \dfrac{1}{\|A\|}$; précisément cette solution est fournie par les formules:

$$x_i = \sum_k b_{ik}(\lambda)\, y_k \qquad (15)$$

Résolvons le système (S); posons:

$$f(u) = x_1 + x_2 u + .+ x_i u^{i-1} +... \tag{16}$$

$$G(\lambda,u) = \lambda \sum_{j=-r}^{s} a_j u^{s-j} - u^s \tag{17}$$

$$H(\lambda,v) = \lambda \sum_{j=-r}^{s} a_j v^{r+j} - v^r \tag{18}$$

$$R(u) = y_1 u + y_2 u^2 +..+ y_n u^n +... \tag{19}$$

Considérons la fonction analytique de u: $f(u)\, G(\lambda, u) = \rho_0 + \rho_1 u + \rho_2 u^2 +..+ \rho_n u^n +...$

On a:

$$\rho^n = \lambda \cdot \sum_{j=\alpha}^{s} a_j \, x_{n+1-s+j} - x_{n+1-s} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = -r \text{ si } n \geqq s+r \\ \alpha = -n+s, \text{ si } n < s+r \end{cases} \tag{20}$$

Il résulte des équations de s que $\rho_n = y_{n+1-s}$, pourvu que n soit simultanément supérieur ou égal à $s+r$ et $s+q$; double condition qui se réduit à une seule: $n \geqq s+q$, puisque $q \geqq r$. On trouve alors aisément que:

$$f(u) = u^{s-1} \frac{R(u)}{G(\lambda,u)} + \frac{I(u)}{G(\lambda,u)} \tag{21}$$

où l'on a posé:

$$I(u) = [\rho_0 + \rho_1 u +...+ \rho_{s+q-1} u^{s+q-1} - {}^{s-1} (y_1 u +..+ y_q u^q)] \tag{22}$$

Soient $v_1, v_2,..., v_{s+r}$ les $s+r$ racines de l'équation $H(\lambda,v)=0$; *sauf pour un nombre fini de valeurs de* λ, *formant un ensemble*

ϵ_1, *ces* $s+r$ *racines sont distinctes;* observons d'autre part que, lorsque $|\lambda|$ tend vers 0, s racines de $H(\lambda, v) = 0$ croissent indéfiniment en module: soient par exemple v_1, v_2,..., v_s, tandis que les r autres tendent vers 0; par conséquent, si $|\lambda|$ est assez petit, on aura:

$$\begin{cases} |v_j| > 1 & \text{pour } j \leq s \\ |v_j| < 1 & \text{pour } j > s \end{cases} \tag{23}$$

Supposons par exemple que ceci soit réalisé dans le cercle D: $|\lambda| < h$; que faut il pour que $H(\lambda, v) = 0$ ait une racine de module 1, $e^{i\varphi}$ par exemple? Il faut que λ satisfasse à la relation:

$$\lambda = \frac{e^{i\,r\varphi}}{\sum_{j=-r}^{s} a_j\, e^{i\,(r+j)\varphi}} \tag{24}$$

D'après cette relation, lorsque φ varie, λ décrit dans le plan complexe une *courbe algébrique* C, dont (24) fournit des équations paramétriques. Cette courbe ne peut avoir de points isolés; elle partage le plan complexe en un certain nombre de régions d'un seul tenant: *soit* D *celle de ces régions qui contient l'origine;* D contient évidemment D; or puisque les v_j sont des fonctions continues de λ, la repartition (23) de leurs modules par rapport

à l'unité reste inchangée tant que λ varie à l'intérieur de D, car cette répartition ne pourrait être modifiée que si l'une au moins des v_j passait par une valeur de module 1.

D'autre part, si λ n'est pas sur ϵ_1, les v_j sont distincts; on peut donc écrire:

$$G(\lambda, u) = \lambda a_s (1-v_1 u)(1-v_2 u) \dots (1-v_{s+r} u) = \lambda a_s \pi_j (1-v_j u)$$

On a par conséquent, en posant:

$$C_j = \frac{v_j^{s+r-1}}{\pi_{l \neq j} (v_j - v_l)} \tag{25}$$

$$\frac{1}{G(\lambda, u)} = \frac{1}{\lambda a_s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{s+r} c_j v_j^n \right) u^n \tag{26}$$

$$\frac{R(u)}{G(\lambda, u)} = \frac{1}{\lambda a_s} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} y_k \left(\sum_{j=1}^{s+r} c_j v_j^{n-k} \right) \right] u^n \tag{27}$$

$$u^{s-1} \frac{R(u)}{G(\lambda, u)} = \frac{1}{\lambda a_s} \sum_{n=s}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n-(s-1)} y_k \left(\sum_{j=1}^{s+r} c_j v_j^{n-(s-1)-k} \right) \right] u^n \tag{28}$$

D'autre part; $\frac{I(u)}{G(\lambda, u)}$ étant une fraction rationnelle en u, on obtient évidemment, en la décomposant en éléments simples, puis en développant les éléments obtenus:

$$\frac{I(u)}{G(\lambda, u)} = J(u) + \sum_{n} \left(\sum_{j} D_j v_j^n \right) u^n \qquad (29)$$

où $J(u)$ est un polynôme de degré $q-r-1$ (se réduisant à 0 si $q = r$) et de coefficients $J_0, \ldots, J_{q-r-1}$; les J_j et les D_j, qui sont indépendantes de u, s'expriment rationnellement en fonction de λ, des v_j, des y_j $(j \leq q)$, et des ρ_j $(j \leq s+q-1)$; d'ailleurs on peut remplacer les ρ_i par les x_j $(j \leq s+q)$ d'après les formules (20), et c'est ce que nous supposerons fait; les J_j et les D_j sont alors des fonctions linéaires des x_j $(j \leq s+q)$ et des y_j $(j \leq q)$, dont les coefficients sont des fractions rationnelles des v_j et de λ; le dénominateur de l'un quelconque de ces coefficients est visiblement une fonction algébrique de λ, et n'admet par suite qu'un nombre fini de zéros; *désignons par* ϵ_2 *l'ensemble des zéros des dénominateurs des coefficients:* comme ceux-ci sont en nombre fini, ϵ_2 ne comporte qu'un nombre fini de points. Et si l'on suppose λ extérieur à ϵ_1, à ϵ_2 et non nul, on peut écrire, d'après (23), (29) et (16):

$$x_i = \frac{1}{\lambda a_s} \sum_{k=1}^{i-s} \left(\sum_{j=s}^{s+2} c_j v_j^{i-s-k} \right) y_k + \sum_{j} D_j v_j^{i-s} + \begin{cases} J_{i-1} \text{ si } i \leq q-r \\ 0 \quad \text{si } i > q-r \end{cases} \qquad (30)$$

Les formules (30) ne résolvent pas le système (s), puisque leurs seconds membres dépendent des inconnues x_j $(j \leq s+q)$. Or,

par la façon même dont nous avons établi les formules (30) les x_i fournis par ces formules satisfont aux équations de (s) de rang supérieur à q, quelles que soient les valeurs attribuées aux x_1, x_2,..., x_{s+q} ; à exprimer qu'ils satisfont aussi aux q premières équations de (s). Pour cela, remplaçons dans ces équations les x_j par leurs expressions (30) : nous obtenons ainsi un système de q relations, que l'on peut considérer comme q équations linéaires par rapport aux x_j ($j \leqq s+q$), dont nous désignerons l'ensemble par E_q .

D'autre part, les valeurs des x_i fournies par (30) ne sont acceptables que si $|x_i|$ reste borné lorsque i croît indéfiniment. Or posons:

$$B_j^i = \frac{c_j}{\lambda a_s} \sum_{k=1}^{i-s} y_k v_j^{i-s-k} + D_j v_j^{i-1} \qquad (31)$$

$$= v_j^{i-1} \left\{ D_j + \frac{c_j}{\lambda a_s v_j^{s-1}} \sum_{k=1}^{i-s} \frac{y_k}{v_j^k} \right\} \qquad (32)$$

Il est clair, d'après (31), que si $|v_j| < 1$, $|B_j^i|$ reste borné lorsque i croît indéfiniment, car d'abord $|D_j|\,|v_j|^{i-1}$ tend vers 0, et d'autre part on a:

$$\left| \frac{c_5}{\lambda a_s} \cdot \sum_{k=1}^{i-s} y_k v_j^{i-s-k} \right| < \left| \frac{c_5}{\lambda a_s} \right| |y| \sum_{l=1}^{i-s-1} |v_j|^l < |y| \left| \frac{c_j}{\lambda a_s} \right| \cdot \frac{1}{1-|v_j|}$$

Si $|v_j| > 1$, la série $\sum_k \frac{y_k}{v_j^k}$ est absolument convergente; soit s_j sa somme; lorsque i croît indéfiniment, la quantité $D_j + \frac{c_j}{\lambda a_s v_j^{s-1}} \sum_{k=1}^{i-s} \frac{y_k}{v_j^k}$ tend vers la limite: $D_j' = D_j + \frac{c_j s_j}{\lambda a_s v_j^{s-1}}$, et on a:

$$D_j + \frac{c_j}{\lambda a_s v_j^{s-1}} \sum_{k=1}^{i-s} \frac{y_k}{v_j^k} = D_j' - \frac{c_j}{\lambda a_s v_j^{s-1}} \left(\frac{y_{i-s+1}}{v_j^{i-s+1}} + \frac{y_{i-s+2}}{v_j^{i-s+2}} + \ldots \right) = D_j' - D_j''^i$$

en posant:

$$D_j''^i = \frac{c_j}{\lambda a_s v_j^{s-1}} \left(\frac{y_{i-s+1}}{v_j^{i-s+1}} + \frac{y_{i-s+2}}{v_j^{i-s+2}} + \ldots \right)$$

Il est clair que $D_j''^i$ est un infiniment petit avec $\frac{1}{i}$, tel que $| D_j''^i v^{i-1} |$ reste borné lorsque i augmente indéfiniment. Plaçons nous alors en un point intérieur à D (différent de 0, extérieur à ϵ_1 et à ϵ_2). Les modules des v_j satisfont aux inégalités (23), et l'on peut écrire:

$$x_i = \sum_{j=1}^{s} B_j^i + \sum_{j>s} B_j^i + \begin{cases} j_{i-1} & \text{si } i \leq q-2 \\ 0 & \text{si } i > q-r \end{cases}$$

Il résulte de ce qui précède que, pour que $|x_i|$ reste borné lorsque i croît indéfiniment, il faut et il suffit que $| \sum_{j=1}^{s} v_j^{i-1} D_j' |$ reste borné, et pour cela, il faut et il suffit que l'on ait:

$$D'_j = D_j + \frac{c_i s_j}{\lambda a_s v_j^{s-1}} = 0 \qquad (j = 1, 2, \quad s)$$

Nous obtenons ainsi s relations auxquelles doivent satisfaire, par l'intermédiaire des D_j, les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_{s+q}$, relations dont nous désignons l'ensemble par E_s.

Si alors nous considérons l'ensemble des équations E_q et E_s, elles forment un système de $q + s$ inconnues $(x_1, x_2, \ldots, x_{s+q})$ dont les coefficients sont des fractions rationnelles de λ, des v_j et des s_j ; on peut d'ailleurs supposer que l'on a chassé leurs dénominateurs de façon à les réduire tous à des polynômes en λ, v_j, s_j. Alors, pour que le système (s) admette une solution et une seule, il faut et il suffit que le système $(E_s + E_q)$ admette une solution et une seule, c'est à dire que son déterminant Δ soit non nul; or, évidemment, Δ, qui ne depend pas des s_j, est un polynôme en λ, v_j : c'est par conséquent une fonction algébrique de λ, d'ailleurs non identiquement nulle, puisque l'on sait que si $|\lambda| < \frac{1}{\|A\|}$, (s) admet une solution et une seule. *Par suite, Δ considéré comme fonction de λ seul n'admet qu'un nombre fini de zéros, formant un ensemble ϵ_3.* Donc, tout point intérieur à D, et extérieur à ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 est ordinaire pour $A(\lambda)$; tout point intérieur à D, appartenant à ϵ_3 sans appartenir à ϵ_1 ni à ϵ_2 est singulier pour $A(\lambda)$; $A(\lambda)$ n'admet, dans D, qu'un

nombre fini de points singuliers isolés; et comme D est d'un seul tenant, $A(\lambda)$ y est uniforme, et n'y peut admettre, comme points singuliers, que des pôles ou des points singuliers essentiels.
On a d'autre part le théorème suivant :

THÉORÈME $III_{2,5}$: *Tout point de la courbe c définie p. est singulier pour la résolvante* $A(\lambda)$ *de la substitution homogène finie* A.

En effet, supposons d'abord que λ appartienne à c sans appartenir à ϵ_1 ni à ϵ_2; λ n'est pas nul, et les formules (30) restent valables, ainsi que les équations E_q; parmi les $v_j, v_1, v_2, .., v_h$ auront un module supérieur à 1, $v_{h+1}, v_{h+2}, .., v_l$ $(l > h)$ un module inférieur à 1, et $v_{l+1}, v_{l+2}, ..., v_{s+r}$ un module égal à 1: cette dernière catégorie comprenant au moins 1 élément; pour que les formules (30) fournissent une solution de (s), il faut que: $|\sum_{j=1}^{h} v_j^{i-s} D_j' + \sum_{j=l+1}^{s+r} B_j^i|$ reste borné, lorsque i varie; et pour que λ soit point régulier de $A(\lambda)$, il faudrait que cette condition fût réalisée quel que fût le point y dans D_ω; or prenons: $y_k = v_{l+1}^{k}$; d'après (32), on a :

$$B_{l+1}^{i} = v_{l+1}^{i-1} \left\{ D_{l+1} + \frac{c_{l+1}}{\lambda a_s v_{l+1}^{s-1}} (i-s) \right\} \qquad (33)$$

D'ailleurs, les nombres v_{l+1}, v_{l+2}, , v_{s+2} sont tous distincts, puisque λ n'appartient pas à ϵ_1; donc, pour $j > 1$, on a:

$$\sum_{k=1}^{i-s} \frac{y_k}{v_{l+j}^k} = \sum_{k=1}^{i-s} \left(\frac{v_{l+1}}{v_{l+j}}\right)^k = \frac{\left(\frac{v_{l+1}}{v_{l+j}}\right)^{i-s+1} - \left(\frac{v_{l+1}}{v_{l+j}}\right)}{\frac{v_{l+1}}{v_{l+j}} - 1}$$

ce qui montre que pour $j > 1$, $|\overset{i}{B}_{l+j}|$ est borné; de sorte $|x_i|$ ne serait borné que si $\left| \sum_{j=1}^{h} v_j^{i-1} D_j' + i \cdot v_{l+1}^{i-s} \frac{c_{l+1}}{\lambda a_s} \right|$ était borné; or cela n'est pas vrai; donc λ est nécessairement point singulier pour $A(\lambda)$.

Si maintenant on suppose que λ appartienne à la fois à c et à ϵ_1 ou ϵ_2, λ est nécessairement point limite de points de c extérieurs à ϵ_1 et à ϵ_2; et comme l'ensemble des points singuliers de $A(\lambda)$ est fermé, λ est encore point singulier pour $A(\lambda)$.

Soit maintenant λ dans D, extérieur à ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3; remplaçons, dans les formules (30), x_1, x_2,..., x_{s+q}, par leurs valeurs tirées du système $(E_q + E_s)$; les formules (30) obtenues ainsi résolvent le système (s); on peut les écrire:

$$x_i = \frac{1}{\lambda a_s} \sum_{k > i-s} y_k \left(\sum_{j=1}^{s} \frac{c_j}{v_j^{k-(i-s)}} \right) + \frac{1}{\lambda a_s} \sum_{k \leq i-s} y_k \left(\sum_{j>s} c_j v_j^{(i-s)-k} \right) + \sum \overline{D}_j v_j^{i-1}$$

$$+ \begin{cases} 0 & \text{si } i > q - r \\ \bar{j}_{i-1} & \text{si } i \leq q - r \end{cases} \qquad (\overline{30})$$

en tenant compte de E_s, et en désignant par $\bar{D}_j$ et $\bar{J}_{i-1}$ ce que deviennent D_j et J_{i-1} lorsque l'on y remplace les x_j ($j \leq s + q$) par leurs valeurs tirées de $(E_s + E_q)$; évidemment, $\bar{D}$ et $\bar{J}_{i-1}$ sont des fonctions linéaires des s_j, donc des y_k ; on peut poser:

$$\bar{D}_j = M_j^o + \sum_{l=1}^{s} M_j^l S_l = M_j^o + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \left(\sum_{l=1}^{s} \frac{M_j^l}{v_l^k} \right)$$

$$\bar{J}_j = M_j'^o + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \left(\sum_{l=1}^{s} \frac{M_j'^l}{v_l^k} \right)$$

Les coefficients M', ainsi que les quantités $\frac{c_j}{\lambda a_s}$, sont en nombre fini, et ce sont des fractions rationnelles de λ et des v_j; on peut dont les réduire au même dénominateur: $R(\lambda, v_j)$; d'autre part, on peut remplacer $\frac{1}{v_j^l}$ par $\left(\frac{a_s}{a_{-r}} \pi_k \lessgtr_j v_k \right)^l$ qui lui est égal; les formules $(\overline{30})$ donnent alors:

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \cdot \frac{R_{ik}(\lambda, v_j)}{R(\lambda, v_j)} \qquad (34)$$

où R et R_{ik} sont des pôlynomes en λ et v_j ; les formules (34) résolvent le système (s) si λ est intérieur à D, non nul et extérieur à $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$; donc si $|\lambda| < \frac{1}{\|A\|}$, et si λ est extérieur à $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, on a, d'après (15) et (34):

$$b_{ik}(\lambda) = \frac{R_{ik}(\lambda, v_j)}{R(\lambda, v_j)} \tag{35}$$

mais évidemment cette égalité subsiste dans tout le domaine d'existence de $b_{ik}(\lambda)$; donc $b_{ik}(\lambda)$ est une fonction algébrique de λ— plus précisément l'une des déterminations d'une fonction algébrique de λ. D'après les formules (14), on pourra poser:

$$a_{ik}(\lambda) = \frac{R'_{ik}(\lambda, v_j)}{R'(\lambda, v_j)}$$

On pourra arranger cette expression, en posant $R'(\lambda, v_j) = \lambda^{\alpha} R''(\lambda)$, où $R''(\lambda)$ n'est ni nul ni infini pour $\lambda = 0$; α peut être positif négatif ou nul; comme $a_{ik}(\lambda)$ est régulier pour $\lambda = 0$, $\lambda^{-\alpha} R'_{ik}(\lambda, v_j) = R''_{ik}(\lambda)$ sera régulier pour $\lambda = 0$. D'ailleurs, les v_j ne pouvant être infinis que pour $\lambda = 0$, $R''(\lambda)$ et $R''_{ik}(\lambda)$ seront finis pour $|\lambda|$ fini. Soit d'autre part λ_0 un zéro d'ordre θ de $R''(\lambda)$ (θ positif rationnel); on a, au voisinage de $\lambda = \lambda_0$, $v_j = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^j (\lambda - \lambda_0)^{\frac{n}{\Psi_j}}$, où Ψ_j est un entier positif; par suite, ou bien λ_0

n'est pas un zéro pour R''_{ik}, ou bien c'est un zéro d'ordre $\theta_{ik} = \frac{n_{ik}}{\Psi_{ik}}$, n_{ik} étant un entier positif et Ψ_{ik} l'un des Ψ_j; deux cas sont alors possibles:

1.°) λ_o n'est pas un zéro pour tous les $R''_{ik}(\lambda)$;

2.°) λ_o est un zéro pour tous les $R''_{ik}(\lambda)$, mais alors θ_{ik} atteint son minimum θ' pour certains couples (i, k); on peut alors multiplier R''_{ik} et R'' par $(\lambda - \lambda^o)^{-\theta'}$ ou par $(\lambda - \lambda_o)^{-\theta'}$ suivant que $\theta \leqq \theta'$ ou $\theta > \theta'$ et ainsi ou bien λ_o ne sera plus un zéro du dénominateur, ou bien on sera ramené au cas où λ_o n'est pas un zéro pour tous les R''_{ik}. On en conclut que:

THÉORÈME $IV_{2,4}$: *Quels que soient i et k, la fonction analytique $a_{ik}(\lambda)$ définie page , est l'une des déterminations d'une fonction algébrique de λ; on peut la représenter dans tout son domaine d'existence par un rapport de la forme:*

$$a_{ik}(\lambda) = \frac{F_{ik}(\lambda)}{F(\lambda)} \tag{36}$$

où $F_{ik}(\lambda)$ et $F(\lambda)$ sont des déterminations de 2 fonctions algébriques dépourvues de pôles à distance finie (aussi bien de pôles ordinaires que de pôles algébriques), le dénominateur $F(\lambda)$ ne dépendant pas de i ni de k, et tout zéro d'ordre θ de $F(\lambda)$ étant pôle

d'ordre θ *pour l'un au moins des* $a_{ik}(\lambda)$, *et point régulier, ou singulier d'ordre* $< \theta$ *pour les autres.*

Nous avons vu que dans D, $A(\lambda)$ n'admet, comme points singuliers, qu'un nombre fini de pôles ou de points singuliers essentiels. Mais soit λ_0 un tel point singulier essentiel; du voisinage de λ_0, $A(\lambda)$ admettrait un développement de la forme:

$$A(\lambda) = \sum_{h>0} \frac{A_{-h}}{(\lambda-\lambda_0)^h} + \sum_{h>0} A_h (\lambda-\lambda_0)^h$$

et, si grand que soit N, il y aurait des substitutions A_{-h} non nulles telles que $h > N$; il y aurait donc au moins un $a_{ik}(\lambda)$ qui admettrait λ_0 comme point singulier essentiel, ou au moins comme pôle d'ordre supérieur à N: il faudrait donc que λ_0 soit un zéro de $F(\lambda)$, d'ordre θ par exemple; mais si l'on a pris $N > \theta$, cela est impossible. Donc, à l'intérieur de D, $A(\lambda)$ n'admet comme point singulier que des pôles.

