LAURENT SCHWARTZ

Les semi-martingales formelles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 413-489

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__413_0>

LES SEMI-MARTINGALES FORMELLES

par Laurent SCHWARTZ

INTRODUCTION

Ce n'est que récemment que les semi-martingales ont été systématiquement considérées comme définissant (ou définies par) des mesures sur la tribu prévisible, à valeurs dans l'espace L^0 des fonctions mesurables (espace non localement convexe !). On trouve sans doute cette idée pour la première fois dans J. Pellaumail [1], en 1973, puis dans de nombreux travaux de Métivier et Pellaumail, par ex. Métivier-Pellaumail [1], et Küssmaul [1]. Un théorème de Dellacherie de 1977, voir P.A. Meyer [2], achève de caractériser les semi-martingales comme mesures. Cependant, beaucoup d'articles ont redémontré des théorèmes sur ces semi-martingales-mesures, comme s'il n'existait pas de théorie générale antérieure des mesures à valeurs vectorielles. Il y a là une rencontre bien intéressante. Il existe une quantité de publications sur les mesures à valeurs banachiques, les premières sans doute dues à Bartle-Dunford-Schwartz, voir Dunford-Schwartz [1] ; on trouve d'importants résultats dans Erik Thomas [1], puis dans Erik Thomas [2] pour les mesures à valeurs dans un espace vectoriel topologique non localement convexe (comme l'est l'espace L^0 !). Mais ces mesures vectorielles pouvaient souvent apparaître comme un peu gratuites, dans la mesure où il n'existait pas tellement d'exemples non fabriqués ad hoc. Il y avait bien la mesure spectrale (décomposition spectrale d'un opérateur self-adjoint, borné ou non), à valeurs dans l'espace $\mathcal{L}(H;H)$ des opérateurs d'un Hilbert H, c'est bien une vraie mesure à valeurs dans un espace de Banach, et qui a donné lieu à de nombreux travaux ; mais $\mathcal{L}(H;H)$ a une structure d'ordre (les opérateurs hermitiens ≥ 0), et c'est une mesure ≥ 0, donc pas encore générale. Et voilà que l'intégrale stochastique par rapport à une semi-martingale est "découverte", après plusieurs décennies d'utilisation, comme une "vraie" mesure, complètement originale, à valeurs dans L^0, avec tous les traits difficiles que donnent la non locale convexité de L^0 d'une part, la non positivité due à la martingale d'autre part. Et quand cette intégrale stochastique apparaît, elle met un temps très long à être reconnue et traitée comme mesure ; la rencontre de la théorie générale de l'intégration vectorielle et de la théorie de l'intégrale stochastique reste difficile. (J'ai l'air de faire là une critique, mais alors je n'y échappe pas moi-même ! c'est plutôt la constatation, une fois de plus, d'un fait très général.) C'est sans doute K. Bichteler [1] le premier qui ait fait un exposé systématique de la théorie des semi-martingales <u>à partir</u> de la notion de mesure vectorielle.

La rencontre difficile n'est sans doute pas encore terminée. Le but du présent article y ajoute un aspect supplémentaire. Les mesures ≥ 0 sur un ensemble muni d'une tribu, à valeurs <u>finies ou non</u>, ont été traitées dès le début de la théorie de l'intégration ; la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ n'est pas finie ! La théorie des mesures de Radon sur un espace localement compact, donne des mesures non finies, non partout définies, à valeurs ou banachiques ou vectorielles topologiques ; l'espace est réunion, disons dénombrable en prenant des mesures σ-finies pour simplifier, de compacts, sur chacun desquels la mesure est partout définie et bornée. Mais la théorie des mesures abstraites, même à valeurs réelles, non partout définies, ne semble jamais avoir été <u>écrite</u> ; sans exemple probant, elle ne paraissait pas en valoir la peine ; ces mesures n'ont d'ailleurs pas de propriétés extraordinaires, tout est contenu dans les mesures partout définies. Par exemple, si f est une fonction réelle borélienne quelconque sur $\mathbb{R}$, $f(s)\,ds$ est une telle mesure ; $\Omega = \mathbb{R}$ est une réunion dénombrable $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$, $\Omega_k = [-k,+k] \cap \{|f| \leq k\}$, et la mesure est partout définie, et bornée, sur chaque Ω_k . Une telle mesure n'a pas de primitive, pas de fonction de répartition F, $F(t) = \int_0^t f(s)ds$, parce que peut-être aucun intervalle de $\mathbb{R}$ n'est intégrable pour cette mesure. J'appellerai <u>mesures formelles</u> de telles mesures. Si f est borélienne et si μ est une mesure formelle, $\mu(f)$ n'a pas toujours un sens, parce que f n'est pas forcément

