SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

LUIS G. GOROSTIZA
SYLVIE ROELLY-COPPOLETTA
ANTON WAKOLBINGER

# Sur la persistance du processus de Dawson-Watanabe stable. L'interversion de la limite en temps et de la renormalisation

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 24 (1990), p. 275-281
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__275_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# Sur la persistance du processus de Dawson-Watanabe stable. L'interversion de la limite en temps et de la renormalisation.

L.G. Gorostiza, S. Roelly-Coppoletta et A. Wakolbinger

*Le temps n'est plus un sablier qui use son sable,*
*mais un moissonneur qui noue sa gerbe*

*Saint-Exupéry, Citadelle*

## Introduction.

Le *processus stable de Dawson-Watanabe* (noté dorénavant D-W stable) est un processus de Markov $(X_t)$ à valeurs dans l'espace des mesures de Radon sur $\mathbf{R}^d$ dont la fonctionnelle de Laplace satisfait:

$$(1) \qquad E[\exp(-\langle X_t, g\rangle) \mid X_0=\mu] = \exp(-\langle \mu, U_t g\rangle),$$

pour $g : \mathbf{R}^d \to [0,\infty)$ régulière et à support compact, où $U_t g$, *semigroupe cumulant*, est l'unique solution de l' équation intégrale

$$(2) \qquad U_t g(x) = T_t g(x) - \frac{\gamma}{2}\int_0^t T_{t-s}((U_s g)^{1+\beta})(x)\,ds \qquad (t \geq 0,\ x \in \mathbf{R}^d)$$

ou encore, de l' e. d. p.

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} U_t g = \Delta_\alpha U_t g - \frac{\gamma}{2}(U_t g)^{1+\beta}, \\ &U_0 g = g. \end{aligned}$$

Ici $(T_t)$ est le semigroupe symétrique stable d'indice $\alpha \in (0,2]$ sur $\mathbf{R}^d$, de générateur $\Delta_\alpha := -(-\Delta)^{\alpha/2}$ ; $\beta \in (0,1]$ et $\gamma \in (0,\infty)$ sont des paramètres fixés.
Ce processus apparait naturellement comme limite, après renormalisation appropriée, de systèmes de particules se déplaçant dans $\mathbf{R}^d$ selon des processus symétriques stables d'indice $\alpha$ et se reproduisant suivant des lois stables d'indice $1+\beta$ (cf [DI] pour le cas $\beta = 1$ et [MRC] quand $\beta < 1$). Les paramètres $\alpha$ et $\beta$ reflètent respectivement la mobilité et la taille des amas. De plus, la mobilité (resp. la taille des amas) est une fonction décroissante de $\alpha$ (resp. de $\beta$). Cela explique pourquoi l'extinction en temps infini ou, au contraire, la persistance du processus de D-W stable sont directement liées au rapport de la dimension d de l'espace avec le quotient $\alpha/\beta$. Le théorème 1 explicite ce comportement en temps infini et le théorème 2 relie ce résultat avec ceux déjà existants [GW], relatifs au système de particules approximant. (Voir aussi [Dy] pour la structure des états d'équilibre de certains processus de D-W.)

## 1. Résultats.

Le cas où la mesure initiale $X_0$ est proportionnelle à la mesure de Lebesgue $\lambda$ est particulièrement intéressant puisque c'est le seul où l'intensité de $X_t$ , i.e. $EX_t$ , est conservée et égale à $X_0$ pour tout temps t positif. Nous nous restreindrons donc au cas $X_0 = \lambda$. Comme $\langle \lambda, T_t g\rangle = \langle \lambda, g\rangle$ et que la solution de (2) est positive, il est clair, à la vue de (1) et (2), que la fonctionnelle de Laplace de $X_t$ est croissante en t et donc que $X_t$

converge en loi, quand t tend vers l'infini, vers une mesure aléatoire $X_\infty$. Une question naturelle est alors de savoir si l'intensité de $X_t$ est encore préservée en temps infini, i.e. si $EX_\infty = \lambda$. Le théorème suivant y répond.