Ces pôles sont de rang fini; soit en effet λ_0 l'un deux; le système $(s)'$

$$x_i = \lambda_0 \cdot \sum_k a_{ik} x_k$$

admet au moins une solution non nulle; d'ailleurs on peut lui appliquer la méthode que nous avons suivie pour le système (s'), en posant $y_k = 0$; on trouve ainsi:

$$f(u) = \frac{I'(u)}{G(\lambda, u)} \qquad (21)'$$

$$I'(u) = \rho_0 + \rho_1 u + \rho_2 u^2 + .. + \rho_{s+q-1} u^{s+q-1}$$

Les v_j satisfont aux inégalités (23), mais ne sont peut être pas tous distincts; désignons par v_j' les racines distinctes de l'équation $H(\lambda, v) = 0$; décomposons (21)' en éléments simples de première espèce, on trouve:

$$x_i = \sum_j v_j'^{i-s} Q_j(i) + \begin{cases} 0 & \text{si } i > q-r \\ , & \\ j_{i-1} & \text{si } i \leq q-r \end{cases} \qquad (30)'$$

où $Q_j(i)$ est un pôlynome en i de degré au plus égal à l'ordre de la racine v_j' diminué de 1 ; les $Q_j(i)$ et les j'_{i-1} sont des fonctions linéaires des x_j $(j \leq s+q)$ par l'intermédiaire des ρ_j $(j \leq s+q-1)$ et d'après les formules (20): ceci prouve que la solution la plus générale du système homogène $(s)'$ dépend au plus de $s+q$ paramètres linéaires. On en conclut que:

THÉORÈME $V_{2,5}$: *A l'intérieur du domaine* D *défini p.* , *la résolvante* $A(\lambda)$ *de la substitution homogène finie* A *n'admet, comme points singuliers, qu'un un nombre fini de pôles de rang fini.*

REMARQUE 1 : Des théorèmes III et V, on déduit que si M est un point de C et 0 l'origine, le rayon polaire P de A n'est autre que le minimum absolu de la distance 0 M, lorsque M varie sur C.

REMARQUE 2 : Supposons que les a_j soient tous réels, et que l'on ait quel que soit j, $a_j = a_{-j}$; on a dans (24) :

$$\lambda = \frac{e^{ir\varphi}\left[\sum_{j=-r}^{s} a_j\, e^{-i(r+j)\varphi}\right]}{\left[\sum_{j=-r}^{s} a_j\, e^{-i(r+j)\varphi}\right]\left[\sum_{j=-r}^{s} a_j\, e^{i(r+j)\varphi}\right]} = \frac{e^{ir\varphi}\left[\sum_{j=-r}^{s} a_j\, e^{-i(r+j)\varphi}\right]}{\left|\sum_{j=-r}^{s} a_j\, e^{i(r+j)\varphi}\right|} = \frac{\sum_{j=-r}^{s} a_j\, e^{-ij\varphi}}{\left|\sum_{j} a_j\, e^{i(r+j)\varphi}\right|}$$

Evidemment, $r = s$; alors:

$$\lambda = \frac{\sum_{j=1}^{s} a_j\, e^{ij\varphi} + \sum_{j=1}^{s} a_j\, e^{-ij\varphi} + a_o}{\left|\sum_{j} a_j\, e^{i(r+j)\varphi}\right|} \qquad (37)$$

Il est clair que le numérateur de (37) est réel, comme son dénominateur: donc la courbe c est constituée par un ou plusieurs segments de l'axe réel; nous obtenons ainsi un résultat qui rejoint celui de Hilbert, d'après lequel la résolvante d'une substitution réelle symétrique n'a de points singuliers que sur l'axe réel; mais dans notre cas, la substitution n'est pas forcément complé-

tement symétrique; aussi sa résolvante peut-elle admettre, en dehors de l'axe réel, des pôles de rang fini.

Envisageons maintenant notre problème essentiel: le comportement des a_{ik}^n lorsque n croît indéfiniment; d'après le théorème IV, ce problème est résolu par la formule (12). *Désignons par* ϵ *l'ensemble des points singuliers de tous les* $a_{ik}(\lambda)$; ϵ ne comporte qu'un nombre fini de points : λ_1, λ_2,..., λ_j,.. Soit θ_{ik}^j l'ordre de λ_j pour ceux des $a_{ik}(\lambda)$ qui admettent λ_j comme point singulier; d'après les raisonnements de la p. , θ_{ik}^j atteint, pour une valeur donnée de j, son maximum absolu θ_j, pour un nombre fini ou infini de couples (i, k): nous appelons θ_j *l'ordre de* λ_j *pour* A. Nous appelerons naturellement *cas borné* le cas où, pour des valeurs fixes quelconques de i et de k, $|a_{ik}^n|$ reste borné lorsque n croît indéfiniment. D'après le théorème I, on a évidemment :

THÉORÈME $VI_{2,5}$: *Pour que l'on soit dans le cas borné, il faut et il suffit que l'ensemble* ϵ *défini p. ne comporte aucun point de module inférieur à 1, et que ses points de module 1, s'il y en a, soient pour A d'ordre inférieur ou égal à 1.*

THÉORÈME $V_{2,5}$: *Dans le cas borné, les* a_{ik}^n *convergent au sens de Cesarò vers des limites* π_{ik} : *qui sont toutes nulles si 1 n'appartient pas à* ϵ, *ou si 1, tout en appartenant à* ϵ *est d'ordre* < 1 *pour* A; *qui ne sont pas toutes nulles si 1 appartient à* ϵ

et est d'ordre 1 pour A. *Si l'on pose* $\pi_{ik}^{n} = \dfrac{a_{ik} + a_{ik}^{2} + \ldots + a_{ik}^{n}}{n}$, *on peut déterminer un nombre positif* α *et des nombres positifs* M_{ik} *tels que l'on ait quel que soit* n *:*

$$| \pi_{ik} - \pi_{ik}^{n} | < \frac{M_{ik}}{n^{\alpha}}$$

REMARQUE : La détermination de l'ensemble ϵ est une partie importante de l'étude de l'itération d'une substitution homogène finie; or les points de ϵ sont soit des points de ϵ_1, ensemble que l'on peut déterminer, soit des zéros de $F(\lambda)$, c'est à dire de $R(\lambda, v_j)$: or, $R(\lambda, v_j)$ peut être déterminé par un nombre fini d'opérations algébriques.

Chapitre VI.

Application de l'étude des substitutions homogènes finies au problème I.

Paragraphe 1: Définition du cas homogène fini.

Nous reprenons dans ce Chapitre notre problème I (v. Introduct. et p.) et nous nous proposons de lui appliquer les méthodes et les résultats du Chapitre précédent. Pour cela, nous définirons *le cas homogène fini* comme celui où la substitution $P(p_{ik})$ est une substitutution homogène finie, autrement dit:

1.°) à chaque expérience, et quel que soit l'état E_i actuellement réalisé, il n'y a qu'un nombre fini d'états possibles, c'est à dire qu'il n'y a, pour une valeur donnée de i qu'un nombre fini de p_{ik} non nuls;

2.°) sauf peut être pour un nombre fini de valeurs de i (que l'on peut supposer être les valeurs $1, 2, \ldots, q$), les p_{ik} ne dépendent que de $i-k$; en posant $p_{ik} = p_{k-i}$ pour $i > q$, le tableau des p_{ik} est le suivant:

$$\begin{array}{cccccccccc}
p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1t_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2t_2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \\
p_{q1} & p_{q2} & \cdots & p_{qt_q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & p_{-r} & p_{-r+1} & \cdots & p_0 & p_1 & \cdots & p_s & 0 & \\
0 & 0 & p_{-r} & \cdots & p_0 & \cdots & p_s & \cdots & &
\end{array}$$

Nous dirons que *le cas homogène fini considéré est:*

positif si $\sum_{j=-r}^{s} p_j \cdot j > 0$

nul si $\sum_{j=-r}^{s} p_j \cdot j = 0$

négatif si $\sum_{j=-r}^{s} p_j \cdot j < 0$

La quantité $\sum_{j=-r}^{s} p_j \cdot j$ peut s'interpréter comme espérance mathématique.

Pour les raisons indiquées p. (paragraphe 3), nous laisserons de côté les cas où l'un des 2 nombres r et s est nul, nous bornant à indiquer que les résultats relatifs à ces cas rentreraient dans les résultats généraux que nous allons établir. *Nous supposons donc dans ce qui suit,* $r > 0$ *et* $s > 0$.

En nous plaçant dans le cas homogène fini, [1] nous poserons un certain nombre de définitions qui nous seront utiles: parmi l'infinité des états possibles E_1, E_2,...., E_i,.... prenons en un certain nombre, fini ou infini: ils forment un groupe H, que l'on peut caractériser par l'ensemble des indices des états du groupe: pour simplifier, nous désignons par H indifféremment le groupe des états ou l'ensemble des indices. Nous disons qu'*un groupe*

(1) Certaines de ces définitions garderaient un sens dans le cas général; d'ailleurs, MM Doeblin et Kolmogoroff, dans leurs travaux cités p. introduisent des définitions qui sont parfois comparables aux nôtres.

est formé si, lorsqu'une expérience de rang quelconque a réalisé l'un quelconque des états du groupe, seuls les états du groupe, seuls les états du groupe sont réalisables par les expériences suivantes. L'ensemble de tous les états possibles est un groupe fermé, que nous désignons par G. Si H est un groupe fermé, on a:

$$p_{ik} = 0 \quad \text{si} \quad i \in H, \quad k \in G - H ; \quad \sum_{k \in H} p_{ik} = 1 \quad \text{si} \quad i \in H .$$

Un groupe est fini on infini selon qu'il comporte un nombre fini ou infini d'états.

Un groupe fermé est irréductible si on ne peut pas en extraire un sous groupe fermé.

Nous appellons *décomposition de* G *en groupes fermés*, l'opération qui consiste à déterminer tous les groupes fermés — en particuliers les irréductibles — qu'on peut extraire de G ; cette opération est réalisable, car G ne comporte jamais qu'un nombre fini (ou 0) de groupes fermés; en effet, E_1, E_2,..., E_q appartiennent respectivement à q groupes fermés distincts au plus; d'autre part, si E_{q+1} par exemple appartient à un groupe fermé H, E_{q+1+s}, E_{q+1+2s}, .., E_{q+1+vs}, .. appartiennent également à H, parce que p_s est non nul: de sorte que les états E_i $(i > q)$ n'appartiennent qu'à s groupes fermés distincts au plus : au total, on ne saurait obtenir plus de $q + s$ groupes fermés. Pour une raison analogue, aucun groupe fermé fini ne peut comporter d'état d'indice supérieur à q.

Nous disons que l'on est dans le *cas homogène fini irréductible* si G est irréductible. La considération des groupes fermés irréductibles est intéressante parce que le calcul des P_{ik}^{n} relatifs à un groupe fermé irreductible H (c'es à dire tels que $i \in H$, $k \in H$) ne fait intervenir que les p_{ik} de ce groupe; on est donc ramêné, pour cette catégorie de P_{ik}^{n}, soit à une chaîne de Markoff pour un nombre fini d'états possibles, soit à un cas homogène fini irréductible: or nous verrons qu'un tel cas est particulièrement simple.

Un groupe fermé H *est indépendant,* si le groupe G − H est lui même fermé; il est clair que si un tel grope existe, le problème se décompose en 2 autres de même nature: 1.°) étude des probabilités relatives à H seulement, 2.°) étude des probabilités relatives à G − H seulement. C'est pourquoi *nous supposons toujours dans la suite que ce fait n'a pas lieu, c'est à dire qu'on est dans un cas indécomposable*, hypothèse justifiée puis qu'on peut toujours s'y ramener par un nombre fini d'opérations.

Paragraphe 2: Comportement asymptotique des P_{ik}^{n} dans le cas homogène fini.

Les méthodes et les résultats exposés au chapitre V sont valables pour les P_{ik}^{n} ; on est évidemment dans un cas borné; soient $p_{ik}(\lambda)$ les coefficients de la résolvante $P(\lambda)$ de P; soient $c_1, \ldots, c_j, \ldots$ ceux des points singuliers des $p_{ik}(\lambda)$ qui sont de

module 1 et d'ordre 1 pour $P(\lambda)$ [voir p. la définition de cet ordre]. Les P_{ik}^n sont de la forme:

$$P_{ik}^n = \sum_j \frac{\alpha_{ik}}{c_j^n} n^{\theta_{ik}^j - 1} \left(1 + \epsilon_n^j (i, k)\right) + \frac{\rho_{ik}(n)}{n^{\beta_{ik}}} \qquad (1)$$

où $\rho_{ik}(n)$ reste borné lorsque n croît indéfiniment, les β_{ik} étant > 0 et les $\theta_{ik}^j \leqq 1$, l'égalité $\theta_{ik}^j = 1$ étant réalisée, pour chaque valeur de j, pour au moins un couple (i, k). Donc:

THÉORÈME $I_{2,6}$: *Dans le cas homogène fini, les probabilités* P_{ik}^n *convergent, au sens de Cesarò, vers des limites* π_{ik}, *et l'on peut déterminer des nombres* β *et* M_{ik} *positifs tels que l'on ait, quels que soient* n, i *et* k.

$$| \pi_{ik} - \pi_{ik}^n | < \frac{M_{ik}}{n^\beta}$$

en posant: $\pi_{ik}^n = \dfrac{P_{ik}^1 + P_{ik}^2 + \ldots + P_{ik}^n}{n}$.

Naturellement, les π_{ik} sont $\geqq 0$, les séries $\sum_k \pi_{ik}$ convergent et ont des sommes $\leqq 1$.

Comme au chapitre V, désignons par C la courbe lieu des images du nombre:

$$\lambda = \frac{e^{i\varphi r}}{\sum_{j=-r}^{s} p_j \, e^{i\varphi(r+j)}} \qquad (2)$$

lorsque φ varie de 0 à 2π ; et par D celles des régions déterminées par C qui est d'un seul tenant et contient l'origine; puisque $\sum_j p_j = 1$, il est clair que $|\sum_j p_j \, e^{i\varphi(r+j)}| \leq 1$, par suite D contient le cercle $|\lambda| < 1$; nous savons d'ailleurs que, dans D, $P(\lambda)$ n'admet comme points singuliers que des pôles (de rang fini); par suite les c_j définis plus haut appartiennent à l'une ou l'autre des 2 catégories suivantes.

1.°) ils peuvent être des pôles de module 1 de $P(\lambda)$ intérieurs à D;

2.°) ou bien ce sont des points communs à C et au cercle $|\lambda| = 1$.

ETUDE DES PÔLES DE MODULE 1 DE $P(\lambda)$ INTÉRIEURS À D:

Soit c un pôle de $P(\lambda)$ de module 1, et intérieur à D; le système d'équations

$$x_i = c \cdot \sum_k p_{ik} \, x_k \qquad (i = 1, 2, .., \infty)$$

considéré dans D_ω admet au moins une solution non nulle, d'après les remarques de la page , et en employant les notations du chapitre précédent, on peut poser:

$$x_i = \sum_j v_j'^{i-1} Q_j(i) + \begin{cases} 0 & \text{si } i > q-r \\ J_{i-1}' & \text{si } i \leq q-r \end{cases} \qquad (3)$$

Aucun des v_j' n'est de module 1; et les v_j' de module supérieur à 1 ne doivent pas figurer dans (3), sans quoi $|x_i|$ ne serait pas borné; il est clair alors que $|x_i|$ tend vers 0 avec $\frac{1}{i}$; donc $|x_i|$ atteint sa borne supérieure $|x|$ pour un nombre fini de valeurs de i, formant un groupe fini H: je dis que H est un groupe fermé; on a en effet pour $i \in H$:

$$x_i = c \cdot \sum_k p_{ik} x_k \quad ; \quad |x| = |\sum_k p_{ik} x_k| \leq \sum_k p_{ik} |x_k|$$

$$|x| < |x| \cdot \sum_{k \in H} p_{ik} + \sum_{k \in G-H} p_{ik} |x_k| = |x| - \sum_{k \in G-H} p_{ik} [|x| - |x_k|]$$

D'où l'on conclut:

$$p_{ik} = 0 \quad \text{pour} \quad i \in H \text{ et } k \in G-H.$$

Mais alors le système fini:

$$x_i = c \cdot \sum_{k \in H} p_{ik} x_k \qquad (i \in H)$$

admet une solution non nulle; c est donc un pôle de la résolvante $P_H(\lambda)$ de la substitution P_H de coefficients p_{jk} $(i, k \in H)$; on en tire 3 conséquences:

LEMME 1: Les pôles de $P(\lambda)$ de module 1 et intérieurs à D, s'il y en a, sont facilement calculables comme pôles de la résolvante d'une substitution finie que l'on peut former.

LEMME 2: Les pôles de $P(\lambda)$ de module 1 et intérieurs à D sont racines de l'unité, car M. Fréchet a démontré cette propriété pour $P_H(\lambda)$ (Fréchet, 2) [plus précisément, ces pôles satisfont à l'équation binome $z^{q'} = 1$].

LEMME 3: Si de G on ne peut extraire aucun groupe fermé fini, $P(\lambda)$ n'a pas de pôle de module 1 intérieur à D.

ETUDE DES POINTS COMMUNS À C ET AU CERCLE $|\lambda| = 1$; C n'aura de point commun avec le cercle $|\lambda| = 1$ que si l'équation $|\sum_j p_j e^{i\varphi(r+j)}| = 1$ admet des solutions en φ; cela exige que $e^{i\varphi(r+j)} = 1$ pour tous les indices j tels que $p_j > 0$; cela est toujours réalisé pour $\varphi = 0$, ce qui prouve que c a toujours le point 1 en commun avec le cercle $|\lambda| = 1$; mais pour qu'il existe une solution φ non nulle, il faut que les p_j satisfassent à certaines conditions, qu'il est facile de préciser dans chaque cas particulier; dans tous les cas, comme p_s est $\lesseqgtr 0$, on doit avoir: $e^{i\varphi(r+s)} = 1$; il ne peut donc y avoir qu'un nombre fini de solutions distinctes non nulles, et elles sont commensurables avec π; donc:

LEMME 4: Les points communs à la courbe c et au cercle $|\lambda| = 1$ sont en nombre fini et sont racines de l'utilité [plus précisément ils satisfont à l'équation binome $z^{(r+s)} = 1$].

Les lemmes 2 et 4 prouvent que:

THÉORÈME $II_{2,6}$: *Dans le cas homogène fini, les probabilités* P_{ik}^{n} *sont des fonctions asymptotiquement périodiques de* n.

L'une des périodes de ces fonctions est $(r + s)\, q!$

REMARQUE 1: c étant un point singulier de module 1 et d'ordre 1 pour l'un au moins des $p_{ik}(\lambda)$, le système homogène:

$$x_i + c \cdot \sum_k p_{ik}\, x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty)$$

admet au moins une solution non nulle.

Supposons en effet que c soit singulier de module 1 et d'ordre 1 pour $p_{i_0 k_0}(\lambda)$; les $c^n P_{i_0 k_0}^{n}$ convergent, au sens de Cesarò, vers une limite non nulle lorsque n croît indéfiniment; d'autre part, d'une façon générale, les $c^n P_{ik}^{n}$ convergent au sens de Cesarò vers des limites π_{ik}' de module ≤ 1. On a évidemment:

$$c^{n+1} \cdot P_{ik}^{n+1} = c \cdot \sum_j p_{ij}\ (c^n P_{jk}^{n})$$

Le 2^e membre de cette relation ne comprend jamais qu'un nombre fini de termes; on peut donc passer à la limite, ce qui donne :

$$\pi'_{ik} = c \cdot \sum_{j} p_{ij} \, \pi'_{ik}$$

Les nombres $x_i = \pi'_{i\,k_0}$ constituent donc une solution non nulle du système considéré.

REMARQUE 2: Supposons que l'une des limites π_{ik} soit nulle; cela signifie que 1 n'est pas point singulier pour $p_{ik}(\lambda)$, ou est singulier d'ordre < 1:

dans le premier cas, les P^n_{ik} étant tous $\geqq 0$, $p_{ik}(\lambda)$ n'admet aucum point singulier de module 1; P^n_{ik} tend donc vers 0 au sens ordinaire et exponentiellement.

Dans le 2e. cas, on peut appliquer à $p_{ik}(\lambda)$ le théorème II et on voit que P^n_{ik} tend vers 0 au sens ordinaire aussi rapidement au moins qu'une quantité de la forme $\dfrac{M}{n^\beta}$ (M_{ik} et $\beta > 0$).

REMARQUE 3: Etudions les racines réelles positives de l'équation:

$$y = \frac{x^r}{\sum_{j=-r}^{s} p_j \, x^{r+j}} \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r\,x^{r-1}\,N - x^r\,N'}{N^2} = \frac{x^{r-1}}{D^2}\,\{r\,N - x\,N'\}$$

où l'on a posé: $N = \sum_j p_j x^{r+j}$. Pour les valeurs positives de x, le signe de $\frac{dy}{dx}$ est celui de:

$$r N - x N' = r \cdot \sum_j p_j x^{r+j} - x \cdot \sum_j (r+j) p_j x^{r+j-1} = -\sum_j j \cdot p_j x^{r+j} = -\Delta(x)$$

$\Delta(x)$ s'annule une fois et une seule dans l'intervalle $(0, +\infty)$; d'autre part $y(0) = -1$, $y(1) = 0$, $y(+\infty) = -1$, $\Delta(1) = \sum_j j \cdot p_j$. On en conclut que dans le cas homogène fini positif, l'équation (4) admet, outre la racine 1, une racine réelle positive < 1;

dans le cas negatif, (4) admet, outre la racine 1, une racine réelle positive > 1;

dans le cas nul, (4) admet une racine double égale à 1.

Ceci étant plaçons nous dans le cas positif ou nul; supposons que les π_{ik} ne soient pas tous nuls; d'après la relation: $P_{ik}^{n+1} = \sum_j P_{ij}^n p_{jk}$, on a:

$$\pi_{ik} = \sum_j \pi_{ij} p_{jk} \qquad (5)$$

Pour une valeur donnée i_o de i, les $\pi_{i_o k}$ forment une solution non nulle du système homogène:

$$x_k = \sum_j p_{jk} x_j$$

Or ce système correspond à une substitution homogène finie; en reprenant les notations de chapitre V, d'après les remarques de la

page , on a, en désignant par h un nombre indépendant de i_0, et par u_1', u_2',... u_j',... les racines distinctes de l'équation $G(1, u) = 0$:

$$\pi_{i_0 k} = \sum_j u_j'^{k-1} R_j(k) + \begin{cases} 0 & \text{si } k > h \\ L_{k-1} & \text{si } k \leqq h \end{cases} \qquad (6)$$

D'ailleurs ne figurent effectivement dans (6) que les u' de module < 1; car $\sum_k \pi_{i_0 k}$ doit converger, et donc $|\pi_{i_0 k}|$ doit tendre vers 0 avec $\frac{1}{k}$; mais dans les cas positifs ou nuls, l'équation $G(1, u) = 0$, qui est l'équation aux inverses de l'équation (4), n'admet aucune racine réelle positive < 1 : en appliquant aux $\pi_{i_0 k}$ (pour $k > h$) une remarque de la p. , on voit que si les $\pi_{i_0 k}$ ne sont pas tous nuls pour $k > h$, ils ne pourront pas être tous $\geqq 0$, ce qui est impossible; il faut donc que l'on ait $\pi_{ik} = 0$ pour $k > h$, quel que soit i.