μ-intégrable, mais le produit $f\mu$ a toujours un sens, comme mesure formelle ; et d'ailleurs toute mesure formelle est un produit $f\mu$ d'une vraie mesure μ, bornée, par une fonction f non nécessairement μ-intégrable. Puisque maintenant une semi-martingale X définit une mesure dX sur la tribu prévisible, par l'intégrale stochastique, $f \mapsto \int_{]0,+\infty]} f_s \, dX_s$, on va aussi pouvoir parler de semi-martingales formelles. Mais elles ne définiront pas de processus, car X est la primitive ou fonction de répartition de dX, $X_t = \int_0^t dX_s$, et que l'ensemble prévisible $]0,t] \times \Omega$ n'est peut-être dX-intégrable pour aucune valeur de t. L'intégrale $f \cdot X$ est un produit, $d(f \cdot X) = f\,dX$; si X est une semi-martingale formelle, et f une fonction prévisible, $\int_{]0,t]} f_s \, dX_s$ n'aura pas de sens si f n'est pas dX-intégrable, mais $f \cdot X$ aura toujours un sens comme semi-martingale formelle ; et d'ailleurs toute semi-martingale formelle est une intégrale stochastique $f \cdot X$, où X est une vraie semi-martingale, et f une fonction prévisible non nécessairement dX-intégrable.

La possibilité d'écrire $f \cdot X$, sans s'astreindre à vérifier si f est dX-intégrable, grâce aux semi-martingales formelles, apporte une incontestable "libération" dans la démonstration de nombreuses propriétés. Par exemple, si $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ est un système de m semi-martingales réelles, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ un système de m fonctions prévisibles, on sait qu'on peut définir $\sum_{k=1}^{m} f_k \cdot X_k$ comme vrai semi-martingale, $f \cdot X$, dans des cas où même aucune des f_k n'est dX_k-intégrable. Cette difficulté disparaît ici : $f_k \cdot X_k$ existe toujours comme semi-martingale formelle, et la somme $\sum_{k=1}^{m} f_k \cdot X_k$ est une semi-martingale formelle, qui peut très bien en être une vraie ! Bien des faits étranges trouvés ces dernières années pour les semi-martingales, deviennent plus clairs avec des semi-martingales formelles. Beaucoup de résultats donnés ici sont déjà bien connus, ou sont des compléments nouveaux à des résultats connus, nécessaires à une certaine cohésion de l'ensemble. J'utilise systématiquement les notations de "Strasbourg" ; je réfèrerai à P.A. Meyer [1] comme à M[1], et à L. Schwartz [1], comme à S[1]. Chaque § contient, au début, un résumé de son contenu

***

§ 1. RAPPELS SUR LES MESURES A VALEURS VECTORIELLES[1]

Résumé du § 1. (1.1), page 5, donne la définition d'une mesure sur un ensemble Ω, muni d'une tribu $\mathcal{O}$, à valeurs dans un espace vectoriel topologique E sur $\mathbb{R}$ (non nécessairement localement convexe) métrisable complet. (1.1 bis) définit les jauges $|\ |_\alpha$, qui remplacent la norme absente (propriétés (1.2), page 6). La théorie de l'intégration utilise les intégrales supérieures (1.5), (1.6), pp. 7-8. On définit alors les ensembles négligeables, les fonctions mesurables et intégrables, l'espace L^1, (1.8 bis), page 8 . Viennent ensuite deux énoncés plus délicats : l'intégrabilité à partir de la mesurabilité et des intégrales supérieures (1.8 ter), page 9 ; et le théorème de convergence dominée de Lebesgue. Ici s'introduit naturellement la notion des C-espaces E, pour lesquels ces deux théorèmes deviennent plus faciles ; les espaces L^p, $0 \leq p < +\infty$, sont des C-espaces. (1.8 quarto), page 11, définit l'espace vectoriel topologique des mesures, Mes(Ω,$\mathcal{O}$;E), et (1.9), page 12, la multiplication $h\mu$ d'une mesure μ par une fonction borélienne h.

