M. Lazard

Théorie des répliques. Critère de Cartan

Séminaire "Sophus Lie", tome 1 (1954-1955), exp. n° 6, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SSL_1954-1955__1__A9_0>

Exposé n° 6

THÉORIE DES RÉPLIQUES. CRITÈRE DE CARTAN

(Exposé de M. LAZARD, le 14.12.54)

1.- Résultats préliminaires sur les matrices.

Notations. K corps de caractéristique 0

$\mathfrak{M}$ espace vectoriel de rang fini sur K

$\mathfrak{M}^*$ dual de $\mathfrak{M}$

$\mathfrak{M}_{r,s}$ produit tensoriel de r espaces isomorphes à $\mathfrak{M}$ et de s espaces isomorphes à $\mathfrak{M}^*$

$\mathfrak{gl}(\mathfrak{M})$ est l'algèbre de Lie des endomorphismes de $\mathfrak{M}$.

Si L est un surcorps de K, on désigne par $\mathfrak{M}^L$ l'espace vectoriel sur L obtenu par extension du corps des scalaires $\mathfrak{M}^L = \mathfrak{M} \otimes_K L$. Si X est un K-endomorphisme X^L est le L-endomorphisme de $\mathfrak{M}^L$ qui se réduit à X sur $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}^L$.

Nous aurons besoin d'un certain nombre de résultats préliminaires sur les endomorphismes X de $\mathfrak{M}$, qui sont d'ailleurs classiques. Faisons d'abord la remarque que le choix d'un endomorphisme X de $\mathfrak{M}$ définit une structure de $K[x]$-module sur $\mathfrak{M}$ par la loi $P.m = P(X).m$ ($P \in K[x]$ et x une indéterminée).

Proposition 1. Le bicommutant de X est formé des polynomes en X.

$A = K[x]$ étant un anneau principal, ce résultat est impliqué par le suivant :

M étant un module de type fini sur l'anneau principal A, l'ensemble des endomorphismes du groupe M qui commutent à tous les A-endomorphismes est identique aux homothéties par les éléments de A.

En effet M est somme directe de sous-modules monogènes M_i $(1 \leq i \leq n)$ de générateurs e_i, l'annulateur de e_i étant l'idéal $\mathfrak{a}_i$ de sorte que $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{a}_{i+1}$. Si f commute aux A-endomorphismes, il commute aux projecteurs E_i de la décomposition $M = \sum M_i$ donc f conserve les M_i et $f(e_i) = \lambda_i e_i$ $(\lambda_i \in A)$. Mais comme $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{a}_{i+1}$ il existe un A-endomorphisme p et un seul de M tel que $p(e_i) = e_{i+1}$ $(i < n)$ $p(e_n) = 0$. Par suite comme f commute à p :

$$\begin{aligned} f(e_i) &= f(p^{i-1}(e_1)) = p^{i-1} f(e_1) \\ &= \lambda_1 p^{i-1} e_1 = \lambda_1 e_i \end{aligned}$$

Les homothéties sont des A-endomorphismes et f commute donc aux homothéties donc est un A-endomorphisme.

f est l'homothétie de rapport $\lambda_1 \in A$ C.Q.F.D.

<u>Proposition 2</u>. <u>Si</u> X <u>est un endomorphisme de</u> $\mathfrak{M}$ <u>les conditions suivantes portant sur</u> X <u>sont équivalentes</u>

1). <u>Le</u> $K[X]$<u>-module</u> $\mathfrak{M}$ <u>est semi-simple</u>.

2). <u>Il existe un polynôme</u> P <u>sans facteurs multiples tel que</u> $P(X) = 0$

3). <u>Si</u> L <u>est la clôture algèbrique de</u> K , X^L <u>est réductible à la forme diagonale</u>.

Si l'une de ces conditions est remplie, X est dit <u>semi-simple</u>.

1) $\Rightarrow$ 2) $\mathfrak{M}$ est somme directe de modules simples $\mathfrak{M}_i$ d'après 1). Soit $e_i \in \mathfrak{M}_i$ $e_i \neq 0$. L'annulateur de e_i est un idéal (P_i) . P_i est irréductible : sinon soit $P_i = Q_i . R_i$, $Q_i . e_i = f_i \neq 0$ est annulé par R_i donc engendre un module dont le rang sur K est le degré de R_i donc plus petit que le rang de $\mathfrak{M}_i$ sur K . Autrement dit le module engendré par f_i est contenu dans $\mathfrak{M}_i$ et distinct de (0) et $\mathfrak{M}_i$ contrairement à l'hypothèse que $\mathfrak{M}_i$ est simple. Si l'on prend pour P le produit des P_i <u>distincts</u>, $P(X) = 0$ et P est sans facteur multiple.