**Théorème 1.** $(X_t)$ est *persistant* (i.e. $EX_\infty = \lambda$) si et seulement si $d > \alpha/\beta$. Quand $d \le \alpha/\beta$, $(X_t)$ s'éteint, i.e. pour tout compact K, $X_t(K)$ tend vers 0 en probabilité.

Dans le cas $\beta = 1$ (le branchement est de variance finie) ce résultat a été obtenu par Dawson [Da]. Dans le cas $\alpha = 2$, $\beta \le 1$ l'extinction de $(X_t)$ quand $d \le 2/\beta$ a été démontrée par Dawson, Fleischmann, Foley et Peletier [DFFP], Proposition 2.3, par une méthode analytique.

Nous démontrerons le théorème 1 en utilisant le système de particules, et le processus $(X_t^1)$ associé à valeurs mesures discrètes, suivants: chaque particule, de masse unité, évolue selon un mouvement symétrique stable d'indice $\alpha$ dans $\mathbf{R}^d$ pendant un temps de vie distribué exponentiellement de paramètre $\gamma$. Quand elle meurt, chaque particule donne naissance sur le lieu de sa mort à N nouvelles particules, chacune d'elles suivant alors indépendamment des autres la dynamique décrite ci-dessus; la loi de la variable aléatoire N est dans le domaine d'attraction de la loi stable d'indice $1+\beta$ ; en particulier, nous prendrons une loi de fonction génératrice $s \to Es^N = s + \frac{1}{2}(1-s)^{1+\beta}$. $X_t^1$ est alors la mesure de comptage sur $\mathbf{R}^d$ associée à ce système de particules au temps t avec comme condition initiale, $X_0^1$, le processus de Poisson ponctuel d'intensité $\lambda$.

Explicitons maintenant la renormalisation appropriée de $X_t^1$ qui converge vers $X_t$.

Soit $(X_t^n)_{t\ge 0}$ le processus défini comme $(X_t^1)$ mais avec les modifications suivantes:

- chaque particule a pour masse $1/n$,
- le temps de vie moyen est $1/(n^\beta\gamma)$,
- le champ initial de particules forme un processus de Poisson d' intensité $n\lambda$.

Alors, d'après [MRC], théorème I.3, $X_t^n$ converge en loi vers $X_t$ pour tout t fixé. De plus, d'après [GW], pour tout n fixé, $X_t^n$ converge quand le temps devient infini vers une certaine mesure aléatoire $X_\infty^n$. Le théorème suivant relie ces différents résultats avec le théorème 1.

**Théorème 2.** La limite en temps et la renormalisation du processus de branchement spatial défini ci-dessus peuvent s'intervertir, i.e. le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} X_t^n & \xrightarrow{t\to\infty} & X_\infty^n \\ {\scriptstyle n\to\infty}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ X_t & \xrightarrow[t\to\infty]{} & X_\infty \end{array}$$

## 2. Démonstrations.

Nous calculons tout d'abord la fonctionnelle génératrice de $X_t^1$.

**Lemme 1.** Pour toute fonction $g : \mathbf{R}^d \to (0,1]$ régulière on a:

(4) $$E[\exp(\langle X_t^1, \log g\rangle)] = \exp(-\langle\lambda, U_t(1-g)\rangle) .$$

**Preuve.** D'après [DI] par exemple,

(5) $$E[\exp(\langle X_t^1, \log g\rangle)] = \exp(-\langle\lambda, 1-V_t g\rangle) ,$$

où $V_t g$ est solution de l' e.d.p.