Aucun des résultats de ce paragraphe n'est vraiment nouveau. Mais ils seront indispensables dans la suite ; en outre, l'intégration par rapport à une mesure vectorielle, et la notion de C-espaces, ne sont pas, en fait, si bien connus, et valent la peine d'être rappelées.

(1.0) On définit habituellement une mesure à valeurs dans un Banach comme une fonction dénombrablement additive d'ensembles ; elle est alors automatiquement bornée. Mais, pour une mesure à valeurs dans un espace vectoriel topologique séparé non localement convexe, il faut des hypothèses supplémentaires pour avoir des théorèmes intéressants : par exemple, l'ensemble des valeurs de la mesure n'est plus automatiquement borné, et, même s'il l'est, on a besoin que son enveloppe convexe soit bornée. Comme on en déduit un théorème de convergence dominée de Lebesgue, pourquoi ne pas tout simplifier en partant d'une définition fonctionnelle de la mesure, où les fonctions bornées remplaceront les sous-ensembles, la boule unité de l'ensemble des fonctions bornées étant alors convexe et ayant donc automatiquement une image convexe ? L'additivité dénombrable sera alors remplacée par la continuité pour la convergence simple bornée, qui est un morceau du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Nous nous bornerons aux espaces vectoriels topologiques métrisables complets, suffisants pour ce qui nous intéresse.

Définition (1.1) : Soient Ω un ensemble, $\mathcal{O}$ une tribu sur Ω ; $\mathcal{O}$ désignera indifféremment l'ensemble des parties de Ω éléments de $\mathcal{O}$ ou l'ensemble des fonctions réelles $\mathcal{O}$-mesurables (qu'on appellera aussi les fonctions boréliennes) ; $B\mathcal{O}$ sera l'espace vectoriel des fonctions bornées $\mathcal{O}$-mesurables, muni de la norme $\|\varphi\|_\infty = \operatorname{Sup} |\varphi|$: c'est un Banach. Soit E un espace vectoriel topologique métrisable complet (non nécessairement localement convexe). On appellera mesure sur $(\Omega,\mathcal{O})$ à valeurs dans E une application μ de $B\mathcal{O}$ dans E, linéaire, continue pour la convergence simple bornée des suites : si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $B\mathcal{O}$, $\|\varphi_n\|_\infty \leq 1$, convergeant simplement vers 0, $\mu(\varphi_n)$ converge vers 0 dans E. A fortiori μ est continue de $B\mathcal{O}$ (muni de la topologie de la norme) dans E.

L'espace $\mathcal{L}(B\mathcal{O};E)$ des applications linéaires continues de B dans E est classiquement muni de la topologie $\mathcal{L}_b(B\mathcal{O};E)$ de la convergence uniforme sur la boule unité de B, qui le rend métrisable complet. L'espace $\operatorname{Mes}(\Omega,\mathcal{O};E)$ en est évidemment un sous-espace vectoriel fermé, donc il est lui aussi métrisable complet. La topologie de Mes, induite par $\mathcal{L}_b(B\mathcal{O};E)$, donnera exactement la topologie d'Emery [1] pour les semi-martingales.

(1.1 bis) Pour compléter la mesure, on peut utiliser les distances, mais il est plus commode sans doute d'utiliser les jauges (la fonction distance peut, par exemple, être bornée, alors qu'une jauge est positivement homogène, donc non bornée) (2). On appelle jauge sur E une fonction $|\ |$, à valeurs finies ≥ 0 , homogène $(|Re| = |R|\,|e|,\ R\in\mathbb{R})$, semi-continue inférieurement, continue à l'origine ; alors l'ensemble $V_{|\ |} = \{e\in E\,;\ |e| \leq 1\}$ est un voisinage de 0 équilibré fermé, appelé la boule unité de la jauge ; $RV_{|\ |}$, $0<R<+\infty$, est la boule de rayon R de la jauge ; équilibré veut dire qu'il ne peut contenir $e\in E$ sans contenir Re, pour $|R|\le 1$. Inversement, si V est un voisinage de 0 équilibré fermé, la fonction $e\mapsto \mathrm{Min}\,\{R\in \mathbb{R}_+ ;\ e\in RV\}$ est une jauge $|\ |_V$, et l'ensemble $\{e\in E ;\ |e|_V\le 1\}$ est V ; on dit que $|\ |_V$ est la jauge de V. Une semi-norme continue n'est autre qu'une jauge convexe, ou sous-additive, ou à boules convexes. On a $|\ |_{V_{|\ |}} = |\ |$, $V_{|\ |_V} = V$. Il existe alors un système fondamental de voisinages de 0 qui sont les boules de rayons >0 d'une famille de jauges $(|\ |_\alpha)_{\alpha>0}$, ayant les propriétés suivantes :