2) $\Rightarrow$ 3) Puisque P est sans facteur multiple, P se décompose dans L en produit de facteurs linéaires distincts (car K est de caractéristique 0 donc parfait). $P(x) = \prod_i (x - \lambda_i)$. Alors $1 = \sum P_i(x)$ avec

$$P_i(x) = \frac{P(x)}{P'(\lambda_i)(x - \lambda_i)}$$

$E_i = P_i(X^L)$ applique $\mathfrak{M}^L$ dans le sous-espace des vecteurs propres associés à la valeur propre λ_i et s'annule sur les vecteurs propres associés à λ_j si $j \neq i$. Par suite les E_i sont des projecteurs deux à deux orthogonaux et X^L se réduit à un scalaire dans $\mathfrak{M}_i = E_i \mathfrak{M}^L$. Donc X^L est diagonalisable.

3) $\Rightarrow$ 1) Soit $\mathfrak{N}$ un sous-module de $\mathfrak{M}$. Pour montrer que $\mathfrak{M}$ est semi-simple il faut prouver qu'il existe un projecteur E de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{N}$ qui commute à X . Un tel E est défini par les équations suivantes :

(a) $\langle En , m' \rangle = \langle n , m' \rangle$ $\quad n \in \mathfrak{N}$ $\quad m' \in \mathfrak{M}^*$

(b) $\langle Em , n' \rangle = 0$ $\quad m \in \mathfrak{M}$ $\quad n' \in \mathfrak{N}^{\perp} \subset \mathfrak{M}^*$

(c) $\langle EXm , m' \rangle = \langle Em , {}^tXm' \rangle$ $\quad m \in \mathfrak{M}$ $\quad m' \in \mathfrak{M}^*$

X^L étant diagonalisable, $\mathfrak{M}^L$ est semi-simple donc il existe un projecteur E' commutant à X^L de $\mathfrak{M}^L$ sur $\mathfrak{N}^L$, mais ceci signifie que les équations linéaires (a) (b) (c) à coefficients dans K ont une solution dans L elles ont donc une solution dans K . C.Q.F.D.

Proposition 3. On peut écrire $X = Y + Z$ Y étant semi-simple et Z nilpotent, Y et Z commutant. De plus une telle décomposition est unique et Y et Z s'expriment par des polynômes en X . Tout élément annulé par X est annulé par Y et Z.

Il existe un polynôme f sans facteur multiple et un entier $r > 0$ tel que $f(X)^r = 0$. On va fabriquer des g_i par récurrence sur i pour satisfaire aux congruences

$$(A_q) \qquad f(x - \sum_{i=0}^{q} g_i(x)\, f^i(x)) \equiv 0 \qquad \mod f^{q+1}$$

On prend $g_0 = 0$ et (A_0) est satisfaite. Supposons trouvés $g_0 \ldots g_{n-1}$ et posons :

$$P = x - \sum_{i=0}^{n-1} g_i\, f^i$$

$$(1) \qquad f(P(x)) \equiv 0 \qquad \mod f^n$$

(A_n) s'écrit

$$f(P - g_n\, f^n) \equiv 0 \qquad \mod f^{n+1}$$

Mais par la formule de Taylor

$$f(P - g_n\, f^n) = f\,(P) - g_n\, f^n\, f'(P) + f^{n+1}\, R$$

or $f(P) = \varphi . f^n$ d'après (1) et il suffira pour g_n de satisfaire à la congruence

$$(B) \qquad \varphi - g_n\, f' \equiv 0 \qquad \mod f$$

Or on peut résoudre (B) en g_n car f et f' sont premiers entre eux.