Supposons d'ailleurs que pour une valeur i_0 de i les $\pi_{i_0 k}$ $(k = 1, 2, ..., h)$ ne soient pas tous nuls: le système

$$x_k = \sum_{j=1}^{h} p_{jk} x_j \qquad (k = 1, 2, ..., h)$$

admettrait une solution non nulle, et par suite son transposé:

$$x_j = \sum_{k=1}^{h} p_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, ..., h)$$

admettrait au moins une solution non nulle (x_i): soit H le groupe des indices i pour lesquels $|x_i|$ atteint sa borne supérieure $|x|$: on montre, comme p. , que le groupe H est un groupe fermé fini. Ce qui prouve que:

THÉORÈME $III_{2,6}$: *Dans les cas homogènes finis positifs ou nuls, on peut déterminer un entier positif ou nul h, tel que les probabilités P^n_{ik} tendent vers 0 au sens ordinaire pour $k > h$; pour que $h = 0$, il suffit que le cas soit irréductible.*

Plaçons nous maintenant dans le cas négatif:

1.°) Dans le cas négatif irréductible, P^n_{ik} converge au sens ordinaire vers π_{ik} ; en effet, il suffit pour le montrer de prouver que $p_{ik}(\lambda)$ n'a pas de points singuliers d'ordre 1 et de module 1 autre que 1. Or s soit c un point singulier de module 1 et d'ordre 1, d'après la Remarque 1 précédente, le système

$$x_i = c \cdot \sum_k p_{ik}\, x_k$$

admet une solution non nulle, que nous écrivons sous la forme:

$$x_i = \sum_j v_j'^{\,i-1}\, Q_j(i) + \begin{cases} j'_{i-1} & \text{si } i \leq q-r \\ 0 & \text{si } i > q-r \end{cases} \qquad (7)$$

Parmi les v_j' n'interviennent que ceux qui ont un module ≤ 1; ceux qui ont un module égal à 1 sont racines de l'unité; ainsi

x_i est la somme d'une fonction périodique de i et d'une quantité tendant vers 0 et de la forme $\sum_{j'} v_{j'}^{i\,1} Q_{j'}(i)$, où l'on désigne par v_i', ceux des v_j' qui ont un module < 1; $|x_i|$ atteint sa borne supérieure $|x|$ pour au moins une valeur finie de i; car si cela n'avait pas lieu, $|x|$ serait la borne supérieure du module de la partie périodique de x_i; soit N la période de cette partie périodique, dont le module atteint sa borne supérieure par exemple pour la valeur i_0 de i, et par suite pour toute valeur de la forme $i_0 + l \cdot N$; or pour ces mêmes valeurs, la partie non périodique est de la forme: $\sum_{j'} (v_{j'}^{N})^l Q_j,(i)$; soit l'un des $v'_{j'}$, écrivons le sous la forme: $w \cdot e^{i\varphi}$, avec $0 < w < 1$; on a:

$$c = \frac{w^r\, e^{ir\varphi}}{\sum_j p_j\, w^{r+j}\, e^{i\varphi(r+j)}} \qquad (8)$$

Précisons d'autre part ce que c'est que N: les v_j' de module 1 satisfont à diverses équations binômes, et en particulier à toutes les équations $z^{r+j} = 1$ pour j tel que p_j soit > 0; N est donc un diviseur commun à tous ces $(r+j)$ si l'on avait $e^{iN\varphi} = 1$ [c'est à dire $(w\, e^{i\varphi})^N$ réel positif], $e^{i\varphi}$ serait solution de toutes les équations binômes $z^{r+j} = 1$ considérées: on aurait donc: $\left|\sum_j p_j\, w^{r+j}\, e^{i(r+j)\varphi}\right| = \left|\sum_j p_j\, w^{r+j}\right| = \sum_j p_j\, w^{r+j}$. On tirerait alors de (8):

$$\frac{w^r}{\sum_j p_j w^{r+j}} - 1 = 0 \qquad \text{avec} \quad 0 < w < 1$$

mais cela n'est pas possible dans le cas négatif; donc aucun des $v_j'^N$ n'est réel positif; en utilisant la remarque de la page , on montre sans difficultés que, pour certaines valeurs de l, $|x_{io+lN}|$ dépassera la borne supérieure du module de sa partie périodique.

Soit alors H l'ensemble non vide des indices i pour lesquels $|x_i| = |x|$; on montre, par le procédé habituel, que H est un groupe fermé; mais G est irréductible, H se confond avec G; on en déduit facilement que $c = 1$.

2.°) Dans le cas négatif irréductible, les π_{ik} ne dépendent pas de i; on a en effet:

$$\pi_{ik} = \sum_j p_{ij} \pi_{jk}$$

donc, pour une valeur fixe k_o de k, les π_{ik_o} forment une solution du système

$$x_i = \sum_j p_{ij} x_j$$

Nous connaissons une solution de ce système: la solution $x_i^{(o)} = 1$ $(i = 1, 2, .., \infty)$; supposons qu'il y en ait une autre, $x_i^{(1)}$ linéairement distincte de la précédente et non nulle. On démontre comme précédemment que $|x_i^{(1)}|$ atteint sa borne supérieure pour un ensemble non vide de valeurs de i; soit i_o l'une d'elles, on

peut supposer $x_{i_0}^{(1)} = 1$, et appeler H l'ensemble non vide des valeurs de i pour lesquelles on a: $x_i^{(1)} = 1$; on montre aisément que H est un groupe fermé; si G est irréductible, G = H, et $x_i^{(1)} = 1$ quel que soit i: d'où l'on déduit la propriété annoncée.

LEMME: Soit une substitution homogène finie A, à coefficients réels et positifs ou nuls, tels que: $\sum_j a_j = 1$, $\sum_j a_{ik} \leqq 1$ pour $i \leqq q$, l'égalité $\sum_k a_{ik} = 1$ n'ayant pas lieu pour au moins une valeur i_0 de i inférieure ou égale à q; supposons de plus qu'il n'existe pas d'ensemble H d'entiers positifs tel que $\sum_{k \in H} a_{ik} = 1$ pour $i \in H$; les limites au sens de Cesarò des a_{ik}^n sont toutes nulles.

En effet, on forme la quantité $\sum_j j \cdot a_j$; si elle est positive ou nulle, on raisonne comme nous avons fait pour la substitution P dans les cas positifs ou nuls; si elle est négative, on raisonne de la façon suivante: si les limites π_{ik} des a_{ik}^n ne sont pas toutes nulles, le système:

$$x_i = \sum_k a_{ik} x_k$$

admet une solution (x_i) non nulle; les $|x_i|$ atteignent leur borne supérieure $|x|$ sur un ensemble non vide H; H est fermé, et ne se confond pas avec G; mais G devrait être irréductible, d'où contradiction.

Soit alors le cas homogène fini le plus général (à l'exception des cas particulier écartés au début de ce chapitre); effectuons la décomposition en groupes fermés irréductibles; on fait ainsi apparaître au moins un, en tous cas un nombre fini de groupes fermés irréductibles: G_1, G_2,..., G_h, finis ou non. On a:

a) $P_{ik}^n = 0$ quel que soit n si $i \in G_j$, $k \in G - G_j$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$

b) si $i \in G_j$, $k \in G_j$, P_{ik}^n tend, au sens ordinaire, vers une limite P_k^j, indépendante de i lorsque i varie dans G_j; ceci, d'après le théorème III et les propriétés 1.° et 2.° précédentes.

c) si on avait $\sum_j G_j = G$, le cas serait décomposable; écartons ce cas; le calcul des P_{ik}^n relatifs à $G - \sum_j G_j$ ne fait intervenir que les p_{ik} relatifs à $G - \sum_j G_j$; on peut d'ailleurs appliquer à l'itération des p_{ik} le lemme précédent, car les quantités $\sum_{k \in G - \sum_j G_j} p_{ik}$ $[i \in G - \sum_j G_j]$ ne peuvent être toutes égales à 1, sans quoi on aurait un cas décomposable.

On peut résumer ces propriétés dans le théorème suivant:

THÉORÈME $IV_{2,6}$: *Dans le cas homogène fini, on peut déterminer un nombre fini* h (≤ 1) *d'ensembles distincts d'entiers positifs* G_1, G_2,..., G_h *tels:*

a) *que* $P_{ik}^n = 0$ *quel que soit* n *si* $i \in G_j$, $k \in G - G_j$ $(j = 1, 2, \ldots, h)$;

b) *que* P_{ik}^{n} *tende, au sens ordinaire, vers une limite* P_{k}^{j} *indépendante de* i *lorsque* i *varie dans* G_j ;

c) *que* P_{ik}^{n} *tende vers* 0, *au sens ordinaire, pour* $i \in G - \sum_j G_j$, $k \in G - \sum_j G_j$. (G *désigne l'ensemble de tous les entiers positifs*).

PARAGRAPHE 3: APPLICATION À UN PROBLÈME DE M. S. BERNSTEIN.

M. S. Bernstein a énoncé le problème suivant : étant donnés 3 évènements incompatibles E, F, G, de probabilités a, b, c, $(a + b + c = 1)$ un joueur gagne 1 si E se produit, perd 1 si F se produit, fait partie nulle si G se produit; on convient que, si à un moment donné son avoir est réduit à 0 et si à la partie suivante F se produit, il est dispensé de payer. On demande d'étudier le comportement, lorsque n croît indéfiniment, des probabilités P_{ik}^{n} de passer, en n partie, de l'avoir i à l'avoir k (1)

EXAMEN DE CAS PARTICULIERS.

CAS PARTICULIER 1 : $b = 0$; $a \gtrless 0$, $a + c = 1$, $c \gtrless 0$: en raisonnant directement, on voit tout de suite que

$$P_{ik}^{n} = \begin{cases} 0 \text{ si } i > k \text{ ou } k > i + n \\ C_{n}^{k-i}\, a^{k-i}\, c^{n-(k-i)} \text{ si } i \leqq k \leqq i + n \end{cases} \qquad C_{m}^{q} = \frac{(m+q)!}{m!\, q!}$$

(1) Nous ignorons dans quelle mesure M. S. Bernstein à résolu ce problème; nous croyons savoir que, supposant l'existence de limites non toutes nulles pour P_{ik}^{n}, il a calculé ces limites.

I en résulte que, lorsque n croît indéfiniment, P_{ik}^{n} tend vers 0 uniformément par rapport à i: on est dans un cas régulier exceptionnel.

Cas particulier 2: $b=0$, $a=1$: dans ce cas:

$$P_{ik}^{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } i+n \lesseqgtr k \\ 1 & \text{si } i+n=1 \end{cases}$$

Cas particulier 3: $b=0=a$, $c=1$: dans ce cas:

$$P_{ik}^{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \lesseqgtr k \\ 1 & \text{si } i=k \end{cases}$$

Cas particulier 4: $a=0$, $b \lesseqgtr 0$, $c \lesseqgtr 0$: les P_{ik}^{n}, dans ce cas, pour $i, k < r$ (r d'ailleurs quelconque) satisfont au système aux différences finies:

$$k \underset{=}{<} r \begin{cases} P_{ok}^{n+1} = P_{ok}^{n} \quad (=1 \text{ pour } k=0,\ 0 \text{ pour } k \lesseqgtr 0) \\ P_{ik}^{n+1} = b \cdot P_{i-1,k}^{n} + c \cdot P_{ik}^{n} \quad (i=1,2,\ldots r) \end{cases}$$

La résolution de ce système par les méthodes classiques donne:

$$P_{ik}^{n} = \pi_{ik} + c^{n} \cdot R_{ik}(n)$$

où $R_{ik}(n)$ est un polynôme en n de degré $r-1$; on doit avoir d'ailleurs:

$$\begin{cases} \pi_{ok} = \pi_{ok} \quad (=1 \text{ si } k=0, \text{ o si } k \lesseqgtr 0) \\ \pi_{ik} = b \cdot \pi_{i-1,k} + c\,\pi_{ik} \quad \text{ou:} \quad \pi_{ik} = \pi_{i-1,k} \quad (i = 1,2,..,r) \end{cases}$$

Il en résulte que les P^n_{ik} tendent vers 1 pour $k=0$, vers 0 pour $k \gtreqless 0$.

Cas particulier 5: $a = c = 0$, $b = 1$: on trouve facilement que P^n_{io} tend vers 1, tandis que P^n_{ik} $(k > 0)$ tend vers 0.

Cas général: a et b différents de zéro.

Dans tous les cas les P^n_{ik} sont évidemment liés par les relations:

$$P^{n+1}_{ik} = \sum_j P^n_{ij}\, p_{jk} \qquad (9) \qquad\qquad P^{n+1}_{ik} = \sum_j p_{ij}\, P^n_{jk} \qquad (10)$$

où l'on a posé: $p_{ik} = P^1_{ik}$ $(i, k = 0, 1, 2, .., \infty)$. Le tableau des p_{ik} est le suivant:

$$\begin{array}{ccccc} b+c & a & 0 & 0 & 0 \ldots \\ b & c & a & 0 & 0 \ldots \\ 0 & b & c & a & 0 \ldots \\ 0 & 0 & b & c & a \ldots \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & \vdots \end{array}$$

On est visiblement dans un cas homogène fini irréductible, dans l'hypothèse a et b différents de 0. Le théorème IV nous indique alors que *les* P_{ik}^n *tendent vers des limtes* P_k *indépendantes de* i. Nous préciserons ce résultat de la façon suivante:

Cas positif : $a > b > 0$: Le théorème III nous indique alors que les limites P_k sont toutes nulles. Un artifice précisera la manière dont les P_{ik}^n tendent vers 0; considérons les nombres α_0, α_1,..., α_i, .. donnés par les formules :

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_i = \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{i-1} \left[i \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 1 \right) + 1 \right] \quad (i \geq 1) \qquad (11)$$

Et considérons les quantités :

$$F_k(n) = \sum_i \alpha_i P_{ik}^n \qquad (12)$$

Nous n'avons pas à nous préoccuper de la convergence du second membre de (12), car quel que soit n, pour k fixe, les P_{ik}^n différents de 0 sont en nombre fini. Or on a:

$$F_k(n+1) = \sum_i \alpha_i P_{ik}^{n+1} = \sum_i \alpha_i \left(\sum_j p_{ij} P_{jk}^n \right) = \sum_j \left(\sum_i \alpha_j p_{ij} \right) P_{jk}^n$$

Or les α_i sont solution du système $S(\lambda)$:

$$\begin{cases} x_0 - \lambda(b+c)x_0 - \lambda b x_1 = 0 \\ x_n - \lambda a x_{n-1} - \lambda c \cdot x_n - \lambda b x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

pour $\lambda = \rho = \dfrac{1}{1-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$; par suite: $\sum_i \alpha_i p_{ij} = \dfrac{\alpha_j}{\rho}$, et:

$$F_k(n+1) = \frac{1}{\rho_n} F_k(n) = \frac{F_k(1)}{\rho^n}$$

Désignons par P_k^n la borne supérieure des P_{ik}^n lorsque i varie; P_{ik}^n est atteinte par P_{ik}^n pour une valeur fini de i, puisque les P_{ik}^n non nul sont en nombre fini, pour n et k fixes. On a d'ailleurs $\alpha_i \geqq 1$, $\rho > 1$, donc:

$$P_k^n < F_k(n) = \frac{F_k(1)}{\rho_n}$$

Il en résulte que *les* P_{ik}^n *tendent vers* 0 *uniformément lorsque i varie: on est dans un cas régulier exceptionnel.*

Cas négatif: $a > b$: D'après le théorème III, dans ce cas, *les limites* P_k *sont toutes nulles.*

Cas négatif: $b > a$: Nous allons effectuer dans ce cas le calcul des limites P_k ; nous commencerons par P_o et pour cela nous formerons $p_{oo}(\lambda)$ comme nous avons appris à le faire au paragraphe 4 du chapitre V; plus précisément, nous formons $q(\lambda) = 1 + \lambda p_{oo}(\lambda)$; en appelant u_1 la plus grande des 2 racines u_1, u_2, de l'équation :

$$G(\lambda, u) = \lambda a - (1-\lambda c)\, u + \lambda b\, u^2 = 0$$

on trouve :

$$q(\lambda) = \frac{1}{(a\, u_1 - b)\,\lambda}$$

Développons, au voisinage de $\lambda = 0$, la fonction $q'(\lambda) = \dfrac{1}{a\, u_1 - b}$; on a :

$$\lambda - q'(\lambda)\,[1-\lambda\,(c+2b)] + b(\lambda-1)\,[q'(\lambda)]^2 = 0$$

$$q'(\lambda) = \frac{1}{2b}\left\{ \frac{\sqrt{(1-h_1\lambda)\,(1-h_2\lambda)}}{1-\lambda} - \frac{1-\lambda\,(c+2b)}{1-\lambda} \right\}$$

où l'on a posé :

$$h_1 = 1-(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \qquad h_2 = 1-(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

Posons : $r(\lambda) = \sqrt{(1-h_1\lambda)(1-h_2\lambda)} = \Psi_0 + \Psi_1\lambda + .. + \Psi_n\lambda^n + ...$

$$s(\lambda) = \frac{\sqrt{(1-h_1\lambda)\,(1-h_2\lambda)}}{1-\lambda} = \varphi_0 + \varphi_1\lambda + .. + \varphi_n\lambda^n + ...$$

on a : $\varphi_n = \sum_{1=0}^{n} \Psi_1$, $0 < h_1 < 1$, $-1 < h_2 < 1$

$h_1 > h_2$, $h_1 \geqq -h_2$

$|h_1|$ et $|h_2|$ étant < 1, $\sqrt{(1-h_1\lambda)\,(1-h_2\lambda)}$ est holomorphe

pour $\lambda = 1$; donc la série $\sum_1 \Psi_1$ converge, c'est à dire que φ_n a une limite pour $n = \infty$, qui n'est autre que $\sqrt{(1-h_1)(1-h_2)} = b - a$.

On a d'ailleurs: $\dfrac{1-\lambda(c+2b)}{1-\lambda} = 1 + (a-b)\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$; il est facile de déduire de ces calculs que P_{oo}^{n} tend vers $\dfrac{b-a}{b} = P_o$

Pour les autres P_k, on peut opérer de même, mais il est plus simple de remarquer que l'on doit avoir:

$$P_k = \sum_j P_j \, p_{jk}$$

Les P_j sont donc une solution du système S(1); la résolution de ce système, par les procédés du chapitre V, est simple, et montre que S(1) n'admet qu'une solution, de la forme: $x_k = \mu \left(\dfrac{a}{b}\right)^k$; donc P_k est de cette forme, μ est determiné par le fait que $P_o = \dfrac{b-a}{b} = \mu$, et l'on trouve:

$$\boxed{P_k = \frac{b-a}{b}\left(\frac{a}{b}\right)^k}$$

On remarquera que $\sum_k P_k = \frac{b-a}{b} \times \frac{1}{1-\frac{a}{b}} = 1$

L'espérance mathématique d'un joueur jouant longtemps est donc, quel que soit son avoir initial *i*:

$$\sum_k k \cdot P_k = \frac{b-a}{b} \frac{\frac{a}{b}}{\left(1-\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{a}{b-a}$$

Le jeu prolongé sera donc avantageux on désavantageux pour lui suivant que son avoir initial sera $< \frac{a}{b-a}$ ou $> \frac{a}{a-b}$

SECTION III

Etude des Chaînes à liaisons complètes de M.M. Onicescu et Mihoc.

Dans un mémoire publié dans le Bulletin des Sciences Mathématiques [Onicescu-Mihoc, 1] M.M. Onicescu et Mihoc ont défini et étudié une catégorie très intéressante de probabilités en chaînes, qu'ils nomment chaînes à liaisons complètes: il nous a paru peut-être préferable de réserver la dénomination très généiale de chaîne à liaisons complètes à une catégorie de chaînes effectivement plus étendue, et nous désignerons les chaînes de M.M. Onicescu et Mihoc par l'expression de: *chaînes (O. M.)* Nous nous proposons ici d'apporter quelques compléments aux résultats de M. M. Onicescu et Mihoc.

Ces Auteurs considèrent un système aléatoire S, qui prend l'un ou l'autre des états E_1, E_2,..., E_m, E_{m+1} à la suite d'expériences successives numérotées: 1, 2,..., n,...; et ils supposent que, les probabilités effectives (et non apriori) des états E_j ayant été respectivement $x_s(n-1)$,..., $x_j(n-1)$, . , $x_{m+1}(n-1)$ à la $(x-1)^{\text{ième}}$ expérience, cette $(n-1)^{\text{ième}}$ expérience ayant d'autre part réalisé l'état E_i, les probabilités $x_k(n)$ des états E_k à la $n^{\text{ième}}$ expérience sont des fonctions déterminées des $x_j(n-1)$ et de i, soit:

$$x_k(n) = \varphi_{ik}\,[x_1(n-1), ., x_j(n-1),..., x_m(n-1)] \quad (k = 1,2,.,m) \quad (1)$$

$$(i = 1,2,..., m+1)$$

Nous ne faisons pas figurer $x_{m+1}(n-1)$ dans φ_{ik}, puisque $x_{m+1}(n-1) = 1 - \sum_{j=1}^{m} x_j(n-1)$; de même $x_{m+1}(n) = 1 - \sum_{j=1}^{m} x_j(m)$, de sorte que dans (1), il suffit de donner à k les valeurs $1,2,..., m$; ceci étant la chaîne est déterminée par la donnée des φ_{ik} et des probabilités $x_j(1)$ relatives à la première experience; nous poserons pour simplifier $x_j(1) = x_j$; il y a une probabilité déterminée, fonction des x_j, soit $P_s^n(x_1, x_2, ..., x_m) = P_s^n(x)$ pour que la n^{ieme} épreuve réalise l'état E_s ; on se propose principalement de déterminer le comportement des $P_s^n(x)$ lorsque n croît indéfiniment.