(6) $$\frac{\partial}{\partial t} V_t g = \Delta_\alpha V_t g + \frac{\gamma}{2}(1-V_t g)^{1+\beta} , \qquad V_0 g = g.$$

En comparant (3) et (6) on en déduit, par l'unicité des solutions, que

(7) $$1-V_t g = U_t(1-g)$$

d'où le résultat. ■

En combinant (4) et (1), on obtient

(8) $$E[\exp(-\langle X_t^1, g\rangle)] = E[\exp(-\langle X_t, 1-e^{-g}\rangle)] ,$$

c'est à dire que $X_t^1$ a même loi qu'un processus de Cox ou processus de Poisson doublement stochastique, dirigé par $X_t$ (cf. [K] p. 16).

Grâce à cette observation, nous voyons que l'existence d'une limite en temps pour $X_t$ entraine la convergence pour t infini de $X_t^1$ vers une mesure aléatoire $X_\infty^1$. Cette dernière convergence pourrait aussi se déduire de la monotonie en temps de la fonctionnelle génératrice (4). Avec la terminologie de [LMW], $X_\infty^1$ est donc un état d'équilibre de type Poisson, d'intensité $\lambda$. On obtient, par passage à la limite dans (8):

(9) $$E[\exp(-\langle X_\infty^1, g\rangle)] = E[\exp(-\langle X_\infty, 1-e^{-g}\rangle)] ,$$

i.e. $X_\infty^1$ est un processus de Cox dirigé par $X_\infty$. En particulier,

(10) $$EX_\infty^1 = EX_\infty .$$

Le théorème 1 découle alors directement de l'égalité (10) et de la

**Proposition 1** ([GW] théorème 2.2) $EX_\infty^1 = \lambda$ si et seulement si $d > \alpha/\beta$ ; quand $d \leq \alpha/\beta$ $X_\infty^1 =$ mesure nulle p.s.

Pour prouver le théorème 2 nous devons analyser plus finement la dépendance du cumulant de $X_t^n$ en fonction de n. Soit $U_t^\gamma g$ la solution de (3); alors, comme au lemme 1,

(11) $$E[\exp(-\langle X_t^n, h\rangle)] = \exp(-\langle\lambda, n\, U_t^{n^\beta\gamma}(1-e^{-h/n})\rangle) .$$

Mais un calcul direct montre, par l'unicité des solutions, que $U_t^\gamma g$ a la propriété d'invariance suivante

(12) $$n\, U_t^{n^\beta\gamma}\varphi = U_t^\gamma(n\,\varphi) .$$

On obtient alors

(13) $\quad E[\exp(-\langle X_t^n, h\rangle)] = \exp(-\langle\lambda, U_t^\gamma\,(n(1-e^{-h/n}))\rangle)$ ,

ce qui donne, en utilisant (1), la relation fondamentale

(14) $\quad E[\exp(-\langle X_t^n, h\rangle)] = E[\exp(-\langle X_t, n(1-e^{-h/n})\rangle)]$ .

Une fois de plus on utilise la monotonie en t, à n fixé, de la fonctionnelle de Laplace de $X_t^n$ , pour en déduire l'existence d'une limite en temps, $X_\infty^n$. Faisons tendre t vers l'infini dans (14). On obtient

(15) $\quad E[\exp(-\langle X_\infty^n, h\rangle)] = E[\exp(-\langle X_\infty, n(1-e^{-h/n})\rangle)]$ .

On peut alors prouver le

**Lemme 2.** Pour toute fonction $h : \mathbf{R}^d \to [0,1)$ régulière et à support compact

(16) $\quad E[\exp(-\langle X_\infty^n, h\rangle)] \xrightarrow[n\to\infty]{} E[\exp(-\langle X_\infty, h\rangle)]$ .

**Démonstration.** Puisque les fonctions $n(1-e^{-h/n})$ sont dominées par la fonction h et tendent ponctuellement vers h, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour toute mesure ρ de Radon sur $\mathbf{R}^d$:

$$\langle \rho, n(1-e^{-h/n})\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle \rho, h\rangle .$$

Cette dernière convergence entraine (16), encore par convergence dominée.■

Ce dernier lemme conclut la démonstration du théorème 2.