En considérant la congruence (A_{r-1}) on trouve alors

$$(2) \qquad f(X - \sum_{i=0}^{r-1} g_i(X) f^i(X)) = 0 \qquad \text{car} \qquad f(X)^r = 0$$

Il suffit alors de poser $Z = \sum_{i=0}^{r-1} g_i(X)\, f^i(X)$ et $Y = X - Z$; comme $g_0 = 0$ Z est divisible par $f(X)$ et donc $Z^r = 0$. $f(Y) = 0$ d'après (2) et comme f est sans facteur multiple Y est semi-simple.

On a donc démontré l'existence d'une telle décomposition. Soit $X = Y' + Z'$ une autre décomposition avec $[Y',Z'] = 0$. Alors $[X,Y'] = [X,Z'] = 0$ donc Y' et Z' commutent avec Y et Z . On a alors

$$Y + Z = Y' + Z' \qquad \text{donc} \qquad Y - Y' = Z' - Z$$

Mais la condition 3) de la prop.2 montre que Y et Y' semi-simples commutant, $Y-Y'$ est semi-simple. D'autre part Z et Z' commutent et sont nilpotents, et l'on voit sans mal que $Z - Z'$ est nilpotent. Or on voit facilement qu'il n'y a pas d'endomorphisme non nul qui soit semi-simple et nilpotent. Donc $Y = Y'$ $Z = Z'$. Soit

e tel que $Xe = 0$ $Z = P(X)$ donc $Ze = P(0)e = \lambda e$ comme $Z^h = 0$ $\lambda = 0$ et $Ze = 0$ $Ye = Xe - Ze = 0$

2.- Théorie des répliques.

La représentation linéaire $X \to X$ de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{M})$ dans $\mathfrak{M}$ se prolonge comme il a été dit au 1) de l'exposé n° 4 en une représentation $X \to X_{r,s}$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{M}_{r,s}$.

Définition 1 : $X' \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{M})$ est appelé une réplique de X si tout vecteur de $\mathfrak{M}_{r,s}$ annulé par $X'_{r,s}$ est annulé par $X'_{r,s}$

Proposition 4. a). Si X' est une réplique de X et X'' une réplique de X' X'' est réplique de X.

b). Si X' est réplique de X, $X'_{r,s}$ est réplique de $X_{r,s}$

a) est tout à fait clair.

Pour démontrer b) il faut remarquer que $(\mathfrak{M}_{r,s})_{r',s'}$ s'identifie à $\mathfrak{M}_{rr'+ss',rs'+sr'}$ cette identification étant compatible avec les représentations de $\mathfrak{g}$ données (cf exposé n° 4, 1) C.Q.F.D.

On a vu (exp. n° 4, 1) que $\mathfrak{M}^* \otimes \mathfrak{M}$ s'identifie à $\mathcal{L}(\mathfrak{M},\mathfrak{M}) = \mathfrak{gl}(\mathfrak{M})$, la représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{L}(\mathfrak{M},\mathfrak{M})$ étant donnée par $\theta(X).f = X \circ f - f \circ X$. Autrement dit

$$X_{1,1}\, f = [X,f]$$

Soit X' une réplique de X ; alors si f commute à X $X_{1,1}\, f = 0$ donc $X'_{1,1}\, f = 0$ et finalement X' commute à f. X' est dans le bicommutant de X donc (prop.1) $X' = P(X)$, P étant un polynôme. Il y a plus : on peut choisir ce polynôme sans terme constant. En effet deux cas sont à distinguer.

1) X n'annule aucun vecteur de $\mathfrak{M}$. Alors son polynôme minimal a un terme constant non nul qu'on peut supposer égal à 1. Par suite $1 = Q(X)$ Q sans terme constant. Mais alors dans $P(X)$ on peut remplacer le terme constant par un polynôme sans terme constant en X.

2) X annule un vecteur $e \neq 0$. Alors $X'e = 0$ i.e $P(X)e = 0$ or puisque $Xe = 0$ $P(X)e = P(0)e = 0$ donc $P(0) = 0$

De plus comme $X'_{r,s}$ est réplique de $X_{r,s}$ $X'_{r,s} = P_{r,s}(X_{r,s})$. La réciproque est évidente: si $X'_{r,s}$ est un polynôme sans terme constant en $X_{r,s}$ tout vecteur annulé par $X_{r,s}$ est annulé par $X'_{r,s}$. Donc :

Proposition 5. Pour que X' soit réplique de X, il faut et il suffit que pour tout couple (r,s) $X'_{r,s}$ s'exprime comme un polynôme sans terme constant en $X_{r,s}$

On va encore démontrer quelques propriétés des répliques, assez élémentaires mais essentielles par la suite.