$$(1.2)\quad \begin{cases} 1) & \text{pour } e,f\in E,\ \alpha,\ \beta \text{ réels } >0,\ |e+f|_{\alpha+\beta}\le |e|_\alpha+|f|_\beta\ ;\\ 2) & \text{pour tout } e\in E,\ \alpha\mapsto |e|_\alpha \text{ est décroissante et continue à droite.}\end{cases}$$

Il suffit en effet d'appeler d la distance à l'origine pour une métrique définissant la topologie, invariante par translation et telle que $d(Re)\le d(e)$ pour $|R|\le 1$, et d'appeler $|\ |_\alpha$ la jauge de la d-boule de rayon α, $|e|_\alpha = \mathrm{Min}\,\{R\ge 0 ;\ d(e/R)\le\alpha\}$. L'inégalité 1) est évidente ; si $|e|_\alpha = a$, $|f|_\beta = b$, et $c=a\vee b$, $d(e/a)\le\alpha$, $d(f/b)\le\beta$, donc $d((e+f)/c)\le\alpha+\beta$, d'où le résultat et même $|e+f|_{\alpha+\beta}\le |e|_\alpha\vee|f|_\beta$. La propriété 2) aussi est évidente ; car, si $e\neq 0$, $|e|_\alpha = R>0$, et, si $R'<R$, il existe $\eta>0$ tel que $d(\frac{e}{R'})>\alpha+\eta$, sans quoi on aurait $d(\frac{e}{R'})\le\alpha$ contrairement à la définition de R ; alors $|e|_{\alpha+\eta}>R'$, ce qui est la continuité à droite de 2). Si E est normé, on peut prendre $|\ |_\alpha = |\ |_E$ pour tout α ; c'est ce que nous appellerons le cas normé. Inversement, si $(|\ |_\alpha)_{\alpha>0}$ est une famille de fonctions réelles ≥ 0 sur un espace vectoriel E, homogènes , vérifiant (1.2), et si, pour tout $e\neq 0$, il existe $\alpha>0$ tel que $|e|_\alpha\neq 0$, les boules $\{e\in E ;\ |e|_\alpha\le R\}$, indexées par R et $\alpha>0$, sont un système fondamental de voisinages de 0 équilibrés fermés d'une d'une topologie métrisable compatible avec la structure vectorielle, et les $|\ |_\alpha$ sont les jauges des boules unités. [Les deux seuls choses à montrer sont sont d'une part le fait que, si $V=\{e\in E ;\ |e|_\alpha\le R\}$, il existe $W=\{e\in E ;\ |e|_\beta\le S\}$ tel que $W+W\subset V$: il suffit de prendre $\beta=\frac{\alpha}{2}$, $S=\frac{R}{2}$; et d'autre part le fait que V soit fermée pour cette topologie, ou chaque $|\ |_\alpha$ semi-continue inférieurement : si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e pour cette topologie et $|e_n|_\alpha \leq 1$ pour tout n, alors, pour $\varepsilon > 0$ donné, on chosit $\eta > 0$ tel que $|e|_\alpha \leq |e|_{\alpha+\eta} + \frac{\varepsilon}{2}$, puis n tel que $|e - e_n|_\eta \leq \frac{\varepsilon}{2}$, alors $|e|_\alpha \leq |e|_{\alpha+\eta} + \frac{\varepsilon}{2} \leq |e_n|_\alpha + |e - e_n|_\eta + \frac{\varepsilon}{2} \leq 1 + \varepsilon$; donc $|e|_\alpha \leq 1$ aussi, d'où la semi-continuité inférieure.]