## 3. Commentaires.

**3.1.** Quand α=2, i.e. le déplacement spatial lié à $(X_t)$ est un mouvement brownien, on peut utiliser les résultats purement analytiques de Gmira, Véron [GV], Escobedo et Kavian [EK] sur le comportement asymptotique de la solution de l' e.d.p. (3), dite "équation non linéaire de la chaleur", pour démontrer le théorème 1. De plus il ressort d'une communication orale avec les auteurs des articles ci-dessus que leur methode permettrait vraisemblablement de traiter également le cas $\alpha < 2$.

**3.1.a:** <u>Dimension surcritique:</u> $d > 2/\beta$

Des résultats de la section 3 de [GV] on déduit le fait suivant:

$\forall\ g\in L^1(\mathbf{R}^d)$, $g \geq 0$ et g strictement positif sur un voisinage de 0,

$$\lim_{t\to\infty} \langle\lambda, U_t g\rangle = \langle\lambda, g\rangle - \frac{\gamma}{2}\int_0^\infty\int_{\mathbf{R}^d}(U_s g)^{1+\beta}(x)\,dx\,ds > 0 .$$

Ceci entraine la convergence en loi de $X_t$ vers une limite non triviale $X_\infty$.

**3.1.b:** <u>Dimension critique:</u> $d = 2/\beta$

Toujours dans [GV], corollaire 4.1, on lit:

$$\forall\ g\in L^1(\mathbf{R}^d),\ \lim_{t\to\infty} \langle\lambda, U_t g\rangle = 0 .$$

Ce résultat provient des propriétés d'invariance du cumulant et entraine l'extinction de X en temps infini.

**3.1.c:** <u>Dimension souscritique:</u> $d < 2/\beta$

Dans [EK] théorème 1.12, on trouve le résultat suivant qui permet de comparer la vitesse de convergence vers 0 de $U_t g$, solution de (3) avec condition initiale g, avec celle de $W_t$, solution auto-similaire de (3) définie uniquement pour $t > 0$ :

**Proposition 2.** Pour toute fonction g telle que il existe $k_1, k_2 > 0$, $\forall\, x \in \mathbf{R}^d$

$$g(x) \le k_1 e^{-k_2 |x|^2}$$

on a $\lim\limits_{t \to \infty} t^{1/\beta} \sup\limits_{x \in \mathbf{R}^d} |U_t g(x) - W_t(x)| = 0$

où $W_t(x) = t^{-1/\beta} f(x/\sqrt{t})$ et f est solution de $-\Delta f - \frac{x \cdot \nabla f}{2} + \frac{\gamma}{2} f^{1+\beta} = \frac{1}{\beta} f$.

Iscoe, [I] lemme A.9, en tire la conséquence suivante:

**Proposition 3.** Pour toute fonction g satisfaisant $g(x) \le k_1 e^{-k_2 |x|^2}$, $x \in \mathbf{R}^d$; $k_1, k_2 > 0$,

$$\lim_{t \to \infty} t^{1/\beta - d/2} \langle \lambda, U_t g \rangle = \langle \lambda, f \rangle$$

où f est introduite dans la proposition 2.

Ce dernier résultat donne donc la vitesse d'extinction du processus $X_t$ quand la dimension de l'espace est souscritique.

**3.2.** Nous donnons ici un résumé d'une autre preuve du théorème 2, plus probabiliste et qui n'emploie pas les processus de Cox, basée sur les idées suivantes: les trajectoires du processus $X^n$ peuvent se représenter dans un espace d'arbres ainsi que sa mesure de Palm. La convergence des processus $X^n$ se lit alors sur les mesures de Palm. Voir [W] pour les détails.