On a évidemment:

$$P_s^1(x) = x_s \quad ; \quad P_s^{n+1}(x) = \sum_{w=1}^{m+1} x_w\, P_s^n[\varphi_{w1}(x),\ \varphi_{w2}(x),..,\ \varphi_{wm}(x)]$$

De sorte que, algébriquement le problème peut se poser ainsi: considérons le domaine D, de l'espace euclidien à m dimensions, constitué par les points x, dont les coordonnées: $x_1, x_2 ., x_m$ satisfont aux conditions:

$$0 \leq x_i \leq 1 \qquad (2) \qquad\qquad \Sigma^m x_i \leq 1 \qquad (3)$$

Et soit $m+1$ transformations $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \varphi_{m+1}$ définiés dans D par les formules:

$$x_k' = \varphi_{ik}\,[x_1, x_2, \ldots, x_m] \qquad \begin{pmatrix} k=1,2,\ldots,m \\ i=1,2,\ldots,m,m+1 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

où les φ_{ik} satisfont aux conditions:

$$0 \leqq \varphi_{ik} \leqq 1 \qquad (2)' \qquad\qquad \Sigma^m \varphi_{ik} \leqq I \qquad (3)'$$

Nous noterons symboliquement les formules (4) par:

$$x' = \varphi_i(x) \qquad (4)'$$

On considère les fonctions $F^n(x)$ définies, lorsqu'on se donne $F^1(x)$, par la formule de récurrence:

$$F^{n+1}(x) = \sum_{w=1}^{m+1} x_w\, F^n\,[(\varphi_w(x)] \qquad (n=1,2,\ldots,\infty) \qquad (5)$$

On demande le comportement, lorsque n croît indéfiniment, de $F^n(x)$.

REMARQUE: Il y a lieu de rappeler une remarque, due à M. M. Onicescu·Mihoc (Onicescu·Mihoc, 2), d'après laquelle les chaînes (O·M) peuvent être rattachées aux chaînes simples constantes de Markoff: en effet, prenons, pour simplifier, le cas $m=1$; soit $x_1 = x$, $\varphi(x) = \varphi_{11}(x_1)$, $\Psi(x) = \varphi_{21}(x_1)$; (5) devient:

$$P_1^{n+1}(x) = x\, P_1^n\,[\varphi(x)] + (1-x)\, P_1^n\,[\Psi(x)] \qquad (6)$$

Soit $x(n)$ la probabilité effective, à l'experience n, de E_1; les $x(n)$ sont des variables aléatoires (assujetties à la condition $0 \leqq x(n) \leqq 1$) enchaînées; il y a une probabilité déterminée et indépendante de n, soit $p(\alpha, \omega)$ pour que, si $x(n) = \alpha$, $x(n+1)$ ait une valeur située dans l'ensemble ω; on a en effet:

$p(\alpha, \omega) = \alpha$ si ω contient $\varphi(\alpha)$ et non $\Psi(\alpha)$;

$p(\alpha, \omega) = 1-\alpha$ si ω contient $\Psi(\alpha)$ et non $\varphi(\alpha)$;

$p(\alpha, \omega) = 1$ si ω contient à la fois $\varphi(\alpha)$ et $\Psi(\alpha)$;

$p(\alpha, \omega) = 0$, dans les autres cas.

De sorte que les $x(n)$ $(n = 1, 2, , \infty)$ sont des variables enchaînées au sens de Markoff; dans certains cas, cette remarque permet d'étudier la chaîne (O·M) considérée, mais en général la chaîne de Markoff ainsi obtenue appartient a un type non encore étudié à notre connaissance; de sorte qu'une étude directe des chaînes (O·M) reste nécessaire, étude qui sera indirectement une contribution à l'étude des chaînes de Markoff.

Nous indiquerons 2 méthodes, de portée assez générale, et nous les appliquerons à l'étude d'un cas particulier.

PARAGRAPHE 1: MÉTHODE DE M. M. ONICESCU-MIHOC.

Le principe de notre première méthode est dû à M. M. Onicescu-Mihoc; nous nous bornerons à élargir quelques peu leurs résultats.

Nous poserons: $\varphi_{i,m+1}(x) = 1 - \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(x)$.

Supposons que le domaine D soit distancié, et appelons $\Delta(x^1, x^2)$ la distance des 2 points x^1 et x^2; nous disons qu'une transformation φ définie sur D est bornée, s'il existe un nombre positif M tel que l'on ait:

$$\Delta[\varphi(x^1), \varphi(x^2)] \leqq M \cdot \Delta[x^1, x^2] \tag{7}$$

φ étant bornée, nous appelons borne de φ et nous désignons par $|\varphi|$, le plus petit nombre M satisfaisant à (7) quels que soient x^1 et x^2; on a le lemme suivant:

LEMME: *Toute transformation de borne inférieure à 1, admet un point d'attraction et un seul sur D.*

Soit en effet x un point de D, et $x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ ses transformés successifs par la transformation φ de borne inférieure à 1; on a: $x^{n+1} = \varphi[x^n]$; soit Δ_n la distance de x^{n+1} à x^n, Δ_0 celle x^1 à x, $\Delta_{ik}(i > k)$ celle de x^i à x^k; on a: $\Delta_n \leqq |\varphi| \cdot \Delta_{n-1} \leqq \Delta_0 \cdot |\varphi|^n$; donc:

$$\Delta_{ik} \leqq \sum_{j=k}^{i-1} \Delta_j \leqq \Delta_0 \cdot \sum_{j=k}^{i-1} |\varphi|^j \leqq \Delta_0 \cdot \frac{|\varphi|^k}{1-|\varphi|} \tag{8}$$

Supposons alors que l'ensemble $x^1, \ldots, x^n, \ldots$ qui a au moins un point, d'accumulation, en ait plusieurs, et soit x', x'', deux d'entre eux; il existe une suite d'indices $n_1', n_2', \ldots, n_p', \ldots$ telle que $x^{n_p'}$ tende vers x'; et une autre, $n_1'', \ldots, n_q'', \ldots$ telle que $x^{n_q''}$

tende vers x''; ϵ étant un nombre positif arbitrairement petit, on peut trouver, en tenant compte de (8), un nombre N tel que, si l'on a simultanément $n_p' > N$; $n_q'' > N$, on a:

$$\Delta(x', x^{n_p'}) < \epsilon\ ;\ \Delta(x'', x^{n_q''}) < \epsilon\ ;\ \Delta(x^{n_p'}, x^{n_q''}) < \epsilon$$

d'où l'on déduit que: $\Delta(x', x'') < 3\epsilon$, c'est à dire que: $x' = x''$. Donc, les points $x^1, \ldots, x^n, \ldots$ tendent vers une limite unique, y; et comme on *a*: $x^{n+1} = \varphi(x^n)$, on a à la limite: $y = \varphi(y)$.

Soit alors z un point quelconque, $z^1, , z^n \ldots$ ses transformés successifs; on a:

$$z^{n+1} - y = \varphi(z^n) - y = \varphi(z^n) - \varphi(y)$$

donc: $\Delta(z^{n+1}, y) \leqq |\varphi| \cdot \Delta(z^n, y) \leqq |\varphi|^n \Delta(z, y)$

d'où il résulte que z^n tend vers y, ce qui établit le lemme.

On peut alors établir le théorème suivant:

THÉORÈME I_3: *Étant données les fonctions* $F^n(x)$ *définies, lorsqu'on se donne* $F^1(x)$, *par l'équation de récurrence* (5)

$$F^{n+1}(x) = \sum_{w=1}^{m+1} x_w\ F^n[\varphi_w(x)]$$

a) *s'il existe un nombre* L *tel que l'on ait:* $|F^1(x^1) - F^1(x^2)| \leqq L \cdot \Delta(x^1, x^2)$ *quel que soient* x' *et* x^2;

b) *s'il existe une valeur de* k, *soit* k_o, *telle que l'on ait quel que soit* i: $0 < \varphi_{ik_o}$;

c) *si les transformations* φ_i *sont bornées et si l'on a:* $|\varphi_i| \begin{cases} < 1 \text{ si } i = k_o \\ \leqq 1 \text{ si } i \geqq k_o \end{cases}$;

les fonctions $F^n(x)$ *tendent, lorsque* n *croît indéfiniment, vers une constante* F, *sauf peut être pour les points* x *tels que* $x_{k_o} = 0$.

Supposons en effet les conditions *a, b, c* réalisées; soit α un nombre positif tel que l'on ait: $\alpha < \varphi_{ik_o}$ quel que soit i, et quelconque par ailleurs; soit D_α le domaine, inclus dans D; défini par $\alpha \leqq x_{k_o}$.

1.°) la condition *c* entraîne l'égale continuité des $F^n(x)$ sur D_α; car si x^1 et x^2 sont 2 points de D_α, on a:

$$F^{n+1}(x^1) - F^{n+1}(x^2) = \sum_{w=1}^{m+1}(x_w^1 - x_w^2)\, F^n[\varphi_w(x^1)] + \sum_{w=1}^{m+1} x_w^2 \{ F^n[\varphi_w(x^1)] - F^n[\varphi_w(x^2)] \}$$

D est un domaine borné; en tenant compte de *a*, on voit qu'il existe un nombre h, indépendant de n, de x^1 et de x^2, tel que l'on ait:

$$\left| \sum_{w=1}^{m+1}(x_w^1 - x_w^2)\, F^n[\varphi_w(x^1)] \right| \leqq h \cdot \Delta(x^1, x^2)$$

Supposons d'autre part que l'on ait: $| F^n(x^1) - F^n(x^2) | \leqq M \cdot \Delta(x^1, x^2)$ quels que soient x^1 et x^2 sur D_α; on aura:

$$|\{F^n[\varphi_w(x^1) - F^n[\varphi_w(x^2)]\}| \leqq M \cdot |\varphi_w| \cdot \Delta(x^1, x^2)$$

et, puisque $|\varphi_w| \leqq 1$,

$$|\sum_{w=1}^{w+1} x_w^2 \{F^n[\varphi_w(x^1)] - F^n[\varphi_w(x^2)]\}| \leqq [x_{k_0}^2 |\varphi_{k_0}| + (1 - x_{k_0}^2)] \cdot M \cdot \Delta(x^1, x^2)$$

de sorte que:

$$|F^{n+1}(x^1) - F^{n+1}(x^2)| \leqq \Delta(x^1, x^2) \{h + M[x_{k_0}^2 |\varphi_{k_0}| + 1 - x_{k_0}^2]\} \quad (9)$$

Supposons que l'on ait: $M \geqq \dfrac{h}{\alpha(1 - |\varphi_{k_0}|}$; (9) donne:

$$|F^{n+1}(x^1) - F^{n+1}(x^2)| \leqq \Delta(x^1, x^2) \cdot M \{1 - x_{k_0}^2 + \alpha - (\alpha - x_{k_0}^2) |\varphi_{k_0}|\}$$

$$\leqq \Delta(x^1, x^2) \cdot M \{1 - (1 - |\varphi_{k_0}|)(x_{k_0}^2 - \alpha)\}$$

et comme $x_{k_0}^2 - \alpha < 0$, $1 - |\varphi_{k_0}| > 0$, il vient:

$$|F^{n+1}(x^1) - F^{n+1}(x^2)| \leqq M \cdot \Delta(x^1, x^2)$$

Si l'on a pris $M \geqq L$ et $M \geqq \dfrac{h}{\alpha(1 - |\varphi_{k_0}|)}$, on aura donc, quel que soit n, sur D_α,

$$|F^{n+1}(x^1) - F^{n+1}(x^2)| \leqq M \cdot \Delta(x^1, x^2)$$

ce qui établit l'égale continuité annoncée.

2.°) ce résultat obtenu, on peut appliquer au domaine D_α le raisonnement de M.M. Onicescu-Mihoc (Onicescu-Mihoc, 1, p. 182 et sq.); en fait, dans la formule (9) de leur Mémoire, tous les coefficients $x_i\, \varphi_{ij}\, \varphi_{ijk} \cdots \varphi_{ijk\ldots l}$ ne seront peut être pas positifs, mais le coefficient $x_{k_0}\, \varphi_{k_0 k_0}\, \varphi_{k_0 k_0 k_0} \cdot \varphi_{k_0 k_0 \cdots k_0}$ sera lui, toujours positif, et cela suffit.

Et comme α peut être aussi petit que l'on veut, le théorème est établi.

On voit facilement que notre énoncé est un peu plus général que celui du théorème correspondant de M.M. Onicescu-Mihoc (Onicescu-Mihoc, 1, p. 179). Ajoutons qu'on pourrait développer des considérations analogues dans le cas où les φ_{ik} seraient supposées dépendantes de n. Nous présenterons encore 2 remarques au sujet de cette méthode; ainsi qu'un théorème qui peut être utile:

REMARQUE 1: L'égale continuité des $F^n(x)$ sur D_α n'est pas nécessaire : il suffirait que cette égale continuité soit réalisée au voisinage du point d'attraction de φ_{k_0} ; et pour cela, il suffirait que la condition c soit satisfaite non sur D, mais seulement sur le domaine constitué par un voisinage du point d'attraction de φ_{k_0}, et ses transformés par application, un nombre quelconque de fois et dans un ordre quelconque, des transformations φ_i.

REMARQUE 2: Si l'on a, quel que soit i, $|\varphi_i| < 1$, la restriction relative aux points x tels que $x_{k_0} = 0$ peut être enlevée.

THÉORÈME: *Si les transformations* φ_i *ont un point d'attraction unique et commun,* y, *sur* D; *si pour tout point* x *on peut écrire:* $\Delta[y, \varphi_i(x)] \leq k \cdot \Delta(y, x)$ *avec* $0 > k > 1$, *quel que soit* i; *si enfin* $F^1(x)$ *est bornée, et uniformément continue au voisinage de* y: *lorsque* n *croît indéfiniment,* $F^n(x)$ *tend, uniformément par rapport à* x, *vers* $F^1(y)$.

Posons en effet: $\varphi_{i_1\, i_2\, i_3} = \varphi_{i_1\, i_2}[\varphi_{i_3 1}, \varphi_{i_3 2}, \ldots, \varphi_{i_3 m}]$

$$\varphi_{i_1\, i_2 i_r i_{r+1}} = \varphi_{i_1\, i_2 \cdots i_r}[\varphi_{r+1,1}\ \varphi_{r+1,2} \cdots,\ \varphi_{r+1,m}]$$

On peut supposer rangés dans un certain ordre les divers groupes d'indices $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ que l'on peut former, et poser:

$p_j^r(x) = x_{i_1}\, \varphi_{i_1\, i_2}\, \varphi_{i_1\, i_2\, i_3} \cdots \varphi_{i_1\, i_2 \cdots i_r}$ (10) avec: $\sum_j p_j^n(x) = 1$ (10)'

$$\phi_j^r = \varphi_{i_1} \cdot \varphi_{i_2} \cdots \varphi_{i_r} \qquad (10'')$$

On a alors: $F^{n+1}(x) = \sum_j p_j^n(x)\, F^1[\phi_j^n(x)]$ (11)

Ceci étant, par hypothèse, on a: $\Delta[y, \phi_j^n(x)] \leq k^n \cdot \Delta(y, x)$; on peut donc trouver un nombre λ, indépendant de x et de n, tel que l'on ait:

$$|F^1(\phi_j^n(x)] - F^1(y)| < \lambda \cdot k^n$$

du moins si n est assez grand; on a par suite, en tenant compte de (10)',

$$F^{n+1}(x) = F^1(y) + R^n(x) \quad \text{avec} \quad |R^n(x)| < \lambda \cdot k^n$$

ce qui établit le théorème puisque $k > 1$.

PARAGRAPHE 1 : MÉTHODE POUR LE CAS HOLOMORPHE.

Nous appelons *cas holomorphe* le cas où les φ_{ik} sont holomorphes; la méthode suivante est relative à ce cas; telle que nous l'exposerons, elle n'est applicable que dans le cas où $m = 1$, mais très vraisemblablement elle pourrait être étendue aux cas où m est quelconque.

Cette méthode résulte de façon évidente du théorème que nous allons établir et énoncer.

x désignant une variable complexe, considérons l'équation de récurrence

$$F^{n+1}(x) = a(x)\, F^n[\varphi(x)] \tag{12}$$

relative à des fonctions $F^n(x)$ définies sur le domaine $|x| \leqq 1$, et qui définit ces $F^n(x)$ si l'on se donne $F^1(x)$; il faut naturellement supposer $|\varphi(x)| \leqq 1$; faisons les hypothèses suivantes:

δ) les fonctions $F^1(x)$, $a(x)$, $\varphi(x)$ sont holomorphes dans un cercle $|x| \leqq 1 + \rho$ $(\rho > 0)$;

ϵ) on a: $|\varphi(x)| < 1$ pour $|x| \leqq 1$.

On peut alors déterminer 2 nombres positifs ρ' et M, tels que l'on ait: $\rho' \leq \rho$; $M \leq 1$; $|\varphi(x)| \leq M$ pour $|x| \leq 1 + \rho'$.

Soit c le cercle $|x| < 1 + \rho'$; on peut poser, dans c :

$$F^n(x) = f_o^n + f_1^n x + f_2^n x^2 + ... + f_q^n x^q + ... \qquad (13)$$

$$a(x) = a_o + a_1 x + .. + a_q x^q + ... \qquad (14)$$

$$\varphi(x)^\lambda = \varphi_o^\lambda + \varphi_1^\lambda x + .. + \varphi_q^\lambda x + ... \qquad (15) \quad (\lambda = 1, 2, .., \infty)$$

et par convention.

$\varphi(x)^\circ = 1$, $\varphi_o^\circ = 1$, $\varphi_q^\circ = 0$ pour $q > 0$.

On a alors:

$$F^n[\varphi(x)] = \sum_r \left(\sum_q f_q^n \varphi_r^q \right) x^r$$

$$a(x)\, F^n[\varphi(x)] = \sum_r \left[\sum_q f_q^n \left(\sum_{j=0}^{r} a_j \varphi_{r-j}^q \right) \right] x^r$$

En égalant les coefficients de x^r dans les 2 membres de (12), on trouve:

$$f_r^{n+1} = \sum_q f_q^n \left(\sum_{j=0}^{r} a_j \varphi_{r-j}^q \right) \quad \text{et, en posant } s_{ik} = \sum_{j=0}^{i} a_j \varphi_{i-j}^k \qquad (16)$$

$$f_i^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} s_{ik} f_k^n \qquad (17)$$

Or, on a évidemment: $a(x)\,\varphi(x)^{\lambda} = \sum_{i} s_{ik}\, x^{i}$ (18)

Sur c, $a(x)\,\varphi(x)^{k}$ est holomorphe et bornée supérieurement par $N \cdot M^{k}$, ou $N \cdot 1$ si $k = 0$, en appelant N la borne supérieure de $|a(x)|$ sur c; on a donc dans tous les cas, d'après l'inégalité de Cauchy:

$$|s_{ik}| \leq \frac{N}{(1+\rho')^{i}} \tag{19}$$

Considérons alors l'espace (A) des points x dont les coordonnées x_k $(k=0,1,2,..\infty)$ sont telles que $\sum_{k} |x_k|$ converge; on voit facilement que dans cet espace les formules

$$x_i' = \sum_{k} s_{ik}\, x_k$$

définissent une substitution linéaire S qui est d'ailleurs la transposée d'une substitution de Dixon: d'après ce que nous avons vu à la section III, on peut écrire, quelque soit n:

$$S^{n} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\sum_{l=1}^{m_j} S^{j,l} \cdot n^{l}}{\lambda_j^{n}} + S(n) \tag{20}$$

en désignant par $S^1 = S$, S^2,..., S^n les itérées successives de S; dans cette formule:

λ_1, λ_2,..., λ_s sont des nombres de module ≤ 1;

$S^{j,l}$ sont des substitutions bien déterminées, indépendantes de n;

$S(n)$ est une substitution dépendant de n, pour laquelle on a: $\| S(n) \| \leq \frac{M}{h^n}$ où M est un nombre positif quelconque et h un nombre positif > 1;

les substitutions $S(n)$ et $S^{j,l}$ sont des substitutions dans (A), c'est à dire qu'en désignant par g_{ik} les coefficients de l'une quelonque d'entre elles, il existe des nombres positifs M_i tels que l'on ait:

$$| g_{ik} | \leq M_i ; \quad \sum_i M_i < \infty .$$

En désignant par s^n_{ik} $s_{ik}(n)$, $s^{j,l}_{ik}$ les coefficients de S^n, $S(n)$, $S^{l,j}$, on a d'après (20):

$$s^n_{ik} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\sum_{l=0}^{m_j} s^{j,l}_{ik} \cdot n^l}{\lambda_k^n} + s_{ik}(n) \qquad (21)$$

On montre facilement que les séries entières $\sum_i \left(\sum_k s^{j,l}_{ik} f^l_k\right) x^i$ et $\sum_i \left(\sum_k s_{ik}(n) f^l_k\right) x^i$ ont des rayons de convergence supérieurs à 1; on peut donc écrire, sur le cercle $|x| \leq 1$, et puisque $f^{n+1}_k = \sum_k s^n_{ik} f^l_k$,

$$F^{n+1}(x) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\sum_{l=0}^{m_j} F^{j,l}(x) \cdot n^l}{\lambda_j^n} + F(x, n) \qquad (22)$$

où les $F^{j,l}(x)$ et $F(x, n)$ sont des fonctions holomorphes sur le cercle $| x | \leq 1$, et où de plus $F(x, n)$ tend uniformément vers 0

quand n croît indéfiniment; en effet: $F(x, n) = \sum_i (\sum_k s_{ik}(n) f_k^1) x^i$; donc, sur $|x| \leqq 1$, $|F(x, n)| \leqq \sum_i (\sum_k |s_{ik}(n)| \, |f_k^1|)$; cette série double étant absolument convergente, on peut l'écrire: $\sum_k |f_k^1| \cdot (\sum_i |s_{ik}(n)|)$; or on a vu (p) que $\sum_i |s_{ik}(n)| \leqq \| S(n) \| \leqq \frac{M}{h^n}$; donc:

$$|F(x, n)| \leqq \frac{M}{h^n} \cdot \sum_k |f_k^1|$$

ce qui établit la propriété annoncée.

Considérons maintenant l'équation plus générale:

$$F^{n+1}(x) = \sum_{w=1}^{t} a_w(x) \, F^n[\varphi_w(x)] \qquad (12)'$$

Supposons que: α) $F'(x)$, $a_w(x)$, $\varphi_w(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, t)$ sont holomorphes dans le cercle $|x| \leqq 1 + \rho$ $(\rho > 0)$;

et que: e) $|\varphi_w(x) < 1$ pour $|x| \leqq 1$ $(j = 1, 2, \ldots, t)$;

en opérant comme on l'a fait pour l'équation (12), on obtiendra:

$$f_i^{n+1} = \sum_k (\sum_j \cdot s_{ik}^{(w)}) f_k^n$$

avec: $s_{ik}^{(w)} = \sum_{l=0}^{i} a_{w,l} \, \varphi_{w,i-l}^{k}$; on aura donc: $|s_{ik}^{(w)}| \leqq \frac{N^{(w)}}{(1+\rho')^i}$

donc: $\left|\sum_{j}^{(w)} s_{ik}\right| \leq \frac{\sum_{j} N^{(w)}}{(1+\rho')^{i}} = \frac{N}{(1+\rho')^{i}}$ avec $N = \sum_{j} N^{(w)}$.