Si Ω est un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{O}$ et d'une probabilité λ sur $(\Omega,\mathcal{O})$, on appelle $L^0(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$ l'espace des λ-classes de fonctions réelles λ-mesurables, et on le munit de la topologie métrisable complète de la convergence en probabilité ; on peut prendre pour jauges ayant les propriétés ci-dessus les

(1.3) $$J_{\alpha,\lambda}(f) = \operatorname{Min}\,\{R \geq 0\ ;\ \lambda\{|f| > R\} \leq \alpha\}\ ;$$

$J_{\alpha,\lambda}$ est nulle pour $\alpha \geq 1$. Alors $J_{\alpha,\lambda}(f) \leq R \Leftrightarrow |f| \leq R$ sauf sur un ensemble de λ-probabilité $\leq \alpha$. Cet espace ne dépend pas de λ, toute mesure λ' équivalente à λ donne le même espace L^0 (mais avec des jauges J_α différentes) ; on peut donc parler de $L^0(\Omega,\mathcal{O};\Lambda)$, où Λ est une classe d'équivalence de mesures sur $(\Omega,\mathcal{O})$; le choix d'une $\lambda \in \Lambda$ détermine des jauges $J_{\alpha,\lambda}$.
Bien entendu, (1.2) 1) s'étend à une série convergente $\sum_{n\in\mathbb{N}} e_n$:

(1.4) $$\Big|\sum_{n\in\mathbb{N}} e_n\Big|_{\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |e_n|_{\alpha_n}\ .$$

Si E est muni des jauges $|\ |_\alpha$, $\mathcal{L}_b(B\mathcal{O};E)$ donc $\mathrm{Mes}(\Omega,\mathcal{O};E)$ est muni des jauges

(1.4 bis) $$\|\mu\|_\alpha = \sup_{\substack{\varphi\in B\mathcal{O}\\ \|\varphi\|_\infty\leq 1}} |\mu(\varphi)|_\alpha\ ,$$

vérifiant (1.2).

La théorie de l'intégration se fait alors comme suit. Pour toute f borélienne ≥ 0, à valeurs finies ou non, on pose

(1.5) $$\mu^*_\alpha(f) = \sup_{\substack{\varphi\in B\mathcal{O}\\ |\varphi|\leq f}} |\mu(\varphi)|_\alpha$$

et, pour $f \geq 0$ quelconque, à valeurs finies ou non,

(1.6) $$\mu_\alpha^*(f) = \operatorname*{Inf}_{\substack{g \in \mathcal{O} \\ +\infty \geq g \geq f}} \mu_\alpha^*(g) \quad .$$

Ces semi-variations μ_α^* ont les propriétés suivantes :

μ_α^* est ≥ 0, croissante ($f \leq g$ entraîne $\mu_\alpha^*(f) \leq \mu_\alpha^*(g)$) ; on a la sous-additivité dénombrable : si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions ≥ 0, finies ou non,

(1.7) $$\mu^*_{\sum\limits_n \alpha_n} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*_{\alpha_n}(f_n) \quad ;$$

si f est borélienne ≥ 0, $\alpha \mapsto \mu_\alpha^*(f)$ est décroissante et continue à droite ; si f n'est pas borélienne, elle est encore décroissante, mais je ne sais pas si elle est continue à droite ;

si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions boréliennes ≥ 0, finies ou non,

(1.8) $$\lim_{n \to +\infty} \mu_\alpha^*(f_n) = \mu_\alpha^*(\lim_{n \to \infty} f_n) \quad ;$$

on ne sait pas si ce résultat subsiste pour des f_n non boréliennes (même pour le cas normé).

On notera que $\|\mu\|_\alpha$ (1.4 bis) $= \mu_\alpha^*(1)$. On appelle négligeable un ensemble $A \subset \Omega$ tel que $\mu_\alpha^*(A) = 0$ pour tout α. Il est alors contenu dans un borélien négligeable. Si $(f)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions ≥ 0 telles que $\mu_\alpha^*(f_n)$ tende vers 0, il existe une suite partielle qui converge μ-pp. vers 0.