Proposition 6. Si Y et Z sont respectivement les composantes semi-simple et nilpotent de X , $Y_{r,s}$, $Z_{r,s}$ sont respectivement les composantes semi-simples et nilpotentes de $X_{r,s}$.

En effet $Y_{r,s}$ est semi-simple (appliquer le 3) de la prop.2) $Z_{r,s}$ est nilpotent, et $[Y_{r,s}, Z_{r,s}] = [Y,Z]_{r,s} = 0$. Enfin $X_{r,s} = Y_{r,s} + Z_{r,s}$; l'unicité de la décomposition de $X_{r,s}$ permet de conclure :

Corollaire : Y et Z sont des répliques de X .

En effet $Y_{r,s}$ et $Z_{r,s}$ étant les composantes semi-simple et nilpotente respectivement de $X_{r,s}$ annulent tout vecteur annulé par $X_{r,s}$ (prop.3)

Enfin étudions l'effet d'une extension du corps de base.

Proposition 7 : Si X' est une réplique de X , X'^L est une réplique de X^L . Réciproquement toute réplique (dans $\mathfrak{M}^L$) de X^L est combinaison linéaire à coefficients dans L de répliques de X .

D'après la proposition 5 $X'_{r,s} = P(X_{r,s})$ donc $X'^L = P((X_{r,s})^L) = P((X^L)_{r,s})$ donc X'^L est réplique de X^L . Réciproquement tout L-endomorphisme de $\mathfrak{M}^L$ est de la forme $Y = \sum \omega_i Y_i^L$ $Y_i \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{M}), \omega_i \in L$ linéairement indépendants.

$$Y_{r,s} = \sum \omega_i (Y_i)^L_{r,s}$$

Si un vecteur de $\mathfrak{M}_{r,s}$ est annulé par $Y_{r,s}$ il est donc annulé séparément par les $(Y_i)^L_{r,s}$ donc si Y est réplique de X^L , tout vecteur de $\mathfrak{M}_{r,s}$ annulé par $X_{r,s}$ est annulé par les $(Y_i)_{r,s}$. C.Q.F.D.

3.- Le critère de nilpotence.

Théorème 1. Pour que X soit nilpotent, il faut et il suffit que $\mathrm{Tr}(XX') = 0$ pour toute réplique X' de X .

Si X est nilpotent, comme X' commute à X XX' est nilpotent et $\mathrm{Tr}(XX') = 0$.

Réciproquement soit $X = Y + Z$ la décomposition de X . Y est une réplique de X (prop. 6) donc si Y' est une réplique de Y , elle est une réplique de X . Mais alors Y' commute à Z donc $Y'Z$ est nilpotent et $\mathrm{Tr}(Y'Z) = 0$. Comme par ailleurs $\mathrm{Tr}(Y'X) = 0$ on a $\mathrm{Tr}(YY') = 0$ et on est ramené à prouver ceci :

Soit Y semi-simple tel que $\mathrm{Tr}(YY') = 0$ pour toute réplique Y' de Y .

Alors $Y = 0$

En vertu de la proposition 7 on peut se limiter au cas où K est algébriquement clos. Soit une base $\{e_i\}$ de $\mathfrak{M}$ telle que $Y e_i = \lambda_i e_i$. Y' appartenant au bicommutant de Y, $Y'e_i = \mu_i e_i$. $Y_{r,s}$ est diagonale par rapport à la base $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^*_{j_1} \dots \otimes e^*_{j_s} = f_{i,j}$ ($\{e^*_i\}$ base de $\mathfrak{M}^*$ duale de $\{e_i\}$) et multiplié l'élément écrit par $\lambda_{i_1} + \dots \lambda_{i_r} - \lambda_{j_1} \dots - \lambda_{j_s}$

Les éléments annulés par $Y_{r,s}$ sont donc combinaisons linéaires des $f_{i,j}$ tels que $\sum \lambda_{c_K} - \sum \lambda_{j_m} = 0$. Si toute relation linéaire à coefficients entiers entre les λ_i a lieu entre les μ_i alors $Y'_{r,s}$ annulent tous ces éléments et Y' est réplique de Y.