Soit $C_K$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}^d$ dans $[0,\infty)$, à support compact. Pour toute mesure aléatoire $\xi$ infiniment divisible d'intensité la mesure de Radon $\rho$, et toute fonction $f \in C_K$ telle que $\langle \rho, f \rangle > 0$, soit $\tilde{\xi}_f$ la " mesure canonique de Palm randomisée par f " (voir la définition dans [K], section 10.3). On a le résultat fondamental suivant:

**Lemme 3** ([K], théorème 10.4 et lemme 10.8)

Soit $\xi, \xi_1, \xi_2 \ldots$ des mesures aléatoires infiniment divisibles ayant pour intensité des mesures de Radon. Alors deux des assertions suivantes entrainent la troisième:

1) $\xi_k \to \xi$ en loi
2) $E\langle \xi_k, f \rangle \to E\langle \xi, f \rangle$ pour tout $f \in C_K$
3) $(\tilde{\xi}_k)_f \to \tilde{\xi}_f$ en loi pour toute $f \in C_K$ telle que $E\langle \xi, f \rangle > 0$.

Pour démontrer le théorème 2, il suffit de se restreindre au cas $d > \alpha/\beta$ puisque le cas $d \le \alpha/\beta$ découle du théorème 1 et de la proposition 1. Ces résultats entrainent aussi que, dans le cas $d > \alpha/\beta$, les intensités des mesures $X^n_\infty$ non seulement convergent mais sont invariantes: $E\, X^n_\infty = E\, X_\infty = \lambda$. Donc, grâce au lemme 3, le théorème 2 sera une conséquence de:

(17) $\quad (\widetilde{X^n_\infty})_f$ converge en loi, quand $n \to \infty$, vers $(\widetilde{X_\infty})_f$ ,

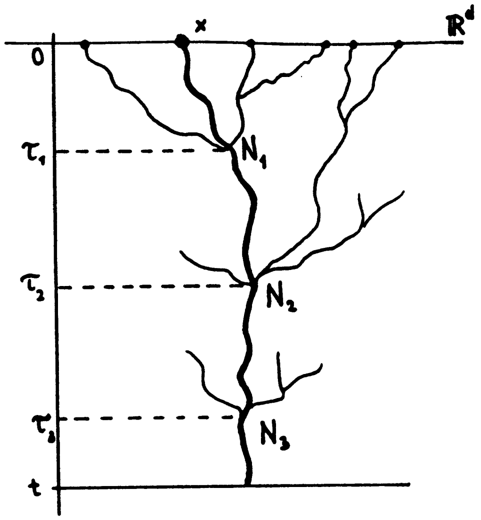
pour tout $f \in C_K$ telle que $\langle \lambda, f \rangle > 0$.

Soit donc f fixée telle que $\langle\lambda,f\rangle > 0$, et notons pour simplifier, $Y_t$ au lieu de $(\widetilde{X_t})_f$ et $Y_t^n$ au lieu de $(\widetilde{X_t^n})_f$ ($0\le t\le\infty$, n = 1,2,...) . On a le diagramme suivant, conséquence des résultats de [MRC] et [GW], et du lemme 3:

$$\begin{array}{ccc} Y_t^n & \xrightarrow[t\to\infty]{} & Y_\infty^n \\ {\scriptstyle n\to\infty}\downarrow & & \\ Y_t & \xrightarrow[t\to\infty]{} & Y_\infty \end{array} \tag{18}$$

dans lequel reste à démontrer la dernière convergence.
On a la représentation explicite suivante de $Y_t^n$ en termes d'arbre généalogique, donnée dans [GW], théorème 2.3 :

Tronc: trajectoire d'un processus symétrique stable ($\alpha$) partant d'un point x randomisée par $f(x)\,\lambda(dx)/\langle\lambda,f\rangle$.
$\tau_1, \tau_2, \tau_3$ ... : points d'un processus de Poisson ($n^\beta\gamma$).
$N_i$ : nombre aléatoire de particules (additionnelles) produites au temps $\tau_i$ , de fonction génératrice $E(s^N) = 1 - \frac{(1+\beta)}{2}(1-s)^\beta$.
$Y_t^n$ est distribué comme la population de particules au temps 0, chaque particule ayant pour masse 1/n.