(1.8 bis) Une fonction f réelle est μ-intégrable si, pour tout $\alpha > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe φ borélienne bornée telle que $\mu_\alpha^*(|f - \varphi|) \leq \varepsilon$; ou encore s'il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions boréliennes bornées telle que $\mu_\alpha^*(|f - \varphi_n|)$ tende vers 0 pour tout α. On en déduit aussitôt l'intégrale $\mu(f) \in E$ pour f réelle μ-intégrable ; si f est μ-intégrable, $|f|$ aussi. L'ensemble $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{O}, \mu)$ des fonctions réelles μ-intégrables est un espace vectoriel, dont on prend le quotient habituel $(\Omega,\mathcal{O},\mu)$. On munit $L^1(\Omega,\mathcal{O},\mu)$ de la topologie vectorielle où un système fondamental de voisinages de 0 est formé des boules de rayon > 0 des jauges $f\mapsto\mu^*_\alpha(|f|)$; il est métrisable complet (Fischer-Riesz). L'intégrale est une application linéaire continue de $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{O},\mu)$ dans E, avec $|\mu(f)|_\alpha \leq \mu^*_\alpha(|f|)$.

Un ensemble $A\subset\Omega$ est μ-mesurable s'il est compris entre deux ensembles boréliens dont la différence est μ-négligeable. Les parties μ-mesurables forment une tribu $\hat{\mathcal{O}}_\mu$, engendrée par $\mathcal{O}$ et les parties μ-négligeables. Une fonction réelle est μ-mesurable ssi elle est $\hat{\mathcal{O}}_\mu$-mesurable ; donc ssi elle est μ-pp. égale à une fonction borélienne, ou ssi elle est comprise entre deux fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, μ-pp. égales ; (1.8) est aussi vrai pour des f_n mesurables, et alors $\lim_{n\to\infty} f_n$ est mesurable (et on a d'ailleurs le théorème d'Egoroff sur la mesurabilité de la limite simple d'une suite de fonctions mesurables).

(1.8 ter) Il y a ensuite deux théorèmes qui sont plus délicats que pour des mesures à valeurs réelles ; Erik Thomas a beaucoup insisté sur la délicatesse de l'énoncé, qui se rencontre déjà dans les cas normés les plus simples. Si f réelle est μ-intégrable, elle est μ-mesurable, et $\mu^*_\alpha(|f|)<+\infty$ pour tout α ; mais ces conditions ne sont pas suffisantes pour que f soit intégrable. Par exemple une fonction $f\geq 0$ borélienne telle que $\mu^*_\alpha(f)<+\infty$ pour tout α n'est pas forcément μ-intégrable. Un contre-exemple simple est le suivant : $E=c_0$, espace des suites tendant vers 0, $\Omega=\mathbb{N}$, $\mathcal{O}=\mathcal{P}\mathbb{N}$; soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite > 0 tendant vers 0 ; on considère la mesure à valeurs dans c_0 : $\mu=\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k e_k \delta_{(k)}$, où e_k est le n-ième vecteur de base de c_0, c-à-d. $e_k=(0,0,\dots,0,1,0,0,0,\dots)$, où 1 occupe la place k. Si φ est une fonction bornée sur $\mathbb{N}$, $\mu(\varphi)=\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k e_k \varphi(k)=(a_k\varphi(k))_{k\in\mathbb{N}}\in c_0$. On vérifie aussitôt que, pour toute $f\geq 0$, finie ou non, nécessairement borélienne, $\mu^*(f)=\operatorname{Sup}_{k\in\mathbb{N}} a_k f(k)$. Si alors f est la fonction $f(k)=\frac{1}{a_k}$, $\mu^*(f)=1$. Cependant f n'est pas intégrable ; si en effet f_n est définie par $f_n(k)=\frac{1}{a_k}$ pour $k\leq n$, $=0$ pour $k>n$, f_n converge partout vers f pour $n\to+\infty$, le théorème de convergence dominée de Lebesgue donnerait, si f était intégrable, $\mu(f) = \lim_{n\to+\infty} \mu(f_n)$; or $\mu(f_n) = \sum_{k\leq n} e_k$, est la suite $(1,1,\ldots,1,0,0,\ldots,0,\ldots) \in c_o$, qui n'a pas de limite dans c_o pour $n \to +\infty$.