Supposons alors $\mathrm{Tr}(YY') = 0$ et $Y \neq 0$. Les λ_i engendrent sur le sous corps premier Q de K un espace vectoriel $P \neq (0)$. Q est le corps des rationnels puisque K est de caractéristique 0. Si $h \neq 0$ est une application Q-linéaire de P dans Q, et si $\mu_i = h(\lambda_i)$ toute relation entre les λ_i a lieu entre les μ_i et Y' est réplique de Y. Donc $0 = \mathrm{Tr}(YY') = \sum_i \lambda_i h(\lambda_i)$. h étant Q-linéaire et $h(\lambda_i) \in Q$ on a $\sum_i h(\lambda_i\ (h(\lambda_i)) = \sum_i h(\lambda_i)^2 = 0$, mais on est dans le corps des rationnels et une somme de carrés non nuls ne peut être nulle. Par suite $h(\lambda_i) = 0$ $h = 0$ contrairement à ce qu'on a supposé. C.Q.F.D.

4.- Algèbres de Lie algébriques.

Définition 2 : une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{M})$ est dite algébrique si $X \in \mathfrak{g}$ entraine que toute réplique X' de X est dans $\mathfrak{g}$.

Exemples : $\mathfrak{gl}(\mathfrak{M})$ est algébrique.

l'intersection de toutes les algèbres de Lie algébriques contenant $\mathfrak{g}$ est une algèbre algébrique $\bar{\mathfrak{g}}$ qu'on appelle l'enveloppe algébrique de $\mathfrak{g}$.

Proposition 8. $\bar{\mathfrak{g}}$ étant l'enveloppe algébrique de $\mathfrak{g}$

1) tout idéal dans $\mathfrak{g}$ reste un idéal dans $\bar{\mathfrak{g}}$
2) le centre de $\mathfrak{g}$ est contenu dans le centre de $\bar{\mathfrak{g}}$
3) $\mathfrak{g}$ et $\bar{\mathfrak{g}}$ ont même algèbre dérivée
4) si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, $[\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{a}}] \subset \mathfrak{g}$

on se sert pour démontrer cette proposition du lemme :

Lemme : Soient P et Q deux sous-espaces de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{M})$ $Q \subset P$. L'ensemble des $X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{M})$ tels que $\mathrm{ad}X.P \subset Q$ est une algèbre algébrique.

En effet $\mathfrak{gl}(\mathfrak{M}) \simeq \mathfrak{M}_{1,1}$ $\mathrm{ad}X = X_{1,1}$. Alors si X' est une réplique de X $X'_{1,1} = \mathrm{ad}X'$ est un polynôme sans terme constant en $\mathrm{ad}X$. Donc si $\mathrm{ad}X.P \subset Q$ $\mathrm{ad}X'.P \subset Q$

la proposition 8 se démontre alors sans mal

1) $P = Q = \mathfrak{a}$ $\mathfrak{a}$ idéal de $\mathfrak{g}$

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a} \Rightarrow [\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$$

2) $Q = 0$ $P = \mathfrak{z}$ (centre de $\mathfrak{g}$)

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{z}] \subset (0) \Rightarrow [\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{z}] \subset (0)$$

3) $P = \mathfrak{g}$ $Q = \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$

$$[\mathfrak{g},\check{\mathfrak{g}}] \subset \mathfrak{g}^{(2)} \Rightarrow [\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}^{(2)}$$

Puis $P = \bar{\mathfrak{g}}$ $Q = \mathfrak{g}^{(2)}$

$$[\mathfrak{g},\bar{\mathfrak{g}}] \subset \mathfrak{g}^{(2)} \Rightarrow [\bar{\mathfrak{g}},\bar{\mathfrak{g}}] \subset \mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$$

4) $P = \mathfrak{a}$ $Q = \mathfrak{g}$

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{a}] \subset \mathfrak{g} \Rightarrow [\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{a}] \subset \mathfrak{g}$$

puis $P = \bar{\mathfrak{g}}$ $Q = \mathfrak{g}$

$$[\mathfrak{a},\bar{\mathfrak{g}}] \subset \mathfrak{g} \Rightarrow [\bar{\mathfrak{a}},\bar{\mathfrak{g}}] \subset \mathfrak{g}$$

<u>Corollaire</u> : $\mathfrak{g}$ <u>est un idéal de</u> $\bar{\mathfrak{g}}$ <u>et</u> $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$ <u>est abélien</u>.