De sorte que le raisonnement précédent peut être repété, et $F^{n+1}(x)$ est encore de la forme (22); donc:

THÉORÈME II_2: *x désignant une variable complexe, considérons les fonctions* $F^{n}(x)$ $(n = 1, 2,..., \infty)$ *définies, lors qu'on se donne* $F^{1}(x)$, *par l'équation de récurrence* $F^{n+1}(x) = \sum_{w=1}^{t} a_w(x) F^{n}[\varphi_w(x)]$;

d) si les fonctions $F^{1}(x)$, $a_w(x)$, $\varphi_w(x)$ $(w = 1, 2,..., t)$ *sont holomorphes dans un cercle* $|x| \leq 1 + \rho$ $(\rho > 0)$;

e) si $|\varphi_w|(x)| < 1$ *pour* $|x| \leq 1$ $(w = 1, 2,..., t)$;

on peut écrire, quel que soit n:

$$F^{n+1}(x) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\sum_{l=0}^{m_j} F^{j,l}(x) \cdot n^{l}}{\lambda_j^{n}} + F(x, n) \qquad (22)$$

où les nombres λ_j $(j = 1, 2,..., s)$ *ont des modules inférieurs ou égaux à 1; où les coefficients* $F^{j,l}(x)$ $F(x, n)$ *sont des fonctions holomorphes pour* $|x| \leq 1$; *où* $F(x, n)$ *tend uniformément vers* 0, *sur le cercle* $|x| \leq 1$.

REMARQUE 1: on peut considérer des équations (12) ou (12)' relatives non pas au cercle $|x| \leq 1$, mais à un domaine à peu près quelconque; en vertu du théorème de Riemann sur la trans-

formation conforme d'un domaine quelconque en un cercle donné, on voit que le cas général se ramène immédiatement au cas particulier traité.

REMARQUE 2: Revenons à l'équation (12); supposons toujours vérifiée la condition δ, remplaçons ϵ par:

ϵ_1') $|\varphi(x)| \leqq 1$ pour $|x| \leqq 1$

ϵ_2') on a: $\varphi(y)=y$ pour une valeur y de x de module <1; en vertu du théorème de Riemann, on peut supposer $y=0$; alors le lemme de Schwartz nous indique que pour toute valeur de x de module <1, on a: $|\varphi(x)|<|x|$, à moins que $\varphi(x)$ ne soit de la forme $e^{i\theta}\cdot x$, cas d'exception que nous éliminons en supposant aussi que;

ϵ_3') $\varphi(x)$ n'est pas de la forme $e^{i\theta}\cdot x$;

Soit alors α un nombre positif <1; d'après ce qui précède, la transformation $x'=\varphi(x)$ transforme le domaine $|x| \leqq \alpha$ en un domaine complètement intérieur: donc le théorème précédent est applicable, pour ce domaine; et comme α est aussi voisin de 1 qu'on le veut, le théorème est applicable pour $|x|<1$, mais non peut être pour $|x|=1$.

Envisageons maintenant l'équation (12)' sous les conditions d et

e_1') $|\varphi_w(x) \leqq 1$ pour $|x| \leqq 1$;

e_2') on a: $\varphi_w[y_w]=y_w$ avec $|y_w|<$ $(w=1,2,\ldots,t)$;

e_3') $y_1=y_2=\ldots=y_t$;

on pourra supposer $y_1 = y_2 = \ldots = y_t = 0$; d'après ce qui précède, le Théorème II_4 sera encore applicable, sauf peut être pour $|\tau| = 1$.

Paragraphe 3: Application des Méthodes précédentes au cas alternatif linéaire.

Avec M.M. Onicescu Mihoc, nous appelons *cas alternatif*, le cas où $m = 1$. On est alors conduit, comme nous l'avons vu p , à l'équation:

$$P^{n+1}(x) = x\,P^n[\varphi(x)] + (1-x)\,P^n[\Psi(x)]\;;\; P^1(x) = x\;;\; 0 \leqq x \leqq 1. \quad (6)$$

Nous ne traiterons qu'un cas particulier de l'équation (6), mais nous aurons besoin pour cela de 2 lemmes d'une portée plus large, que nous indiquerons donc d'abord.

Soit l'équation (6) et λ un nombre de module inférieur ou égal à 1, tel qu'il existe une solution $F(\tau)$ non nulle bornée et continue à l'équation:

$$F(x) = \lambda\{x\,F[\varphi(x)] + (1-x)\,F[\Psi(x)]\} \quad 0 \leqq x \leqq 1 \quad (23)$$

Lemme 1: $|\lambda| = 1$

Si en effet on appelle $|F|$ la borne supérieure de $|F(x)|$, comme on a, d'après (11), $F(x) = \lambda^n\{\sum_j p_j^n(x)\,F[\phi_j^n(x)]\}$, quel que soit n, on a: $|F(x)| \leqq |\lambda|^n \cdot |F|$ quel que soit n, ce qui est impossible si $|\lambda| < 1$.

LEMME 2: Si l'une au moins des 2 fonctions $\varphi(\lambda)$ et $\Psi(x)$, $\varphi(x)$ par exemple, ne prend pas les valeurs 0 et 1, sauf peut être pour $x = 0$ ou $x = 1$, et si elle possède un point d'attraction unique, λ est racine de l'unité.

En effet, 2 cas sont possibles:

1.°) $|F(x)|$ atteint sa borne supérieure en un point x_0 de l'intervalle (0, 1), autre que 0 et que 1; dans la formule

$$F(x) = \lambda^n \left\{ \sum_j p_j^n(x)\ F\left[\phi_j^n(x)\right] \right\} \qquad (24)$$

faisons $x = x_0$: certains des coefficients $p_j^n(x)$ sont positifs; on en déduit, en faisant croître n indéfiniment, que $|F(x)|$ atteint sa borne supérieure en particulier au point d'attraction y de $\varphi(x)$; 2 cas sont alors possibles:

α) $|F(x)|$ atteint sa borne inférieure m en un point x, tel que $0 < x_1 < 1$; il en résultera que $|F(y)| = m$; donc $|F| = m$, et $\lambda = 1$.

β) $|F(x)|$ n'atteint m qu'en 0 ou 1: c'est à dire en un nombre fini de points, que je désigne d'une façon générale par $e_1, e_2, \ldots, e_q$; soit l'un quelconque d'entre eux, e_1, par exemple; si dans (24) on fait $x = e_1$, on détermine au moins un point e_1^n pour lequel on a: $F(e_1^n) = \dfrac{F(e_1)}{\lambda^n}$, et cela quel que soit n.

D'ailleurs e_1^n appartient nécessairement au groupe $e_1, \ldots, e_q$: dans la suite indéfinie $e_1^0 = e_1$, $e_1^1, \ldots e_1^n \ldots$ il y a au moins 2 points de rang différent qui sont identiques: on en déduit que λ est racine de l'unité.

2.°) $|F(x)|$ n'atteint sa borne supérieure que pour $x = 0$, ou $x = 1$; c'est à dire en un nombre fini de points: le raisonnement β) prouve encore que λ est racine de l'unité.

En fait, dans le cas alternatif, le groupe $e_1, \ldots, e_q$ ne comporte au plus que 2 points, de sorte que λ ne peut être égal qu'à 1 ou à -1.

Cas linéaire alternatif.

Nous disons que l'on est dans le cas – alternatif – *linéaire*, lorsque $\varphi(x)$ et $\Psi(x)$ sont linéaires: nous poserons alors: $\varphi(x) = ax + b$, $\Psi(x) = cx + d$, ce qui donne; avec: $0 \leq b \leq 1$, $0 \leq a+b \leq 1$; $0 \leq d \leq 1$, $0 \leq c + d \leq 1$:

$$P^{n+1}(x) = x\,P^n(ax + b) + (1-x)\,P^n(cx + d) \qquad (25)$$

Pour l'étude de (25), nous distinguerons plusieurs cas: observons dès maintenant qu'il n'est pas nécessaire de les examiner tous, car la transformation: $x = 1 - y$, $y = 1 - x$ transforme l'équation (25) en l'équation:

$$P'^{n+1}(y) = y\,P'^{n}[c\,y + (1-c-d)] + (1-v)\,P'^{n}[ay + (1-a-b)] \quad (25)'$$

qui est du même type que (25) et qui en somme change a en ϵ, b en $1-c-d$, c en a, d en $1-a-b$. Nous rassemblerons d'ailleurs les résultats en un tableau récapitulatif final.

1er. Cas: $|a|$ et $|c|$ sont tous deux différents de 1: Nous aurons évidemment résolu le problème qui nous intéresse, si nous résolvons l'équation (25) pour $|x| \leqq \rho$, avec $\rho \geqq 1$; ou encore, en posant $x = \rho y$, si nous résolvons, pour $|y| \leqq 1$, l'équation:

$$P^{'n+1}(y) = \rho\,y\,P^{'n}\left[ay + \frac{b}{\rho}\right] + (1-\rho\,y)\,P^{'n}\left(c\,y + \frac{d}{\rho}\right) \quad (26)$$

où $P'^{n}(y) = P^{n}(\rho\,y)$; or, si ρ est assez grand, on a:

$$\left|ay + \frac{b}{\rho}\right| < 1, \quad \left|c\,y + \frac{d}{\rho}\right| < 1, \quad \text{pour } |y| \leqq 1;$$

sous l'hypothèse $|a|$ et $|c| < 1$, naturellement. D'après le théorème II_4, on peut donc écrire, en revenant à la variable x:

$$P^{n+1}(x) = \sum_{j=1}^{s} \frac{\sum_{l=0}^{m_j} P^{j,l}(x) \cdot n^l}{\lambda_j^n} + P(x, n) \quad (27)$$

du moins pour $|x| \leqq \rho$; mais si je considère maintenant une valeur $\rho' > \rho$, j'en déduirais de la même façon:

$$P^{n+1}(x) = \sum_{j=1}^{s'} \frac{\sum_{=0}^{m_j'} P'^{j,l}(x) \cdot n^l}{\lambda_j'^n} + P'(x, n) \qquad (27)'$$

valable pour $|x| \leqq \rho'$; (27) et (27)' doivent donc être identiques pour $|x| \leqq \rho$, et on en déduit simplement que (27) est valable quel que soit x.

Soit alors λ l'un des λ_j; $|\lambda| \leqq 1$; d'après ce que nous avons vu à la section III, il correspond à λ au moins une fonction fondamentale $F(x)$, holomorphe et non identiquement nulle, telle que:

$$F(x) = \lambda \{ x F(ax + b) + (1-x) F(cx + d) \} \qquad (28)$$

De sorte que, d'après le lemme 1, $|\lambda| = 1$; on voit de même que $m_j = 0$; pour préciser, distinguons 2 cas:

A) $a = c = 0$: dans ce cas, la chaîne (O·M) se réduit à une chaîne de Markoff; les résultats sont connus, nous les rappelerons dans le tableau récapitulatif.

B) l'un au moins des 2 nombres a et c est non nul: soit par exemple $a \lesseqgtr 0$; le lemme 2 est alors applicable, car $\varphi(x) = ax + b$ a sûrement un point d'attraction et ne prend les valeurs

0 et 1 que pour $x = 0$ ou $x = 1$: de sorte que λ ne peut être égal qu'à 1 ou à -1; mais alors, dans (28):

ou bien $F(x)$ est une constante, et alors $\lambda = 1$

ou bien $F(x)$ n'est pas une constante: comme λ est réel de toutes façons, on peut toujours supposer $F(x)$ réelle aussi; supposons que $|F(x)|$ atteigne son maximum en un point x_0 autre que 0 et 1: on voit alors facilement que $|F(x)|$ atteindra aussi son maximum en une infinité d'autres points déduits de x_0 par application des transformations $x' = \varphi(x)$, $x' = \Psi(x)$; (il y aurait un cas d'exception, celui où x_0 serait le point d'attraction commun de $\varphi(x)$ et de $\Psi(x)$; mais alors, d'après le théorème de la page $F(x)$ serait nécessairement une constante); mais si $|F(x)|$ atteint son maximum en une infinité de points, comme $F(x)$ est réelle et holomorphe, on démontre facilement que $F(x)$ est constante: donc $|F(x)|$ n'atteint son maximum que pour $x = 0$ ou 1; on raisonnerait de même d'ailleurs pour le minimum de $|F(x)|$; or, on a: $F(0) = \lambda F(d)$; $F(1) = \lambda F(a+b)$; d'où il faut conclure que $d = 0$, $a + b = 1$, $\lambda = 1$; donc:

λ ne peut prendre que la valeur 1, et la prend effectivement;

$F(x)$ est une constante, sauf peut être si: $d = 0$, $a + b = 1$; nous allons montrer que effectivement, si $d = 0$, $a + b = 1$, il existe une fonction $F(x)$ satisfaisant à (28), avec $\lambda = 1$; pour

cela, avec les notations du paragraphe précédent, formons le tableau des s_{ik} correspondant à (26); on trouve: $s_{ik} = \frac{\rho_i}{\rho^k} t_{ik}$, où t_{ik} ne dépend pas de ρ; le tableau des t_{ik} est le suivant; en remplaçant b par $(1-a)$:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-a)+c & (1-a)^2 & . & . \\ 0 & a-c & 2a(1-a)+c^2 & . & . \\ 0 & 0 & a^2-c^2 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . \end{array}$$

On remarque que $\sum_{i>0} t_{ik} = 1$, pour $k > 0$; pour que $F(x)$, non constante, existe, il faut et il suffit que le système:

$$x_i - \sum_{k>0} s_{ik}\, x_k = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots \infty)$$

admette une solution (x_k) telle que $|x|$ soit borné supérieurement: or, on satisfait au système:

$$y_i - \sum_{k>0} t_{ik}\, y_k = 0 \qquad (i = 1, 2, .., \infty)$$

en posant: $y = 1$; d'où l'on déduit, pour le système précédent, la solution bornée: $x_i = \frac{1}{\rho^i}$; on en déduit alors que $P^n(x)$ tend vers une fonction holomorphe $P(x)$ dépendant effectivement de x.

2ª. Cas $a = 1$; distinguons encore plusieurs cas:

A) $c = 1$; alors $P^n(x) = x$, quel que soit n

B) $c = -1$, $\Psi(x) = (1-x)$; alors, si l'on reprend la formule (11), on voit que les $\phi_j^n(x)$ ne peuvent prendre que 2 valeurs : x et $1-x$; $\phi_{j'}^n(x)$ celles qui donnent x, $\phi_{j''}^n(x)$ les autres posons: $\bar{p}_1^n(x) = \sum_{j'} p_{j'}^n(x)$; $\bar{p}_2^n(x) = \sum_{j''} p_{j''}^n(x)$; avec les notations de la page , on voit que:

$$\bar{p}_1^n(x) = \text{prob.}\,\{x(n) = x\}\ ;\quad \bar{p}_2^n(x) = \text{prob.}\,\{x(n) = 1-x\}$$

Or les $x(n)$ forment évidemment une chaîne de Markoff très simple dont le tableau caractéristique est:

$$\begin{vmatrix} x & 1-x \\ x & 1-x \end{vmatrix}$$

de sorte que $\bar{p}_1^n(x)$ et $\bar{p}_2^n(x)$ ont des limites, $\bar{p}_1(x)$ et $\bar{p}_2(x)$; alors,

d'après (11), $P^n(x)$ tend une limite dépendant de x et égale à:

$$P(x) = \bar{p}_1(x) \cdot x + \bar{p}_2(x) \cdot (1-x)$$

C) $|c| < 1$; nous distinguerons encore plusieurs sous-cas, mais de toute façon, observons que $P^{n+1}(1) = P^n(1) = 1$.

α) soit $d < 1$, $c + d < 1$; soit α un nombre tel que l'on ait: $cx + d \leqq \alpha$, quel que soit x; soit D_α le domaine $0 \leqq x \leqq 1-\beta$; Ψ à un point d'attraction, $\frac{d}{s-c}$: en appliquant à D_α les raisonnements du paragraphe 1, puisque $|\varphi| = 1$, $|\varphi| = |c| < 1$, on trouve que:

$$P^n(x) \text{ tend vers } \frac{d}{1-c} \text{ pour } x \gtrless 1$$

β) soit $d = 1$, $c + d < 1$; alors on a: $0 < c + d$; soit α un nombre tel que: $\alpha \leqq cx + d$ quel que soit x; considérons le domaine $D_{\alpha,\beta}$ défini par: $\alpha \leqq x \leqq \beta$ $(\beta > \alpha)$; sur ce domaine, $1-\varphi$, et $1-\Psi$ restent supérieurs à 0: le même procédé que précédemment montre que:

$$P^n(x) \text{ tend vers } \frac{d}{1-c} = \frac{1}{1-c} \text{ pour } 0 < x < 1$$

et: $P^{n+1}(0) = P^n(1)$, donc $P^n(0)$ tend vers 1.

γ) $d<1$, $c+d=1$; alors: $0<d$; posons $x^0=x$, et soit x^n le $n^{\text{ième}}$ transformé de x par Ψ; x^n tend vers 1, uniformément. Soit N un entier tel que l'on ait, pour $n>N$: $1-\epsilon \leqq P^1(x^n) \leqq 1$; (11) peut s'écrire:

$$P^{n+1}(x)=\sum_j \bar{p}_j^n(x)\ P^1(x^j)=\sum_{j=0}^{N} \bar{p}_j^n(x)\ P^1(x^j)+\sum_{j>N} \bar{p}_j^n(x)\ P^1(x^j)$$

$\bar{p}_j^n(x)$ est la somme de c_n^j termes, dont chocun est un produit de n facteurs de la forme x^i ou $(1-x^k)$ $(i,k\leqq j)$; il existe un nombre $h<1$, tel que l'on ait: $x^i\leqq h$, $1-x^k\leqq h$, pour $i,k\leqq N$; on peut d'ailleurs prendre h indépendant de x dans le domaine $0<\alpha\leqq x\leqq 1-\alpha<1$; α étant aussi petit qu'on le vent; on a donc: $\bar{p}_j^n(x)\leqq c_j^n\cdot h^n$, pour $j\leqq N$, de sorte que $\bar{p}_j^n(x)$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$, uniformément par rapport à j et x (sous les conditions précisées plus haut); on en déduit aisément que $P^n(x)$ tend vers 1 (uniformément dans le domaine $\alpha<x<1-\alpha$); il reste à examiner le cas de $x=0$: $P^{n+1}(0)=P^n(d)$; donc $P^n(0)$ tend vers 1.

δ) $d=1$, $c+d=1$: le raisonnement précédent peu modifié donne encore que $P^n(x)$ tend uniformément vers 1.

3$^{\text{er}}$. Cas: $a=-1$: A) $c=-1$: on trouve immédiatement: $P^{2n+1}(x)=x$, $P^{2n}(x)=1-x$.

B) $0<|c|<1$; on trouve facilement que si $0<d<1$, $0<c+d<1$, $P^n(x)$ tend vers une limite P indépendante de x; pour les autres cas, il est bon de remarquer que l'on a:

$$P^{n+2}(x)=x(1-x)\,P^n(x)+x^2\,P^n[-cx+c+d]+(1-x)(cx+d)\cdot$$

$$\cdot\,P^n(-cx+1-d)+(1-x)[-cx+1-d]\,P^n[c^2x+cd+d].$$

Considérons l'opération linéaire U_1: $G(x)=x(1-x)\,F(x)$ et l'opération U_2:

$$U_2=x^2\,F[-cx+c+d]+(1-x)(cx+d)\,F(-cx+1-d)+$$

$$+(1-x)(-cx+1-d)\,F(c^2x+cd+d)$$

Il résulte des raisonnements de la page que U_2 est complètement continue; tandis que U_1 a un rayon polaire $\geqq 4$, puisque $x(1-x)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$; d'après le théorème , il en résulte que $P^n(x)$ converge au sens de Cesarò; plus précisément si:

$d=0$, $0<c<1$ $P^n(x)$ tend vers une limite indépendante de x, P;

$d=1$, $0>c>-1$, $P^{2n}(x)$ tend vers une limite $P^1(x)$ dépendant de x; et P^{2n+1} vers une autre limite $P^2(x)$, dépendant aussi de x;

$c+d=0$, $0\leqq d<1$, $P^n(x)$ tend vers P, indépendante de x;

$c + d = 1$, $0 < d < 1$, $P^n(x)$ tend vers P, indépendante de x;

C) $|c| + 0$: connue pour le cas 2ª., B, on se ramène à une chaîne de Markoff; on trouve que si.

$d \lesseqgtr 1$, $P^n(x)$ tend vers une limite P indépendante de x;

$d = 1$, $P^{2n}(x)$ et $P^{2n+1}(x)$ tendent respectivement vers des limites distinctes $P^1(x)$ et $P^2(x)$, dépendants de x.

On peut rassembler ces résultats dans le tableau suivant:

$$P^{n+1}(x) = x\,P^n(ax+b) + (1-x)\,P^n(cx+d)$$

avec: $P^1(x) = x$; $0 \leqq a+b \leqq 1$; $0 \leqq b \leqq 1$; $0 \leqq c+d \leqq 1$; $0 \leqq d \leqq 1$

Cas.	Caracteristiques.	Limites.
Cas semi-normal: $P^n(x)$ tend vers une limite $P(x)$ dépendant de x.	$\lvert a\rvert$ et $\lvert c\rvert<1$; $\lvert a\rvert$ ou $\lvert c\rvert \leqq 0$; $d=0$, $a+b=1$ $a=1$: $c=1$; $c=0-1$; $c+d<1$: $d<1$; $d=1$ $c=1$: $a=-1$; $b>0$: $a+b>0$; $a+b=0$	$P^n(x)=x$, qq. soit n; $P(1)=1$, $P(x)=\frac{d}{1-c}$ pour $x \leqq 1$ $P(1)=P(0)=1$; $P(x)=\frac{1}{1-c}$ pour $0<x<1$; $P(0)=0$, $P(x)=\frac{b}{1-a}$ pour $0<x$ $P(0)=0$, $P(1)=0$, $P(x)=\frac{b}{1-a}$ pour $0<x<1$.
Cas oscillant: $P^{2n}(x)$ tend vers une limite $P^1(x)$ et $P^{2n+1}(x)$ vers une limite différente de $P^2(x)$.	$a=c=0$, $b=0$, $d=1$ $a=-1$, $d=1$ $c=-1$, $a+b=0$	$P^{2n}(x)=1-x$, $P^{2n+1}(x)=x$;
Cas normal: $P^n(x)$ tend vers une limite P indépendante de x.	tous les autres cas.	