Par contre, ce qui est toujours vrai, c'est qu'une fonction f réelle mesurable, majorée en module par une fonction $g \geq 0$ intégrable, est intégrable (3). De même on a le théorème de convergence dominée de Lebesgue suivant : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions réelles, admettant une majoration $|f_n| \leq g$, $g \geq 0$ intégrable, alors f est intégrable, et les f_n convergent vers f dans $\mathcal{L}^1(\mu)$, donc $\mu(f_n)$ converge vers $\mu(f)$ dans E. Par contre la condition "g intégrable" ne peut pas en général être remplacée par la condition plus faible "$\mu_\alpha^*(g) < +\infty$ pour tout α". C'est encore la même mesure μ que ci-dessus, avec $E = c_o$ qui donne un contre-exemple. Si f_n est la fonction sur $\mathbb{N}$, $f_n(k) = 1/a_k$ pour $k \leq n$, 0 pour $k > n$, elles sont intégrables, et convergent en croissant vers la fonction f ci-dessus, avec $\mu^*(f) = 1$, et leur limite f n'est pas intégrable. Du théorème de convergence dominée de Lebesgue on déduit un nouveau critère d'intégrabilité, qui est commode, quoiqu'il puisse difficilement être pris comme définition puisqu'il ne permet pas de voir immédiatement que la somme de deux fonctions intégrables est intégrable : f est intégrable ssi elle est μ-mesurable (c-à-d. μ-pp. égale à une fonction borélienne) et si $\mu_\alpha^*(|f|\, 1_{|f|>n})$ tend vers 0 pour $n \to +\infty$, pour tout α [c'est nécessaire, puisque $f\, 1_{|f|>n}$ tend vers 0 en restant majorée par $|f|$, et suffisant parce qu'alors $\mu_\alpha^*(|f - f\, 1_{|f|\leq n}|)$ tend vers 0 pour tout α], et alors $\mu(f)$ est la limite de $\mu(f\, 1_{|f|\leq n})$.

La situation se simplifie si on introduit les espaces appelés par Erik Thomas faiblement Σ-complets dans le cas normé, et C-espaces dans le cas général. On peut en donner un grand nombre de définitions équivalentes, nous ne le ferons pas ici. E est un C-espace si toute application linéaire continue de c_o dans E est compacte (4). Si E est normé, il est un C-espace si et seulement s'il ne contient aucun sous-espace isomorphe à c_o. Dans le cas général, comme c_o n'est pas un C-espace, il y a là toujours une condition nécessaire, mais peut-être pas suffisante, le problème reste ouvert. Alors, si E est un C-espace, une fonction f réelle mesurable, telle que $\mu_\alpha^*(|f|) < +\infty$ pour tout α (pour f borélienne, cela veut simplement dire que l'ensemble des $\mu(\varphi)$, pour $\varphi \in \mathcal{BO}$,

$|\varphi| \leq |f|$, est borné dans E), est intégrable ; et si des f_n intégrables convergent μ-pp. vers f, et sont majorées en module par $g \geq 0$ telle que $\mu^*_\alpha(g) < +\infty$ pour tout α, f est intégrable, et les f_n convergent vers f dans $\mathcal{L}^1$ (5). Inversement, si l'une de ces deux propriétés est vraie pour toute mesure à valeurs dans E sur tout $(\Omega,\mathcal{O})$, E est un C-espace. On voit pourquoi les contre-exemples précédents sont choisis avec $E = c_o$. On notera que tous les $L^p(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$, $0 \leq p < +\infty$, sont des C-espaces, en particulier L^o est un C-espace (6). Mais évidemment L^∞ ne l'est pas si sa dimension est infinie, puisqu'il contient c_o.

(1.8 quarto) Soient μ, ν, deux mesures, alors $\mu+\nu$ est une mesure. Si $A \subset \Omega$ est μ-négligeable et ν-négligeable, il est $(\mu+\nu)$-négligeable ; s'il est μ-mesurable et ν-mesurable, il est $(\mu+\nu)$-mesurable ; $(\mu+\nu)^*_{\alpha+\beta}(f) \leq \mu^*_\alpha(f) + \nu^*_\beta(f)$ pour $f \geq 0$; si f est μ-intégrable et ν-intégrable, elle est $(\mu+\nu)$-intégrable, et $(\mu+\nu)(f) = \mu(f) + \nu(f)$ (parce que $(\mu+\nu)^*_\alpha(|f|\ 1_{|f|>n}) \leq \mu^*_{\alpha/2}(|f|\ 1_{|f|>n}) + \nu^*_{\alpha/2}(|f|\ 1_{|f|>n})$ tend vers 0 pour $n \to +\infty$).