<u>Proposition 9</u>. <u>Si</u> A <u>est une algèbre</u> (<u>non nécessairement associative</u>) <u>de dimension finie sur</u> K , <u>ses dérivations forment une algèbre de Lie algébrique</u>.

Une multiplication dans A est élément μ de $\mathcal{L}(A \otimes A, A) \simeq A_{1,2}$. Cherchons $X_{1,2}.\mu$

$$\nu = X_{1,2}.\mu = X \circ \mu - \mu \circ (1 \otimes X + X \otimes 1)$$

autrement dit

$$\nu(a \otimes b) = X\mu(a \otimes b) - \mu(a \otimes Xb + Xa \otimes b)$$
$$= X(a.b) - a.Xb - Xa.b$$

Que X soit une dérivation équivaut donc à $\nu = X_{1,2}\,\mu = 0$.

Si X' est une réplique de X $X'_{1,2}\mu = 0$ donc X' est une dérivation de A .

C.Q.F.D.

<u>Proposition 10</u>. <u>Soit</u> $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{M})$. $\mathfrak{N}$ <u>désigne l'ensemble des</u> $N \in \mathfrak{g}$ <u>tels que</u> $\mathrm{Tr}(NX) = 0$ <u>pour tout</u> $X \in \mathfrak{g}$. $\mathfrak{N}$ <u>est un idéal de</u> $\mathfrak{g}$. <u>Tout élément de</u> $[\mathfrak{N},\mathfrak{g}]$ <u>est nilpotent et il en est de même de tout élément de</u> $\mathfrak{N}$ <u>si</u> $\mathfrak{g}$ <u>est algébrique</u>.

On vérifie facilement l'identité $\mathrm{Tr}([X,Y]Z) = \mathrm{Tr}(X[Y,Z])$ (utiliser $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$) . Donc si $X \in \mathfrak{g}$ $Y \in \mathfrak{g}$ $Z \in \mathfrak{N}$ $\mathrm{Tr}([X,Y]Z) = 0$ et par suite $\mathrm{Tr}(X[Y,Z]) = 0$ donc $[Y,Z] \in \mathfrak{N}$. $\mathfrak{N}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{g}$ est algébrique et $N \in \mathfrak{N}$ on a $\mathrm{Tr}(NN') = 0$ pour toute réplique N' de N donc (théorème 1) N est nilpotent.

Dans le cas général soit $N \in \mathfrak{N}$ $X \in \mathfrak{g}$ $Y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Alors $[X,Y] \in \mathfrak{g}$ et $\mathrm{Tr}([N,X]Y) = \mathrm{Tr}(N[X,Y]) = 0$ donc $\sum [N_i,X_i]$ est nilpotent puisque ses répliques sont dans $\bar{\mathfrak{g}}$.

<u>Théorème 2</u> : <u>Si la forme bilinéaire</u> $\mathrm{Tr}(XY)$ <u>est identiquement nulle sur</u> $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ <u>est résoluble</u>.

En effet tout $X \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est nilpotent d'après la prop.10. Donc d'après Engel $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est nilpotent et $\mathfrak{g}$ est résoluble.

5.- <u>Algèbres semi-simples</u>. <u>Critère de Cartan</u>.

<u>Définition 3</u> : <u>Une algèbre de Lie est dite semi-simple si elle ne possède pas d'idéal résoluble</u>. <u>Une algèbre de Lie est dite simple si elle est de dimension > 1 et qu'elle n'a pas d'idéal non trivial</u>.

Il résulte de cette définition que toute algèbre simple est semi-simple.

<u>Théorème 3</u> : (Cartan) : 1) <u>si</u> $\mathfrak{g}$ <u>est semi-simple et</u> θ <u>une représentation fidèle de</u> $\mathfrak{g}$, $\mathrm{Tr}(\theta(x)\theta(y))$ <u>est une forme bilinéaire non dégénérée</u>.

2) <u>Si la forme de Killing</u> $B(x,y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}y)$ <u>est non dégénérée</u> $\mathfrak{g}$ <u>est semi-simple</u>.