En utilisant cette représentation de $Y_t^n$ on peut montrer que $Y_t^n$ croit vers $Y_\infty^n$ quand t tend vers l'infini, et ce <u>uniformément</u> en n:

$$\forall \text{ B borné} \subseteq \mathbb{R}^d \quad \forall\, \varepsilon>0 \quad \exists\, t>0 \quad \forall\, n = 1,2,\dots : \ P[Y_\infty^n(B) - Y_t^n(B) \ge \varepsilon] \le \varepsilon.$$

Cette estimation, démontrée dans le lemme 5 de [W], entraine alors immédiatement la commutativité du diagramme (18).

*Nous remercions Don Dawson pour nous avoir souligné l'importance de l'interprétation des formules (8) et (9) en termes de processus de Cox.*

## Références.

[Da] D. Dawson, The critical measure diffusion process, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **40**, 125-145, 1977.

[DFFP] D. Dawson, K. Fleischmann, R. Foley et L. Peletier, A critical measure-valued branching process with infinite mean. Stoch. Anal. Appl. **4**, n° 2, 117-129, 1986.

[DI] D. Dawson et G. Ivanoff, Branching diffusions and random measures. Dans: Branching Processes, ed. A. Joffe, P. Ney, Advances in Probab. 5, pp. 61-103, Marcel Dekker, New York, 1978.

[Dy] E. B. Dynkin, Three classes of infinite dimensional diffusions. J. Funct. Analysis **86**, 75-110, 1989.

[EK] M. Escobedo et O. Kavian, Asymptotic behavior of positive solutions of a nonlinear heat equation, Houston J. Math. **13**, n° 4, 39-50, 1987.

[GV] A. Gmira et L. Veron, Large time behaviour of the solution of a semilinear parabolic equation in $\mathbf{R}^N$. J. Diff. Equations **53**, 259-276, 1984.

[GW] L. G. Gorostiza et A. Wakolbinger, Persistence criteria for a class of critical branching particle systems in continuous time. Reporte interno Nr. 22 del CIEA, Mexico DF 1988, à paraître dans Ann. Probability.

[I] I. Iscoe, On the supports of measure-valued critical branching Brownian motion, Ann. Probability **16**, n° 1, 200-221, 1988.

[K] O. Kallenberg, Random Measures, 3me ed., Akademie Verlag, Berlin, et Academic Press, New York, 1983.

[LMW] A. Liemant, K. Matthes et A. Wakolbinger, Equilibrium Distributions of Branching Processes, Akademie Verlag, Berlin, et Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.

[MRC] S. Méléard et S. Roelly-Coppoletta, Discontinuous measure-valued branching processes and generalized stochastic equations, Prépublication n° 9 du Laboratoire de Probabilités de l'Université Paris 6, 1989, à pataître dans Math. Nachr.

[W] A. Wakolbinger, Interchange of large time and scaling limits in stable Dawson-Watanabe processes: a probabilistic proof, Bericht Nr. 390 des Instituts für Mathematik der Universität Linz, 1989, à paraître dans Bol. Soc. Mat. Mexicana.

*Ce travail a été en partie réalisé grâce au CONACyt (Mexique), CNRS (France) et BMfWuF (Autriche)*

L.G. Gorostiza, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados,
Departamento de Matemáticas, Ap. Postal 14-740, 07000 Mexico
Mexique

S. Roelly-Coppoletta, Laboratoire de Probabilités-Université Paris VI,
4, Place Jussieu-Tour 56-3eme Etage - 75252 Paris Cedex 05 France

A. Wakolbinger, Johannes Kepler Universität, Institut für Mathematik,
A-4040 Linz Autriche