SECTION IV

Recherche d'une expression en fonction de n de la $n^{\text{ième}}$ itérée d'une substitution complètement continue.

Paragraphe 1: Position du problème, généralités.

Nous abordons dans cette section un problème qui à eté posé par M. Fréchet (Fréchet, 7, p. 251) et qui sous sa forme la plus générale pourrait être énoncé ainsi.

Etant donnée une opération linéaire complètement continue U, déterminer une expression en fonction de n de sa $n^{\text{ième}}$ itérée U^n.

Nous restreindrons notablement le problème, en nous bornant au cas particulier suivant:

Etant donnée dans l'espace de Hilbert ou espace $L^{(2)}$ *une substitution algébrique linéaire* A *dont les coefficients* a_{ik} $(i,k=1,2,\ldots,\infty)$ *réels ou complexes satisfont à la condition:* $\sum_{i,k} |a_{ik}|^2 = M < \infty$, *déterminer une expression en fonction de* n *de la* $n^{\text{ième}}$ *itérée* A^n *de* $A\ (=A^1)$.

Même ainsi particularisé, le problème garde une certaine généralité; en effet, la considération de ces substitutions A est parfaitement équivalente à celle d'un noyau de Fredholm de carré doublement sommable; nous entendons par la que les méthodes valables dans un cas se transposent sans difficulté dans l'autre cas;

mais, plus précisément, M. Fréchet à montré que le cas des noyaux de Fredholm pouvait être ramené à celui des substitutions A. (Fréchet, 7).

Si l'on pose $y_i = \sum_k a_{ik} x_k$, on voit que:

$$|y_i|^2 \leq \sum_k |x_k|^2 \cdot \sum_k |a_{ik}|^2$$

$$\sum_i |y_i|^2 \leq M^2 \cdot \sum_k |x_k|^2$$

$$\| A \| \leq M$$

Il en résulte que, avec les notations du Chapitre I_2 (p.), $\lim_{q \to \infty} \| A^1_{(q)} \| = 0$, et par suite *la substitution A est complètement continue* (F. Riesz, 2, p. 113, note 1).

Par analogie avec la théorie des noyaux de Fredholm (cf. Chapitre I_2) on établit aisément les résultats suivants:

Nous appelons les pôles λ_j ($j = 1, 2, ...$) de la résolvante $A|\lambda|$ de A les constantes fondamentales de A; relativement à chaque λ_j, on peut définir une substitution principale A_j; toute substi-

tution principale est somme d'une ou plusieurs substitutions $A_j^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, p_j$) dont les coefficients $a^{\alpha}_{j,ik}$ sont de la forme:

$$a^{\alpha}_{j,ik} = \frac{1}{\lambda_j} \cdot \varphi^{\alpha}_{j,i} \times \Psi^{\alpha}_{j,k} \qquad (1)$$

Les systèmes de nombres $\overset{\alpha}{\varphi}_{j,i}$ ($i = 1, 2, \ldots, \infty$) et $\overset{\alpha}{\Psi}_{j,k}$ ($k = 1, 2, \ldots, \infty$) sont des systèmes principaux associés respectivement de A et de la transposée $\mathfrak{A}$ de A. Nous désignerons par $\overset{\alpha}{\varphi}_j$ le système des $\overset{\alpha}{\varphi}_{j,i}$ et par $\overset{\alpha}{\Psi}_j$ celui des $\overset{\alpha}{\Psi}_{j,k}$; naturellement, les séries $\sum_i |\overset{\alpha}{\varphi}_{j,i}|^2$ et $\sum_k |\overset{\alpha}{\Psi}_{j,k}|^2$ convergent; nous appelerons les $\overset{\alpha}{\varphi}_j$: systèmes principaux à droite, et les $\overset{\alpha}{\Psi}_j$ systèmes principaux à gauche.

On peut considérer les systèmes $\overset{\alpha}{\varphi}_j$ comme rangés dans un certain ordre: $\varphi_1^1, \varphi_1^2, \ldots, \varphi_1^{p_1}, \varphi_2^1, \varphi_2^2, \ldots, \varphi_2^{p_2}, \ldots$; plus simplement, nous les numéroterons : $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^q, \ldots$ en posant $\overset{1}{\varphi}_j = \varphi^{q_{j-1}+1}$, où $q_j = \sum_{s=1}^{j} p_s$; de même pour les $\overset{\alpha}{\Psi}_j$.

A chacun des $\overset{\alpha}{\varphi}_j$, on peut (Goursat, 1, p. 412, remarques) faire correspondre un système $\overset{\alpha}{\omega}_j = \omega^q$, tel que le groupe des φ^q d'une part et le groupe des ω^q d'autre part forment un système biorthonormé, et que les ω^q soient des combinaisons linéaires d'un nombre fini de Ψ^q ; (il est à noter que ces combinaisons

sont telles que la connaissance des ω entraîne celle des Ψ et réciproquement. On a donc:

$$\sum_h \overset{q}{\varphi_h} \cdot \overset{s}{\omega_h} = \overset{s}{\delta_q} = \begin{cases} 0 & \text{si } q \overset{<}{>} s \\ 1 & \text{si } q = s \end{cases} \qquad (2)$$

Il doit être bien entendu que les substitutions qui interviennent dans tout ce qui suit sont du type que nous venons de définir.

Paragraphe 2: Les substitutions minimales.

Nous allons d'abord rétablir un résultat obtenu par M. Lewin (Lewin 7) (d'ailleurs dans le cas des noyaux de Fredholm de carré doublement sommable) et qui est en relation avec notre problème. Nous nous appuierons sur des travaux de MM. F. Riesz et E. Schmidt, ce qui nous permettra de procéder plus rapidement que M. Levin. Le résultat de M. Levin est le suivant:

Etant donnée la substitution $A(a_{ik})$, *admettant les constantes fondamentales* λ_j $(j=1,2,..)$ *et les systèmes principaux à gauche correspondants* $\overset{\alpha}{\Psi_j}$, *parmi toutes les substitutions* $S(s_{ik})$ *admettant aussi les* λ_j *comme constantes fondamentales et les* $\overset{\alpha}{\Psi_j}$, *comme systèmes principaux à gauche correspondants, il en existe une, et une seule, pour laquelle* $\sum_{i,k} |s_{ik}|^2$ *est minimum: nous l'appellerons la substitution minimale à gauche relative aux* λ_j *et aux* $\overset{\alpha}{\Psi_j}$. On dé-

finit de même les substitions minimales à droite. Le fait, pour une substitution, d'être minimale, à droite ou à gauche, est évidemment une propriété intrinsèque: *nous définissons donc ainsi la classe des substitutions minimales*, dont nous allons établir l'existence et les propriétés.

Soit une substitution $S(s_{ik})$ admettant les λ_j comme constantes fondamentales et les Ψ_j^{α} comme systèmes principaux à gauche correspondants. Considérons les quantités

$$c_k^q = \sum_i \omega_i^q \, s_{ik} \tag{3}$$

et plus généralement:

$$c_k^q(n) = \sum_i \omega_i^q \, s_{ik}^n \tag{3'}$$

On connaît l'expression des $c_k^q(n)$ (Goursat, 1, p. 411); pour la fournir exactement, il faut faire intervenir les substitutions «canoniques», mais il nous suffit de savoir que les $c_k^q(n)$ sont de la forme $\frac{Q_k^q(n)}{\lambda_j^n}$, où $Q_k^q(n)$ est un polynôme en n, et combinaisons linéaires d'un nombre fini de Ψ_k^q (ou de ω_k^q, c'est équivalent); on a en particulier:

$$c_k^q(1) = c_k^q = \frac{1}{\lambda_j} \cdot \Psi_k^q$$

Autre remarque essentielle, les $c_k^q(n)$ sont indépendants de la subs-

titution S envisagée et ne dépendent que des λ_j et des Ψ_j^{α} donnés.

Soient maintenant les systèmes $\varphi'^{q}(p)$ définis comme constituant la solution extrémale (voir pour le sens de cette expression F. Riesz, 2, p. 53) unique du système d'équations:

$$\sum_i \omega_i^s x_i = \delta_k^s \qquad (s = 1, 2, \ldots, p) \tag{4}$$

D'après (3)', les s_{ik}^n constituent, pour une valeur donnée de k, une solution du système $R_k(n)$:

$$\sum_i \omega_i^s x_i = c_q^s(n) \tag{5}$$

Soit $f_{ik}(n)$ $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$ la solution extrémale unique de $R_k(n)$, pour une valeur donnée de k et de n: on a nécessairement:

$$\sum_i |b_{ik}(1)|^2 \leqq \sum_i |s_{ik}|^2 \; ; \quad \sum_i |b_{ik}(n)|^2 \leqq \sum_i |s_{ik}^n|^2$$

$$\sum_{i,k} |b_{ik}(1)|^2 \leqq \sum_{i,k} |s_{ik}|^2 ; \quad \sum_{i,k} |b_{ik}(n)|^2 \leqq \sum_{i,k} |s_{ik}^n|^2 \tag{6}$$

Désignons par $B^{(n)}$ la substitution de coefficients $b_{ik}(n)$: il est clair que $B^{(1)}$ est la substitution minimale unique dont l'existence avait été annoncée.

En particulier, prenons, comme substitution S la substitution A; on a:

$$a_{ik}^n = b_{ik}(n) + \pi_{ik}(n) \tag{7}$$

où $\pi_{ik}(n)$ satisfait aux relations:

$$\sum_i \omega_i^s \pi_{ik}(n) = 0 \qquad (s=1,2,\ldots,\infty) \tag{8}$$

On a, d'après une théorie de M. E. Schmidt (F. Riesz, 2, p. 64 et suiv.)

$$b_{ik}(n) = \lim_{p\to\infty} \sum_{q=1}^{p} \varphi_i'^q(p)\ c_k^q(n) = \lim_{p\to\infty} b_{ik}^p(n) \tag{9}$$

en posant:

$$b_{ik}^p(n) = \sum_{q=1}^{p} \varphi_i'^q(p)\ c_k^q(n) \tag{10}$$

La convergence de b_{ik}^p vers $b_{ik}(n)$ est forte par rapport à i, c'est à dire que $\sum_i |b_{ik}(n) - b_{ik}^p(n)|^2$ tend vers 0, d'autre part $\sum_i |b_{ik}^p(n)|^2$ tend vers $\sum_i^i |b_{ik}(n)|^2$ en ne décroissant pas; on peut alors établir le résultat suivant:

LEMME 1: La substitution $B_p^{(n)}$, de coefficients $b_{ik}^p(n)$, tend uniformément, lorsque p croît indéfiniment, vers la substitution $B^{(n)}$ de coefficients $b_{ik}(n)$.

Il faut montrer que $\| B^{(n)} - B_p^{(n)} \|$ tend vers 0 avec $\frac{1}{p}$; or

$$\| B^{(n)} - B_p^{(n)} \| \leq \sqrt{\sum_{i,k} |b_{ik}(n) - b_{ik}^p(n)|^2}$$

$$\sum_{i,k} |b_{ik}(n)-\overset{p}{b}_{ik}(n)|^2=\sum_{k}\left(\sum_{i}|b_{ik}(n)-\overset{p}{b}_{ik}(n)|^2\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{h}\left[\sum_{i}|b_{ik}(n)-\overset{p}{b}_{ik}(n)|^2\right]+\sum_{k>h}\left[\sum_{i}|b_{ik}(n)-\overset{p}{b}_{ik}(n)|^2\right] \quad (11)$$

$$|b_{ik}(n)-\overset{p}{b}_{ik}(n)|^2 \leq \{|b_{ik}(n)|+|\overset{p}{b}_{ik}(n)|\}^2$$

$$\sum_{i}|b_{ik}(n)-\overset{p}{b}_{ik}(n)|^2<\sum_{i}|b_{ik}(n)|^2+\sum_{i}|\overset{p}{b}_{ik}(n)|^2+2\sum_{i}|b_{ik}(n)|\,|\overset{p}{b}_{ik}(n)|$$

Puisque, d'après (6), on a:

$$\sum_{i}|b^{p}_{ik}(n)|^2 \leq \sum_{i}|b_{ik}(n)|^2 \leq \sum_{i}|a^{n}_{ik}|^2$$

on en déduit, en utilisant l'identité de Lagrange:

$$\sum_{i}|b_{ik}(n)-b^{p}_{ik}(n)|^2 \leq 4\cdot\sum_{i}|a^{n}_{ik}|^2$$

$$\sum_{k>h}\left[\sum_{i}|b_{ik}(n)-b^{p}_{ik}(n)|^2\right] \leq 4\cdot\sum_{k>h}\left(\sum_{i}|a^{n}_{ik}|^2\right)$$

On peut déterminer h de telle façon que $4\cdot\sum_{k>h}\left(\sum_{i}|a^{n}_{ik}|^2\right)$ soit inférieur à un nombre donné ϵ; on peut d'autre part trouver un nombre P tel que pour $p>P$, on ait:

$$\sum_{k=1}^{h}\left(\sum_{i}|b_{ik}(n)-b^{p}_{ik}(n)|^2\right)<\epsilon$$

en raison de la convergence forte signalée plus haut. D'où il résulte d'après (11) que $\| B^{(n)} - B_{\mu}^{(n)} \| < \sqrt{2\varepsilon}$ pour $p > P$, ce qui établit le lemme.

LEMME 2: La substitution $B^{(n)}$ est la $n^{\text{ième}}$ itérée de la substitution $B = B^{(1)}$.

Montrons par exemple que $B^{(2)} = B \times B$.

En raison des propriétés des $\varphi'^{q}_{(p)}$ exprimées par les relations (4), et en tenant compte des expressions et des propriétés des $c_k^q(n)$ (Goursat, 1, p. 410 · 411), il est facile de constater que l'on a:

$$B^{(2)}_{q_j} = B^{(1)}_{q_j} \times B^{(1)}_{q_j}$$

Cela vient de ce que les $\varphi'^{q}(q_j)$ $(q \leqq q_j)$ ont par rapport aux $c_k^q(n)$ $(q \leqq q_j)$ précisément les mêmes propriétés que les φ^q. Passons alors à la limite, en faisant croître j indéfiniment, en vertu du lemme 1; on trouve que $B^{(2)} = B \times B = B^2$; on verrait de même que: $B^{(n)} = B^n$.

LEMME 3: Les substitutions $B^{(n)} = B^n$ et les substitutions $\pi(n)$ définies par les coefficients $\pi_{ik}(m)$ sont orthogonales à droite quels que soient n et m. En effet, d'après (8), on a, en tenant compte de la forme des $c_k^{\cdot}(n)$:

$$\sum_i c_i^{\cdot}(n) \cdot \pi_{ik}(m) = 0$$

quels que soient s, n, m; donc on a:

$$B_p^{(n)} \times \pi(m) = 0$$

et à la limite:

$$B^n \cdot \pi(m) = 0 \tag{12}$$

REMARQUE: Les $\varphi_{(p)}^{'q}$ tendent fortement vers des limites $\varphi^{'q}$ qui sont les solutions extrémales des systèmes:

$$\sum_i \omega_i^s x_i = \delta_q^s \qquad (s = 1,2,\ldots \infty) \tag{13}$$

Il en résulte que B possède, comme substitution principale relative à λ_j, la substitution:

$$A_j' = \left(\sum_{\alpha=1}^{p_j} \varphi_{j,i}^{',\alpha} \cdot c_{j,k}^{\alpha} \right) \cdot \frac{1}{\lambda_j}$$

qui se déduit de A_j en remplaçant φ_j^{α} par $\varphi_j^{',\alpha}$. En effet, on peut écrire, pour $p \geqq q_j$:

$$b_{ik}^{p}(1) = \sum_{\alpha=1}^{p_j} \varphi_{j,i}^{',\alpha}(p) \cdot c_{j,k}^{\alpha} + \sum_{q'} \varphi_i^{',q'}(p) \cdot c_k^{q'} = a_{j,ik}^{'}(p) + b_{j,ik}(p) \tag{14}$$

les q' désignant les indices $q \leqq p$ qui ne sont pas de la forme: $q = q_{j-1} + \rho$, $\rho = 1,2,\ldots p_j$; $b_{ik}(1) = b_{ik} = \lim_{p=\infty} b_{ik}^{p}(1)$; $a'_{j,ik} = \lim_{p=\infty} a'_{j,ik}(p)$; $b'_{j,ik} = \lim_{p \to \infty} b_{j,ik}(p)$; on a, à la limite:

$$b_{ik} = a'_{j,ik} + b_{j,ik} \tag{15}$$

Mais on a évidemment:

$$\sum_h a'_{j,ih}(p) \cdot b_{j,hk}(p) = \sum_h a'_{j,hi}(p) \cdot b_{j,kh}(p) = 0$$

$$\sum_k a'_{j,ik} \cdot b_{j,hk} = \sum_h a'_{j,hi} \cdot b_{j,kh} = 0 \tag{16}$$

Comme les $a'_{j,ik}$ sont précisément les coefficients des A_j', (15) et (16) démontrent la propriété anoncée.

Considérons maintenant B^n comme fonction de n; $B^n = \lim_{p\to\infty} B_p^n$; soit alors $p^{(1)}, .., p^{(l)}, ...$ une suite d'entiers croissants; on peut écrire:

$$B^n = B^n_{p^{(1)}} + \sum_{l=2}^{\infty} (B^n_{p^{(l)}} - B^n_{p^{(l-1)}}) \tag{17}$$

La série (17) est uniformément convergente, d'après le lemme 1; en tenant compte de l'expression (10) des $b^p_{ik}(n)$, en remarquant que B est une substitution minimale et que d'autre part toutes les substitutions minimales peuvent s'obtenir de la même façon que nous avons obtenu B, on voit que:

THÉORÈME I_4: *Si la substitution A est minimale, la substitution A^n est la somme d'une série uniformément convergente de substitutions, dont chaque terme est une somme d'un nombre fini*

d'éléments de la forme $\frac{Q(n)}{\lambda_j^n}$, *où* $Q(n)$ *est un polynôme en* n *(dont les coefficients sont des substitutions).*

La forme des a_{ik}^n en fonction de n s'en déduit immédiatement.

Considérons la substitution minimale à gauche B, et soit, le système d'équations aux différences (D)

$$x_k(n+1) = \sum_i x_i(n)\, b_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, .., \infty)$$

Appelons *solution principale* de ce système toute solution $x_k(n+1)$ $(k = 1, 2, ., \infty)$ telle que $\sum_k |x_k(n+1)|^2 < \infty$ et que:

$$x_k(n+1) = \frac{P_k(n)}{\lambda^n} \qquad (n = 1, 2.., \infty\,;\ k = 1, 2, ..., \infty)$$

où $P_k(n)$ est un polynôme en n; on constate que $x_k(n+1) = c_k^q(n)$ $(k = 1, 2, ..., \infty\,,\ n = 1, 2, ..., \infty)$ est une solution principale. Ne considérons que les solutions de (D) telles que: $\sum_k |x_k(n)|^2 < \infty$, et par ailleurs les $x_k(1)$ peuvent être arbitraires. On a:

$$x_k(n+1) = \sum_i x_i(1)\, b_{ik}(n)$$

Or d'après ce que nous avons vu sur la forme des b_{ik}^n comme

combinaisons linéaires de $c_k^q(n)$; il en est donc de même de $x_k(n+1)$ et on peut énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME II_4: *Si la substitution A est minimale à gauche, toute solution* $x_k(n)$ $(k = 1, 2, .., \infty)$ *du système d'équations aux différences finies (D):*

$$x_k(n+1) = \sum_i x(n) \cdot a_{ik}$$

telle que $\sum_k |x_k(n)|^2$ *converge, est la somme d'une série uniformément convergente lorsque k varie dont chaque terme est une combinaison linéaire d'un nombre fini de solutions principales de (D).*

PARAGRAPHE 2: LES VARIÉTÉS LINÉAIRES DANS L'ESPACE DE HILBERT.

Des nombres x_k $(k = 1, 2, ..., \infty)$ tels que $\sum_k |x_k|^2 < \infty)$, définissent dans l'espace de Hilbert un point x, ou aussi bien un *vecteur* x. Etant donnés 2 vecteurs x, y, on désigne par $(x \cdot y)$ la quantité $\sum_k x_k y_k$; si $(x \cdot y) = 0$, les 2 vecteurs sont *normaux*. Etant donnée une suite de vecteurs $x(1), ., x(n), ...$ on appelle *variété linéaire de la base* $[x(n)]$ l'ensemble V des vecteurs x de la forme:

$$x = \sum_{n=1}^{p} \mu_n x(n)$$

où p est un entier fini, et leurs limites (1). Le vecteur y est normal à V si l'on a $(x \cdot y) = 0$ quel que soit x dans V: il suffit évidemment pour cela que l'on ait $(x(n) \cdot y) = 0$ quel que soit n; la variété V est *complète* s'il n'existe aucun vecteur non nul normal à V; l'ensemble des vecteurs normaux à V forment une variété W dite la normale de V: réciproquement V est la normale de W (F. Riesz, 2, p. 69).

Si V est définie par la base $[x(n)]$, nous désignons par $\overline{V}$ la variété de base $[\overline{x(n)}]$, $\bar{v}$ désignant d'une façon générale le vecteur qui a pour coordonnées les conjugués des coordonnées du vecteur x.

Etant données 2 variétés définies par 2 bases comprenant le même nombre fini de vecteurs linéairement indépendants, si l'une contient l'autre, elles sont nécessairement identiques.

Une même variété V peut être définie par diverses bases: soit la base $[x(n)]$; elle est dite *minimale*, s'il existe des vecteurs $y(q)$ tels que l'on ait:

$$\left(x(n) \cdot y(q)\right) = \overset{s}{\delta_q} = \begin{cases} 0 & \text{si } q \overset{<}{>} s \\ 1 & \text{si } q = s \end{cases} \qquad (19)$$

La base est *surabondante* si l'on peut supprimer l'un des $x(n)$ sans modifier V: il résulte des travaux de M. Riesz que *la con-*

(1) Rappelons que dans l'espace l.(2), les vecteurs $x(n)$ tendent vers le vecteur x si $\sum_k |x_k - x_k(n)|^2$ tend vers 0.

dition nécessaire et suffisante pour qu'une base ne soit pas surabondante est qu'elle soit minimale.