Les $n \in \mathfrak{g}$ tels que $\mathrm{Tr}(\theta(x)\theta(n)) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ forment un idéal $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{g}$ d'après la proposition 10. On a $\mathrm{Tr}(\theta(n)\theta(n')) = 0$ $(n,n' \in \mathfrak{N})$ donc (théorème 2) $\theta(\mathfrak{N})$ est résoluble et $\mathfrak{N}$ est résoluble puisque θ est fidèle. Donc puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple $\mathfrak{N} = 0$ et $\mathrm{Tr}(\theta(x)\theta(y))$ est non dégénérée.

Réciproquement supposons la forme de Killing non dégénérée et $\mathfrak{g}$ non semi-simple. Soit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ un idéal résoluble non nul, n la longueur de $\mathfrak{a}$ alors $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{(n-1)}$ est un idéal abélien non nul de $\mathfrak{g}$. Si $x,y \in \mathfrak{g}$ $b \in \mathfrak{b}$ on a

$$[b,y] \in \mathfrak{b} \quad [x,[b,y]] \in \mathfrak{b} \quad \text{donc} \quad [b,[X,[b,y]]] = 0 \quad \text{par suite}$$

$\mathrm{ad}b \circ \mathrm{ad}x \circ \mathrm{ad}b = 0$ d'où $(\mathrm{ad}' \circ \mathrm{ad}b)^2 = 0$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}x\ \mathrm{ad}b) = 0$ ce qui est absurde.

On va procéder maintenant à l'étude des idéaux d'une algèbre semi-simple.

<u>Proposition 11</u>. <u>Soient</u> $\mathfrak{g}$ <u>semi-simple et</u> $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ <u>deux idéaux de</u> $\mathfrak{g}$. <u>Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

1) $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = (0)$ 2) $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}] = (0)$ 3) $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ <u>sont orthogonaux pour la</u>

forme de Killing.

$1) \Rightarrow 2)$ car $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$

$2) \Rightarrow 3)$ si $a \in \mathfrak{a}$ $b \in \mathfrak{b}$ $x \in \mathfrak{g}$ $[b,x] \in \mathfrak{b}$ et $[a[b,x]] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = (0)$ donc ad a o ad b = 0 $B(a,b) = 0$

$3) \Rightarrow 1)$. En effet la forme de Killing est identiquement nulle sur l'idéal $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ qui est donc résoluble d'après le théorème 2. Comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple il s'ensuit que $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = (0)$.

Il résulte de cette proposition que tout idéal $\mathfrak{a}$ admet un supplémentaire et un seul à savoir l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ pour la forme de Killing.

Théorème 4 : une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ est somme directe d'algèbres simples $\mathfrak{g}_i$ et réciproquement. Tout idéal $\mathfrak{h}$ est somme directe de certains des $\mathfrak{g}_i$ et la décomposition de $\mathfrak{g}$ est unique.

Tout idéal ayant un supplémentaire, $\mathfrak{g}$ est somme directe d'idéaux minimaux. Un idéal minimal est simple car il n'est pas abélien donc de dimension > 1 et ne possède pas de sous-idéaux.

Soit $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{h}$ est somme directe d'idéaux minimaux de $\mathfrak{g}$ puisque la représentation adjointe est complètement réductible. Il suffit donc de montrer qu'un idéal minimal $\mathfrak{h}$ est l'un des $\mathfrak{g}_i$. Or $\mathfrak{h}$ ne peut être orthogonal à tous les $\mathfrak{g}_i$ car $\mathfrak{h}$ serait orthogonal à $\mathfrak{g}$ contrairement au fait que la forme de Killing est non dégénérée. Donc $\mathfrak{h}$ n'est pas orthogonal à l'un des $\mathfrak{g}_i$, soit $\mathfrak{g}_1$ et on a $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_1 \neq (0)$ comme $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}_1$ sont minimaux $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1$.

L'unicité de la décomposition résulte de ce que les $\mathfrak{g}_i$ sont les idéaux minimaux de $\mathfrak{g}$ donc bien déterminés. C.Q.F.D.

Corollaire 1 : $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$

car $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = (0)$ $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$ donc $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$

Corollaire 2 : tout idéal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est semi-simple

Corollaire 3 : tout idéal de $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ reste un idéal dans $\mathfrak{g}$.

car $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{h}'$ $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'] = (0)$. Si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$ alors $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$.