La base est *parfaite*, si elle est telle qu'il n'existe aucun vecteur non nul appartenant à toutes les variétés $V(n)$ de bases $[x(n), x(n+1),...]$.

Etant donnée la base minimale $[x(n)]$ et des vecteurs $y(q)$ satisfaisant à (19), on appelle *coordonnées pour* $[x(n)]$ *d'un point* x de V les nombres:

$$\nu_q = (x \cdot y(q)) \qquad (q = 1, 2, .., \infty) \tag{20}$$

Le choix des $y(q)$ n'est généralement pas unique, mais les ν_q n'en dépendent pas comme on le voit aisément; nous prendrons donc arbitrairement les $y(q)$ solutions extrémales de (19).

A tout vecteur x de V, on fait ainsi correspondre les ν_q; réciproquement, à un système de ν_q donnés, peut-on faire correspondre un vecteur se de V et un seul, dont les ν_q soient les coordonnées? D'abord, il faut pour cela que le système (20) admette une solution en x, ce qui exige que les ν_q satisfassent à une condition indiquée par M. Riesz (F. Riesz, 2, p. 96); il faut ensuite que cette solution soit unique; or soit x' la solution extrémale de (20); posons:

$$x = x' + x'' \qquad \text{ou} \quad x'' = x - x'$$

il faudrait que v'' soit toujours nul, en particulier quand on donne aux v les valeurs: $v_n = 1$, $v_q = 0$ pour $q \lesseqgtr n$; mais d'ailleurs cela suffirait; or, on a alors: $x = x(n)$; les $y(q)$ étant solutions extrémales de (19), on a (F. Riesz, 2, p. 65):

$$y(q) = \lim_{l \to \infty} \sum_{h=1}^{l} \mu\ (l, q)\ \overline{x(h)} \tag{21}$$

$$\overline{y(q)} = \lim_{l \to \infty} \sum_{h=1}^{l} \overline{\mu_h(l, q)}\ x(h) \tag{21'}$$

x' etant solution extrémale de (20) appartient à la variété de base $[y(q)]$, donc à la variété de base $[\overline{x(h)}]$; x aussi, donc aussi x''.

$$x'' = \lim_{l \to \infty} \sum_{h=1}^{l} \mu_{hl}\ (l)\ x(h) \tag{22}$$

On doit avoir:

$$(x'' \cdot y(q))' = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots, \infty)$$

Or; d'après (22),

$$(x'' \cdot y(q)) = \lim_{l \to \infty} \mu_h(l) = 0$$

Il en résulte que x'' appartient à toutes les variétés $V(n)$ de base $[x(n), x(n+1), \ldots]$. Il suffit donc que la base $[x(n)]$ soit parfaite pour que la nullité de x'' soit assurée; mais supposons qu'il existe un vecteur non nul y appartenant à toutes les varié-

tés $V(n)$: on aurait $(y \cdot y(q)) = 0$, puisque y appartient à $V(q+1)$, et que $y(q)$ est normal à $V(q+1)$, d'après (19): le vecteur $x' + y$ appartiendrait à V et serait distinct de x'. Donc: *la condition nécessaire et suffisante pour que la représentation des points d'une variété par leurs coordonnées relatives à une base minimale soit unique est que cette base soit parfaite.*

Il résulte d'ailleurs de ce qui précède que *toute base minimale parfaite peut s'obtenir comme ensemble des solutions extrémales des systèmes* (19), *où l'on prend pour* $y(q)$ *une base minimale arbitraire.* En effet, étant donnée une telle base $[x(n)]$ un vecteur x non nul appartenant à tous les $V(n)$ serait normal à toutes $y(q)$, $\bar{x}$ serait normal à tous les $\overline{y(q)}$, donc à tous les $x(n)$, donc à x; or $(x \cdot \bar{x}) = |x|^2$ n'est pas nul; d'où contradiction.

Etant donnée la base minimale et parfaite $x(n)$, nous dirons que la représentation est cartésienne si la série $\sum_q \nu_q x(q)$ converge, quel que soit x dans V; cette propriété peut dépendre de l'ordre des $x(n)$; on a alors évidemment:

$$x = \sum_q \nu_q x(q) \tag{23}$$

ANGLE DE 2 VECTEURS: Soient 2 vecteurs x et y; la quantité: $\dfrac{|(x \cdot \bar{y})|}{|x| \cdot |y|}$ est comprise entre 0 et 1; on appelle angle $(x,y) =$

$\widehat{x, y} = \theta$ l'angle θ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ dont le cosinus est égal à $\frac{|(x, \bar{y})|}{|x| \cdot |y|}$; 2 vecteurs sont orthogonaux si leur angle est $\frac{\pi}{2}$; on vérifie aisément que les relations classiques des triangles rectangles s'étendent aux triangles rectangles de l'espace de Hilbert.

PROJECTION D'UN POINT SUR UNE VARIÉTÉ: Soit un point x et une variété V de base minimale et parfaite $[x(n)]$; soit $y(q)$ les solutions extrémales de (19); posons:

$$v_q' = (x \cdot y(q)) \tag{24}$$

Nous appelons projection x' de x sur V la solution extrémale x' du système (24) où x figure l'inconnue; si x appartient à V, $x = x'$; de toutes façons $x - x'$ est orthogonal à V et en particulier à x' (mais normal à $\bar{V}$ et à $\bar{x'}$).

ANGLE D'UNE DROITE ET D'UNE VARIÉTÉ : Soit un vecteur x et une variété V, y une vecteur arbitraire de V; soit θ la borne inférieure des angles $\widehat{x, y}$ lorsque y varie dans V: θ est l'angle $\widehat{x, V}$ de x avec V; c'est aussi l'angle de x avec sa projection x' sur V.

ANGLE DE 2 VARIÉTÉS: Soient 2 variétés V_1 et V_2, x^1 un vecteur arbitraire de V_1, x^2 un vecteur arbitraire de V_2; soit θ la borne inférieure de l'angle $\widehat{x^1, x^2}$ quand x^1 et x^2 varient

dans V_1 et V_2 : θ est l'angle $\widehat{V_1, V_2}$ des 2 variétés V_1 et V_2 ; on peut déterminer une expression analytique de θ en fonction des bases de V_1 et V_2.

THÉORÈME III_4 : *Pour qu'une variété V de base minimale et parfaite $[x(n)]$ admette par rapport à cette base une représentation cartésienne, il suffit que la borne inférieure des angles $\widehat{W(n) \cdot V(n)}$ des variétés $W(n)$ $[x(1), x(2),..., x(n-1)]$, $V(n)$ $[x(n), x(n+1),...]$* soit positive.

Soit en effet x un point de V, x^q sa projection sur $W(q)$; soient ν_q les coordonnées de x pour $[x(n)]$; soit $y^q = \sum_{n=1}^{q} \nu_n x(n)$; en reprenant une méthode de M. Riesz (F. Riesz, 2, chap. III), on voit que :

$$x = \lim_{q \to \infty} x^q$$

Le triangle x, x^q, y^q est rectangle en x^q ; on a donc :

$$| x - y^q | = | x - x^q | \times \frac{1}{\sin \widehat{(x - y^q), (x^q - y^q)}} \qquad (25)$$

Or $x^q - y^q$ appartient à $W(q)$, tandis que $x - y^q$ appartient à $V(q)$; on a donc : $\sin \widehat{(x - y^q), (x^q - y^q)} \geq \sin \widehat{W(q) \cdot V(q)}$, d'où l'on déduit le théorème.

GÉNÉRALISATION: Groupons les $x(n)$ de la façon suivante: chaque groupe comporte un nombre fini de $x(n)$; chaque $x(n)$ figure dans un groupe et 1 seulement. Soient G_1, G_2,.., ces groupes rangés dans un certain ordre, désignons par x_i^1, x_i^2,..., x_i^j les $x(n)$ appartenant à G_i; posons: $y_i = \sum_{q=1}^{j_i} \nu_{(q)}^{i}\, x_i^q$, $\nu_{(q)}^{i}$ étant la coordonnée d'un point x de V pour x_i^q; soient W'(n) la variété de base $[x_i^q]$ ($q = 1, 2, .., j_i$, $i = 1, 2, .., n-1$) et V'(n) celle de base $[x_i^q]$ ($q = 1, 2, . j_i$, $i \geqq n$).

Pour que le vecteur $\sum_{i=1} y_i$ *tende vers le vecteur* x *quel que soit* x *dans* V, *il suffit que la borne inférieure des angles* $\widehat{W'(n), V'(n)}$ *soit positive.*

On raisonne comune précédemment, pour établir cette propriété.

PARAGRAPHE 3: LES SUBSTITUTIONS QUASI-RÉGULIÈRES

Nous reprenons danc ce paragraphe les notations du paragraphe 1; *une substitution* A *de systèmes principaux* φ^q *et* Ψ^q *est quasi-régulière si les variétés* ϕ *de base* $[\varphi^q]$ *et* $\overline{\Psi}$ *de base* $[\Psi^q]$ *sont identiques.*

[pour une même substitution A, le choix des φ^q et des Ψ^q n'est généralement pas unique, mais on voit facilement que ϕ et Ψ ne dépendent pas de ce choix].

LEMME 4: La condition nécessaire et suffisante pour que la variété ϕ appartienne à la variété $\bar{\Psi}$ est que les systèmes φ^q soient les solutions extrémales du système (13).

$$\sum_i \omega_i^s x_i = \delta_q^s \tag{13}$$

c'est à dire que $\varphi^q = \varphi'^q$.

a) la condition est suffisante: en effet, d'après la théorie de M. Schmidt (F. Riesz, 2, p. 65), les φ'^q appartiennent à la variété $\bar{\Psi}$

b) la condition est nécessaire, car si φ^q appartient à $\bar{\Psi}$, $\varphi^q - \varphi'^q = \varphi''^q$ aussi; mais on a:

$$\sum_i \omega_i^s \varphi_i''^q = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, \infty)$$

$$\sum_i \bar{\omega}_i^s \bar{\varphi}_i''^q = 0$$

Donc $\bar{\varphi}''^q$ est normal à $\bar{\Psi}$, donc à φ''^q, ce qui n'est possible que si $\varphi''^q = 0$.

Il résulte du lemme 4 que, *dans le cas d'une substitution quasi-régulière les bases* $[\varphi^q]$ *et* $[\Psi^q]$ *sont minimales et parfaites*, et que réciproquement, d'après une remarque de la page , *on peut construire toutes les substitutions quasi-régulières à partir d'une base minimale parfaite arbitraire.*

On a, d'après (7),

$$a_{ik}^{n} = b_{ik}^{n} + \pi_{ik}(n) \tag{7}$$

Mais en intervertissant les rôles des φ^q et des Ψ^q, on a aussi:

$$a_{ik}^{n} = b'^{n}_{ik} + \pi'^{n}_{ik} \tag{7'}$$

les B'^{n} étant cette fois minimales à droite. On a en particulier:

$$a_{ik} = b_{ik} + \pi_{ik} = b'_{ik} + \pi'_{ik} \tag{26}$$

en posant $\pi_{ik}(1) = \pi_{ik}$, $\pi'_{ik}(1) = \pi'_{ik}$

La substitution principale A'_j de B (v.p.) est dans le cas d'une substitution quasi-régulière A, identique à A_j: de sorte que B et B' ont en commun les substitutions principales A_j. Appliquons (7) à B'; on a:

$$B' = B + \pi'' \quad , \qquad b'_{ik} = b_{ik} + \pi''_{ik}$$

$$\sum_i |b'_{ik}|^2 \geq \sum_i |b_{ik}|^2$$

l'égalité $\sum_i |b'_{ik}|^2 = \sum_i |b_{ik}|^2$ n'est pas réalisée pour au moins une valeur de k, car la solution extrémale du système (5) est unique; on a donc:

$$\sum_{i,k} |b'_{ik}|^2 > \sum_{i,k} |b_{ik}|^2$$

à moins d'admettre que $B' = B$.

Mais on montrerait aussi bien que l'on a:

$$\sum_{i,k} |b_{ik}|^2 > \sum_{i,k} |b'_{ik}|^2$$

d'où une contradiction: donc $B=B'$, et par suite $\pi=\pi'$; π est donc orthogonal à B, d'après le lemme 3; $\pi(n)$ est donc la $n^{\text{ième}}$ itérée π^n de π; d'ailleurs π est une substitution dépourvue de constantes fondamentales car si π possédait une constante fondamentale λ, la substitution principale de π relative à λ serait orthogonale à B (toute substitution canonique d'une substitution π est orthogonale à toute substitution orthogonale à π); elle serait nécessairement au moins substitution canonique pour A: à ce titre elle figurerait parmi les substitutions canoniques de B: il n'est pas possible alors qu'elle soit orthogonale à B. [on peut montrer de la même façon que B ne possède pas d'autres substitutions canoniques que celles de A]. Il résulte de ceci que:

THÉORÈME IV_4: *Toute substitution quasi-régulière est la somme de deux substitutions orthogonales, l'une est substitution minimale à droite et à gauche, et dont l'autre est dépourvue de constantes fondamentales.*

CAS PARTICULIER DES SUBSTITUTIONS RÉGULIÈRES: Désignons par ϕ_q et Ψ_q les variétés de bases $[\varphi^1, \varphi^2, .., \varphi^q]$ et $[\Psi^1, .., \Psi^q]$; la substitution A est *régulière* si, quel que soit j, on a: $\phi_{qj} =$

Ψ_{q_j} ; une telle substitution est évidemment quasi-régulière; mais plus précisément on a:

$$\varphi^q(q_j) = \varphi^q \quad \text{pour} \quad q \leqq q_j$$

$$b_{jk}^{q_j}(n) = \sum_{q=1}^{q_j} \varphi_i^q \, c_k^q(n) \tag{27}$$

Il en résulte que, d'après (17)

$$B^n = \sum_j A_j^n \tag{28}$$

car on a :

$$B_{q_1}^n = A_1^n ; \ldots ; \; B_{q_j}^n - B_{q_{j-1}}^n = A_j^n , \ldots .$$

En particulier, puisque $B = \sum_j A_j$, on a:

$$A = \sum_j A_j + \pi . \tag{29}$$

Les substitutions régulières, avec la propriété (29) ont été signalées pour la première fois par M. Monteiro (Monteiro, 1). Elles comprennent comme cas particulier les substitutions symétriques, hermitiques et les substitutions normales de M. Carleman (Carleman, 1).

DÉVELOPPEMENT D'UNE SUBSTITUTION EN SÉRIE DE SUBSTITUTIONS PRINCIPALES: Le cas particulier des substitutions régulièe-

res nous amène a poser le problème suivant: déterminer des classes de substitutions A telles que $\sum_j A_j$ converge uniformément.

Il convient d'abord d'observer que cette propriété peut dépendre de 3 éléments:

les φ^q

les Ψ^q

les λ_j

Chacun de ces éléments est d'ailleurs lié aux 2 autres, sans être absolument déterminé par eux: le problème est donc de trouver des conditions portant sur 1 où 2 seulement de ces 3 éléments et entraînant la convergence uniforme de la série des A_j pris dans un ordre à préciser.

Prenons une substitution quasi-régulière A; on a: $A=B+\pi$; posons $A(q) = \sum_{j=1}^{q} A_j$; soient $a_{ik}(q)$ les coefficients de $A(q)$, Ψ_q la variété de base $[\Psi^l]$ $(l \leq q)$, Ψ'_q celle de base $[\Psi^l]$ $(l > q)$: supposons que les angles $\theta = \widehat{\Psi_q, \Psi'_q}$ aient une borne inférieure positive; on déduit facilement du théorème III_4 et de sa généralisation que:

$$\| B - A(q) \| \leq \sqrt[2]{\sum_{i,k} | b_{ik} - a_{ik}(q) |^2}$$

tend vers 0 avec $\frac{1}{q}$. Ce qui s'énonce:

THÉORÈME V_4 : *Etant donnée une substitution quasi-régulière A, pour que la série* $\sum_j A_j$ *de ses substitutions principales prises dans cet ordre converge uniformément, il suffit que les angles* $\theta_q = \widehat{\Psi_q, \Psi_q'}$ *restent quel que soit q supérieurs à un nombre positif fixe.*

Naturellement on peut faire jouer aux φ^q le rôle des Ψ^q; on vérifie sans difficulté que pour une substitution régulière $\theta_q = \frac{\pi}{2}$, quel que soit l'ordre des A_j et le groupe de systèmes principaux utilisé: on retrouve ainsi le résultat de M. Monteiro.

REMARQUE: On peut rattacher à cet ordre d'idée la remarque suivante: soit une substitution quasi-régulière A, telle que $A(\lambda)$ n'ait que des pôles de rang 1; les coefficients $a_{j,ik}$ de A_j sont de la forme:

$$a_{j,ik} = \frac{\varphi_i^j \Psi_k^j}{\lambda_j}$$

Prenons: $\sum_k |\Psi_k^j|^2 = 1$; on sait (théorème de Schur) que $\sum_j \frac{1}{|\lambda_j|^2}$ converge; posons: il est clair que:

$$\| A_j^2 \| = \frac{|\varphi^j|}{|\lambda_j|^2} \cdot \quad (|\varphi^j| = \sqrt[2]{\sum_i |\varphi_i^j|^2})$$

La série $\sum_j A_j^2$ sera convergente (et d'une façon générale $\sum_j A_j^n$ pour $n \geqq 2$) si $|\varphi^j|$ est borné supérieurement. Or la théorie de M. Riesz (F. Riesz, 2, p. 49) nous apprend que $|\varphi^j|^2$ est égal à $\frac{1}{M_j^2}$, M_j^2 désignant la borne supérieure, lorsque n et les μ_l varient, de:

$$\sum_k |\Psi_k^j - \sum_{l \gtrless j,1}^{n} \mu_l \Psi_k^l|^2$$

Il suffit donc que M_j^2 ait une borne inférieure positive: or, M_j^2 est le carré du sinus de l'angle de Ψ^j avec la variété $\Psi(j)$ de base $[\Psi^l]$ $(l \gtrless j)$: donc, *il suffit pour que* $\sum_j A_j^n$ $(n > l)$ *converge uniformément que les angles* $\theta_q' = \widehat{\Psi^q, \Psi(q)}$ *aient une borne inférieure positive.*

SECTION V

Notes diverses

Note I

Sur les substitutions de Dixon.

Le raisonnement de M.M. Riesz et Dixon auquel nous avons fait appel pour démontrer le théorème a été imaginé par M. Dixon pour l'étude de substitutions particulières, que nous appellerons *substitutions de Dixon.*

Une substitution A dans D_ω est une substitution de Dixon si ses coefficients a_{ik} sont tels que l'on peut trouver des nombres positifs α_k $(k=1,2,\ldots \infty)$ et M tels que l'on ait, quels que soient i et k:

$$| a_{ik} | \leq \alpha_k \tag{1}$$

$$\sum_k \alpha_k \leq M \tag{2}$$

Nous poserons $\frac{1}{\alpha_k} = \beta_k$.

Etant donnée une substitution A, si l'on appelle $\bar{a}_k$ la borne supérieure des $|a_{ik}|$ lorsque i varie, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que A soit une substitution de Dixon

est que la série $\sum_k \bar{a}_k$ converge. A est alors évidemment complètement continue, son rayon polaire P est infini et sa résolvante $A(\lambda)$ est méromorphe.

Nous allons montrer que l'on peut retrouver ces resultats, en les précisant,

1.°) en utilisant la théorie des déterminants infinis absolument convergents;

2.°) en calquant exactement la marche suivie pour l'étude des équations de Fredholm (cf. Goursat 1, p. 368 et sq.)

EMPLOI DES DÉTERMINANTS INFINIS ABSOLUMENT CONVERGENTS: Etudier la réciproque $(E-\lambda A)^{-1}$, c'est étudier le système d'équations:

$$x_i - \lambda \sum_k a_{ik}\, x_k = y_i \qquad (3)$$

où les x sont les inconnues; le déterminant $D(\lambda)$ de ce système s'écrit:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda a_{11} & -\lambda a_{12} & -\lambda a_{13} & \cdots \\ -\lambda a_{21} & 1-\lambda a_{22} & \,\,\,\, \text{,,} & \cdots \\ -\lambda a_{31} & \,\,\,\, \text{,,} & \,\,\,\, \text{,,} & \cdots \end{vmatrix} \qquad (4)$$

Ce déterminant est absolument convergent; en effet, il admet formellement le développement en série suivant:

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \sum_{i} a_{ii} + .. + \frac{(-\lambda)^p}{p!} \sum_{i_1, i_2, .., i_p} a \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_1 & i_2 & .. & i_p \end{pmatrix} + ... \quad (5)$$

en posant:

$$a \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & .. & k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i,k_1} & a_{i_1 k_2} & \cdots & a_{i_1 k_p} \\ \vdots & & & \\ a_{i_p k_1} & a_{i_p k_2} & \cdots & a_{i_p k_p} \end{vmatrix}$$

Les hypothèses faites en supposant que A est une substitution de Dixon ne porte que sur les $|a_{ik}|$: si donc je montre, à l'aide de ces hypothèses, que les termes de (5), qui sont des séries, convergent absolument, et que (5) représente une fonction entière de λ, j'aurais bien montré que $D(\lambda)$ est absolument convergent quel que soit λ. Or:

$$\left| a \begin{pmatrix} i_1, & i_2, .. & i_p \\ i_1, & i_2, .. & i_p \end{pmatrix} \right| = 1 \left| \begin{matrix} a_{i,i} \times \beta_{i_1} & \cdots & a_{i\, i_p} \times \beta_{i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p\, i_1} \times \beta_{i_1} & & a_{i_p\, i_p} \times \beta_{i_p} \end{matrix} \right| \times (\alpha_{i_1} \times \alpha_{i_2} \times \dots \times \alpha_{i_p})$$

D'après (1) et un théorème connu de M. Hadamard sur les déterminants, on a:

$$\left| a \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix} \right| \leq p^{\frac{p}{2}} (\alpha_{i_1} \times \alpha_{i_2} \times .... \times \alpha_{i_p})$$

et d'après (2)

$$\sum_{i_1 \dots i_p} |a| \left| \begin{pmatrix} i_1 \dots i_p \\ i_1 \dots i_p \end{pmatrix} \right| \leq M^p \times p^{\frac{p}{2}}$$

La série (5) est donc majorée par la série:

$$1 + \dots + \frac{|\lambda|^p}{p!} M^p \cdot p^{\frac{p}{2}} + \dots \qquad (6)$$

qui représente une fonction entière de λ, ce qui établit le résultat annoncé

On démontre de même que tout mineur de $D(\lambda)$ est absolument convergent, l'étude du système (3) se poursuit alors aisément: on trouve en particulier que les pôles de $A(\lambda)$ sont les zéros de $D(\lambda)$.

ANALOGIE AVEC LES ÉQUATIONS DE FREDHOLM: Par analogie avec la théorie des équations de Fredholm, définissons:

le noyau: a_{ik} ;

la résolvante $\Gamma_{ik}(\lambda) = a_{ik} + \dots + \lambda^{n-1} a_{ik}^n + \dots \qquad (7)$

le premier déterminant de Fredholm, qui n'est autre que $D(\lambda)$ défini plus haut (remarquons que, comme dans la théorie de Fredholm, $D(\lambda)$ est au plus de genre 2).

le 2.° déterminant de Fredholm $D_{ik}(\lambda) = \Gamma_{ik}(\lambda) \cdot D(\lambda)$; $D_{ik}(\lambda)$ est un mineur de $D(\lambda)$, c'est donc une fonction entière de λ ; de sorte que $\Gamma_{ik}(\lambda)$ est méromorphe.

On peut alors introduire la théorie des noyaux orthogonaux. Comme l'hypothèse $a_{ik} = a_{ki}$ est incompatible avec les conditions (1) et (2), on n'aura pas l'équivalent des noyaux symétrique, mais on pourrait définir des noyaux «symétrisables».

Γ^n_{ik} étant la résolvante du noyau a^n_{ik}, on a:

$$\Gamma_{ik}(\lambda) = H_{ik}(\lambda) + \lambda^{n-1}\,\Gamma^n_{ik}(\lambda^n) + \lambda^n \sum_j H_{ij}(\lambda)\cdot\Gamma^n_{jk}(\lambda^n) \qquad (8)$$

en posant:

$$H_{ik}(\lambda) = a_{ik} + \lambda\, a^2_{ik} + \ldots + \lambda^{n-2}\, a^{n-1}_{ik}$$

Il en résulte que les principaux résultats précédents subsistent si, A n'étant une substitution de Dixon, l'une de ses itérées A^n l'est.

Ces résultats s'expliquent de la façon suivante: d'abord l'étude des substitutions A et leurs itérées A^n est équivalente à celle des noyaux de Fredholm relatifs à un domaine non borné: nous entendrons par là que les méthodes qui valent dans un cas valent aussi dans l'autre, et c'est en somme ce qui ressort de notre section II; or pour un noyau de Fredholm, on peut toujours par un changement de variables se ramener à un domaine borné; mais alors en général le nouveau noyau ne sera plus borné, et la solution de Fredholm disparaîtra: si toute fois le noyau reste borné, et c'est le cas pour les substitutions de Dixon ou plutôt pour leurs analogues dans la théorie des noyaux de Fredholm, la solution de Fredholm demeure.

NOTE II

SUR UNE EXPRESSION, EN FONCTION DE n, DE LA $n^{\text{ième}}$ ITÉRÉE A^n D'UNE SUBSTITUTION LINÉAIRE A.

Dans la section IV, nous nous sommes posé le problème de déterminer une expression en fonction de n de la $n^{\text{ième}}$ itérée A^n d'une substitution linéaire complètement continue A; nous allons établir un théorème qui fournir précisément une telle expression; il ne semble pas que cette expression soit très maniable, mais comme elle est simple et facile a établir, il nous a paru intéressant de l'indiquer.

Soit A une substitution linéaire quelconque, dans un espace $L^{(p)}$; soit A^n sa $n^{\text{ième}}$ itérée, nous poserons $E = A^0$; on a, pour $|\lambda|$ assez petit:

$$(E - \lambda A)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} A^n \cdot \lambda^n$$

Posons $\lambda = \dfrac{\mu}{1-\mu}$; il vient:

$$\left(E - \frac{\mu}{1-\mu} A\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^n$$

$$[E - \mu(E + A)]^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} A^n \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^n\right] \times \frac{1}{1-\mu}$$

$$= E(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} B^n \mu^n$$

en posant: $B = E + A$; on en tire:

$$\sum_n A^n \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^n = (1-\mu) \cdot \sum_n B^n \cdot \mu^n = E + \sum_{n=1}^{\infty} (B^n - B^{n-1})\, \mu^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A^n \cdot \lambda^n = E + \sum_{n=1}^{\infty} (B^n - B^{n-1}) \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^n$$

$$\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^j = \lambda^j (1+\lambda)^{-j} = \sum_r (-1)^r \frac{j(j+1)\ldots(j+r-1)}{r!} \lambda^{r+j}$$

$$= \sum_{n=j}^{\infty} (-1)^{n-j} \frac{(n-1)\,(n-2)\ldots j}{(n-j)\,!} \lambda^n$$

d'où:

$$A^n = \sum_{j=1} (-1)^j \cdot (B^j - B^{j-1}) \cdot (-1)^n \cdot \frac{(n-1)(n-2)\ldots. j}{(n-j)\,!}$$

$$= (-1)^n \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \left[(E+A)^j - (E+A)^{j-1}\right] C_{n-1}^{j-1}$$

THÉORÈME: *La $n^{\text{ième}}$ itérée A^n d'une substitution linéaire A peut se mettre sous la forme:*

$$A^n = (-1)^n \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \left[(E+A)^j - (E+A)^{j-1}\right] C_{n-1}^{j-1}$$

NOTE III.

SUR L'ITÉRATION DES NOYAUX DE FREDHOLM SANS CONSTANTES FONDAMENTALES.

Nous avons montré, à la section IV, que lorsque la substitution A est quasi-régulière, A^n est la forme:

$$A^n = B^n + \pi^n$$

où π^n est la $n^{\text{ième}}$ itérée d'une substitution π dépourvue de constantes fondamentales (v. p); ceci amène à considérer l'itération des substitutions sans constantes fondamentales. Voici à ce sujet 2 remarques, que nous faisons à propos des noyaux de Fredholm, mais qu'il serait facile de traduire dans le langage des substitutions.

REMARQUE 1: Soit un noyau de Fredholm $k(M, P)$ défini sur un domaine V borné, tel que à partir d'un certain rang m tous ses itérés $k_n(M, P)$ soient bornés, et dépourvu de constantes fondamentales.

M. Fréchet a montré (Fréchet, , p) que dans ce cas, il existe une fonction positive $g(\rho)$, indépendante de M et de P, telle que l'on ait, quel que soit ρ positif, et pour $n \geq m$,

$$| k_n (M, P) | \leq \frac{g(\rho)}{\rho^n} \qquad (1)$$

Nous nous proposons de fournir un résultat analogue mais plus précis.

En reprenant les notations de M. Fréchet, désignons par $\Delta(\mu)$, $\Delta(M, P, \mu)$, $\Gamma(M, P, \mu)$, les 2 déterminants de Fredholm et la résolvante relative au noyau $k_m(M, P)$; soit Q_m la borne supérieure de $|k_m(M, P)|$ et v la mesure du domaine V;

$$\Gamma(M, P, \mu) = \frac{\Delta(M, P, \mu)}{\Delta(\mu)}$$

Supposons d'abord que $\Delta(\mu)$ soit de genre 0; nécessairement alors: $\Delta(\mu) = 1$, et on a: $\Gamma(M, P, \mu) = \Delta(M, P, \mu)$. Mais dans tous les cas le développement en série entière de $\Delta(M, P, \mu)$ est majoré terme à terme par:

$$F(|\mu|) = \sum_p |\mu|^p \frac{Q_m^{p+1} v^p (p+1)^{\frac{p+1}{2}}}{p!}$$

Il en est donc de même de $\Gamma(M, P, \mu)$; d'où il résulte que $\mu\,\Gamma(M, P, \mu)$ est majoré par $|\mu| F(\mu) = F'(\mu)$:

$$F'(\mu) = \sum_p |\mu|^{p+1} \frac{Q_m^{p+1} v^p (p+1)^{\frac{p+1}{2}}}{p!}$$

Et comme on a:

$$\mu\,\Gamma\,(M, P, \mu) = \sum_{s} \mu^{s}\, k_{sm}\,(M, P)$$

on en déduit:

$$|k_{sm}\,(M, P)| \leq Q_m^{1}\, v^{s-1}\, \frac{s^{\frac{s}{2}}}{(s-1)!}$$

Soit alors $n \geq m$, posons: $n = sm + r$ $(0 \leq r < m)$; on a:

$$k_n(M, P) = \int_V k_{r+m}\,(M, Q)\; K_{(s-1)m}\,(Q, P)\; dQ$$

et puisque $r + m \geq m$, $|k_{r+m}\,(M, Q)|$ est borné supérieurement par un nombre Q_{r+m}, et l'on a:

$$|k_n(M, P)| \leq Q_{r+m} \times Q_m^{s-1} \times v^{s-2} \times \frac{(s-1)^{\frac{s-1}{2}}}{(s-2)!} \times v$$

$$\leq \frac{Q_{r+m}}{v \cdot Q_m} \times (v \cdot Q_m)^{s} \times \frac{s^{\frac{s+3}{2}}}{s!}$$

A désignant le plus grand des nombres $\dfrac{Q_{r+m}}{v \cdot Q_m}$ et en posant $B = v \cdot Q_m$, on a:

$$|k_n(M, P)| \leq A \cdot B^{s} \cdot \frac{s^{\frac{s+3}{2}}}{s!} \qquad (2)$$

Si $\Delta(\mu)$ n'est pas de genre zéro, en tous cas le déterminant de Fredholm relatif à $k_{3m}(M, P)$ est de genre 0: par conséquent la relation (2) subsiste, en remplaçant m par $3m$ et pour $n \geqq 3m$:

s désignant la partie entière de $\frac{n}{3m}$, *on peut trouver 2 nombres positifs A et B tels que l'on ait, quel que soient M et P, et pour* $n \geqq 3m$,

$$|k_n(M, P)| \leqq A \cdot B^s \cdot \frac{s^{\frac{s+3}{2}}}{s!} \qquad (3)$$

On vérifie que cette limitation est plus avantageuse que la limitation (1).

Observons aussi que cette limitation (ainsi que celles indiquées par M. Fréchet) s'étend sans peine aux itérées successives d'une fonction $f(M)$ par la formule de récurrence: $f^{n+1}(M) = \int_V k(M, P)\, f^n(P)\, dP$.

REMARQUE 2: *Si $k(M, P)$ est un noyau borné de rang fini r, son n^{ieme} itéré $k_n(M, P)$ est identiquement nul pourvu que n soit plus grand que r.*

Nous ignorons si cette propriété a déjà été indiquée; en tous cas sa démonstration n'offre guère de difficultés.

Note IV

Sur les noyaux réguliers de M. Monteiro.

La recherche des noyaux «minimaux» de M. Lewin (voir Section IV, et Lewin, 1) conduit à considérer le problème de calcul des variations suivant:

[dans ce qui suit, il ne s'agit que de fonctions de carré doublement sommable].

Etant donnée la fonction $F(x, y)$ *définie sur le domaine* V, *à 2 dimensions déterminer* $G(x, y)$ *de telle sorte que:*

$$\begin{cases} \int_V F(x, z)\ G(z, y)\ dz = 0 & (1) \\ \int_V F(z, x)\ G(y, z)\ dz = 0 & (2) \end{cases}$$

et que l'intégrale $I = \int_V \int |F(x,y) + G(x,y)|^2\ dx\ dy$ *soit minimum.*

M. Lewin ne s'est pas posé ce problème, mais si l'on interprète ses résultats à ce point de vue, on trouve que le problème n'a pas de solution en général; mais il n'en est pas de même dans certains cas particuliers.

Soit V' l'ensemble des fonctions de carré sommable qui sont de la forme

$$A(x) = \sum_{j=1}^{r} \mu_j F(x, y_j)$$

$y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_r$ étant r valeurs fixes quelconques de y; soit V l'ensemble des fonctions de V' et de leurs limites dans l'espace des fonctions de carré sommable; on définit de même l'ensemble W, en intervertissant les rôles de x et de y: nous dirons que $F(x, y)$ est *régulière* et que l'on est dans le *cas régulier*, si $\overline{V} = W$ ($\overline{V}$ étant l'imaginaire conjugué de V).

On a: $|F + G|^2 = (F+G)\ (\overline{F}+\overline{G}) = |F|^2 + |G|^2 + F \cdot \overline{G} + \overline{F} \cdot G$

Or, (1) signifie que toute fonction de W est orthogonale à gauche à G, et (2) que toute fonction de V est orthogonale à droite à G; si $\overline{V} = W$, on en déduit que:

$$\int_V F(x, y)\ \overline{G(z, y)}\ dy = 0\ ;\ \int_V \overline{F(x, y)}\ G(x, z)\ dx = 0$$

de sorte que:

$$I = \iint_V |F + G|^2\ dx\ dy = \iint |F|^2\ dx\ dy + \iint_V |G|^2\ dx\ dy \quad (3)$$

d'où il résulte que:

THÉORÈME: *Dans le cas régulier, le problème admet une solution unique qui est:* $G = 0$.

De cette remarque très simple on déduit immédiatement les résultats de M. Monteiro relatifs aux noyaux réguliers (voir section IV et Monteiro, 1) : soit en effet $k(x, y)$ un noyau régulier et k_1, k_2,..., k_n ses noyaux principaux, qui sont chacun des fonctions régulières au sens de la définition précédente, et qui sont 2 à 2 orthogonaux; on a donc, d'après (3), et en posant $H_n = \Sigma^n k_j$,

$$I_n = \int\int_V |H_n|^2 \, dx \, dy = \sum_{j=1}^{n} \int\int_V |k_j|^2 \, dx \, dy \qquad (4)$$

et puisque H_n est une fonction régulière, et que $k - H_n$ et H_n sont orthogonaux:

$$I_n \leq \int\int_V |k|^2 \, dx \, dy \qquad (5)$$

D'où il résulte que H_n converge, en double moyenne quadratique, vers un noyau H, et que $k - H$ et H sont orthogonaux, $k - H$ étant dépourvu de constantes fondamentales.

Note V

Sur les produits infinis de substitutions linéaires; applications aux chaînes simples variables de Markoff.

Soit, dans un espace à q dimensions, une suite de substitutions linéaires $A_2, \ldots, A_n, \ldots$ et considérons la suite des produits: $\pi_1 = A_1$, $\pi_2 = A_1 \cdot A_2, \ldots, \pi_n = A_1, A_2, \ldots, A_n$: plusieurs auteurs ont étudié le comportement des π_n lorsque n croît indéfiniment; on n'a pas, à notre connaissance, signalé la remarque très simple suivante, qui étend au cas des substitutions la notion de produit infini absolument convergent.

Supposons que les A_n tendent, lorsque n croît indéfiniment, vers une limite A de borne $\| A \| \leq 1$, de telle façon que la série $\sum_n \| A_n - A \|$ converge.

Posons $A_n = A + B_n$; développons le produit infini absolument convergent $\pi_{n=1}^{\infty} (1 + \| B_n \|)$: on obtient une série absolument convergente s; développons d'autre part le produit $\pi_n = (A+B_1)(A+B_2)\ldots(A+B_n)$: à chaque terme de ce développement on peut faire correspondre le terme de s qui s'en déduit en remplaçant A par 1 et B_i par $\| B_i \|$; donc s majore terme à terme le produit π_n ; soit s_r la somme des r premiers termes de s, R_r la différence $s - s_r$, $\pi_r(n)$ la somme des r premiers termes de π_n, $R_r(n)$ la différence $\pi(n) - \pi_r(n)$.

Soit ϵ un nombre positif quelconque; on peut determiner un entier positif r_1 tel que l'on ait: $|R_{r_1}| < \epsilon$, d'où il suit que:

$$\| R_{r_1}^{(n)} \| \leqq |R_{r_1}| < \epsilon$$

Si l'on range convenablement les termes de s, les termes correspondants de $\pi_r(n)$ sont des produits de A^n, A^{n-1},..., A^{n-r} par des substitutions déterminées indépendantes de n; A^n converge au sens de Cesarò, vers une limite déterminée; de sorte qu'en désignant par $\pi_{ik}(n)$, $\pi_{r,ik}(n)$, $\rho_{r,ik}(n)$ les coefficients de $\pi(n)$, $\pi_r(n)$, $R_r(n)$, $\pi_{r,ik}(n)$ converge, au sens de Cesarò, vers une limite déterminée $\pi_{r,ik}$; on peut donc trouver un entier positif n_1 tel que pour $n > n_1$, on ait:

$$\pi_{r_1,ik} - 2\epsilon \leqq \frac{\sum_{j=1}^{n} \pi_{ik}(j)}{n} \leqq \pi_{r_1,ik} + 2\epsilon$$

Soit maintenant r_2 tel que $|R_{r_2}| < \frac{\epsilon}{2}$; on pourra déterminer $n_2 > n_1$ et tel que pour $n > n_2$, on ait:

$$\pi_{r_2,ik} - 2\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \leqq \frac{\sum_{j=1}^{n} \pi_{ik}(j)}{n} \leqq \pi_{r_2,ik} + 2\left(\frac{\epsilon}{2}\right)$$

Et ainsi de suite: on définit des nombres croissants $n_1, n_2, .., n_s, ...$

tels que pour $n > n_s$, $\frac{\sum_{j=1}^{n} \pi_{ik}(j)}{n}$ soit compris dans un intervalle I_s dans un intervalle $4 \cdot \frac{\varepsilon}{s}$; de sorte que pour $n > n_t$, $\frac{\sum_{j=1}^{n} \pi_{ik}(j)}{n}$ est dans la partie commune aux intervalles: $I_1, I_2, \ldots, I_t$: comme I_t tend vers 0, c'est donc que $\frac{\sum_{j=1}^{n} \pi_{ik}(j)}{n}$ a une limite π_{ik}. Donc:

THÉORÈME: *Si les substitutions* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *tendent, lorsque n croît indéfiniment, vers une limite A de borne inférieure ou égale à 1, et de telle façon que la série* $\sum_n \| A_n - A \|$ *soit convergente, les produits* $\pi_n = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ *convergent au sens de Cesarò vers une limite* π *; dans le cas particulier où la résolvante* $A(\lambda)$ *de A n'admet que 1 comme pôle de module 1, la convergence a lieu au sens ordinaire.*

REMARQUE: On voit aussi facilement que s'il existe r substitutions $A^{(1)}$, , $A^{(2)}$, de bornes inférieures ou égales à 1, et telles que les séries $\sum_n \| A^{(i)} - A_{nr+i} \|$ convergent quel que soit i ($i = 1, 2, \ldots, r$), les produits π_n convergent au sens de Cesarò.

Et plus généralement ; s'il existe des substitutions $A^{(1)}$, $A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}, \ldots$ de bornes inférieures ou égales à 1, telles que les produits $\pi^{(n)} = A^{(1)} \times \ldots \times A^{(n)}$ convergent au sens de Cesarò

et que la série $\sum_n \| A^{(n)} - A_n \|$ converge, les produits $\pi_n = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ convergent au sens de Cesarò.

APPLICATION AUX CHAÎNES SIMPLES VARIABLES DE MARKOFF: Dans le cas d'un nombre fini q d'états possibles, le problème des chaînes simples variables de Markoff revient à la multiplication d'une infinité de substitutions linéaires $P_1\left(p_{ik}(1)\right)$, $P_2\left(p_{ik}(2)\right)$,...., $P_n\left(p_{ik}(n)\right)$,.., de bornes égales à 1. On déduit du théorème précédent que:

THÉORÈME: *Si les probabilités de passage* $\pi_{ik}(n)$ *tendent vers des limites* p_{ik} *de telle façon que les séries* $\sum_n |p_{ik} - p_{ik}(n)|$ *convergent quels que soient* i *et* k, *les probabilités* P^n_{ik} *de réaliser l'état* E_k *à la suite de* n *expériences à partir de l'état* E_i *convergent au sens de Cesarò vers des limites* π_{ik}.

Et de la remarque précédente, on déduit que:

S'il existe des fonctions périodiques de n, $\rho_{ik}(n)$ *telles que les séries* $\sum_n |p_{ik}(n) - \rho_{ik}(n)|$ *convergent, les probabilités* P^n_{ik} *convergent au sens de Cesarò.*

BIBLIOGRAPHIE

Carleman: 1 Sur une classe d'équations intégrales à noyaux asymétriques [C. R. Acad. Sc., Paris, t. 172, 1921, p. 655].

Darboux: 1 Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série. [Journal de Mathématiques, 3er. série, t. IV, 1878, p. 5].

Fréchet: 1 Sur l'allure asymptotique de la suite des itérés d'un noyau de Fredholm [The Quarterly Journal of Mathematics, vol. 5, nº 18, 1934, p. 106].

2 Compléments à la théorie des probabilités discontinues «en chaîne» [Annali della R. Scuola Norm. Super di Pisa, série II, vol. II, 1933].

3 Sur l'allure asymptotique des densités itérées dans le problème des probabilités «en chaîne» [Bull. Soc. Math. de France, t. 62, 1934].

4 Les probabilités en chaîne [Commentarii Mathématici Helvetici, vol. 5, 1933, p. 170-245].

5 Les espaces abstraits [Paris, 1928].

6 Comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations linéaires et homogènes aux différences finies du premier ordre à coefficients constants. [Public. de la Fac. des Sc. de l'Univ. Masaryk, fasc. 178, 1933].

7 Une expression générale du n^{ieme} itéré d'un noyau de Fredholm en fonction de n [Journal de Mathématiques, 9^{eme}. série, t. 15, 1936, p. 251].

Goursat: 1 Cours d'Analyse, t. 3. [Paris, 1927].

Hostinsky: 1 Méthodes Générales du Calcul des Probabilités [Paris, 1931].

Lewin: 1 Integralgleichungen und Funktionalräume [Recueil de la Société Mathematique de Moscou, t. 39, n° 4, p. 3].

Monteiro: 1 Sur une classe de noyaux de Fredholm développables en série de noyaux principaux. [C. R. Acad. Sc. Paris, t. 200, 1935, p. 2143].

Onicescu-Mihoc: 1 Sur les chaînes de variables statistiques [Bull. des Sc. Mathématiques, 2^{e}. série, t. 59, 1935, p. 174].

2 Sur les chaînes statistiques [C. R. Acad. Sc., Paris, t. 202, 1936, p. 2032].

Riesz (F): 1 Über lineare Funktionalgleichungen [Acta Mathematica, t. 41, 1918, p. 71].

2 Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues [Paris, 1913].

de la Vallée-Poussin: 1 Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, Classes de Baire [Paris, 1934].