(1.8 quinto) Deux familles de jauges sur E, vérifiant les conditions (1.2), sont équivalentes dans un sens évident. Changer de famille, c'est aussi changer de jauges $\|\ \|_\alpha$ sur $\mathrm{Mes}(\Omega,\mathcal{O};E)$ et sur chaque $L^1(\Omega,\mathcal{O},\mu)$, mais cela ne change ni ces espaces ni leurs topologie. Il est utile d'en avoir des définitions indépendantes des $|\ |_\alpha$. Pour $\mathrm{Mes}(\Omega,\mathcal{O};E)$, nous l'avons vu, c'est la topologie induite par $\mathcal{L}_b(B\mathcal{O};E)$. Une partie A de Ω est μ-négligeable ssi elle est contenue dans un borélien μ-négligeable, et un borélien est μ-négligeable ssi toutes ses parties boréliennes ont la mesure 0. La tribu mesurable est engendrée par $\mathcal{O}$ et les parties μ-négligeables. Pour l'intégrabilité, on pourra dire ceci. Une fonction f réelle est μ-intégrable, si et seulement s'il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions boréliennes bornées, convergeant μ-pp. vers f, telle que $\mu((\varphi_m - \varphi_n)\psi)$ converge vers 0 dans E pour $n \to +\infty$, uniformément pour $\psi \in B\mathcal{O}$, $\|\psi\|_\infty \leq 1$ (et ce sera alors vrai pour toute suite de φ_n μ-mesurables tendant vers f μ-pp., et vérifiant $|\varphi_n| \leq |f|$, par exemple pour $\varphi_n = f\ 1_{|f|\leq n}$) ; $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en effet une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^1$ complet, et sa limite ne peut être que f puisque φ_n converge μ-pp. vers f. C'est là une définition de L^1 ne faisant intervenir que E mais pas les jauges $|\ |_\alpha$. Et la topologie de $\mathcal{L}^1$ sera définie de la même manière : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathcal{L}^1$ si et seulement si $\mu(f_n\ \psi)$ converge vers 0 dans E, uniformément pour $\psi \in B\mathcal{O}$, $\|\psi\|_\infty \leq 1$.

(1.9) On comprendra mieux comme suit. Si h est une fonction réelle μ-intégrable, elle définit une nouvelle mesure sur $(\Omega,\mathcal{O})$ à valeurs dans E, la mesure produit $h\mu$, par $(h\mu)(\varphi) = \mu(h\varphi)$. On montre les égalités :

(1.9) $$(h\mu)^*_\alpha(f) = \mu^*_\alpha(|h|f) \quad \text{pour } f \geq 0, \text{ finie ou non } ;$$

(1.10) $A \subset \Omega$ est $h\mu$-négligeable ssi $A \cap \{h \neq 0\}$ est μ-négligeable, μ-mesurable ssi $A \cap \{h \neq 0\}$ est μ-mesurable ; f réelle est $h\mu$-intégrable ssi hf est μ-intégrable, et $(h\mu)(f) = \mu(hf)$, et alors $f(h\mu) = (fh)\mu$. En particulier $(f\mu)^*_\alpha(1) = \mu^*_\alpha(|f|)$ pour f μ-intégrable ; donc f μ-intégrable définit la mesure $f\mu \in \mathrm{Mes}(\Omega,\mathcal{O};E)$, et f_n converge vers 0 dans $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{O},\mu)$ ssi $f\mu$ converge vers 0 dans $\mathrm{Mes}(\Omega,\mathcal{O};E)$, ce qui est bien une définition de la topologie de $\mathcal{L}^1$ ou L^1 qui dépend seulement de E. D'ailleurs $\mathrm{Mes}(\Omega,\mathcal{O};E)$ ne dépend que de E, vectoriellement et topologiquement, et $f \mapsto f\mu$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{O},\mu)$ sur son image dans $\mathrm{Mes}(\Omega,\mathcal{O};E)$.

(1.11) On peut encore dire que μ, mesure à valeurs dans E, définit $\tilde{\mu}$, mesure à valeurs dans $\mathrm{Mes}(\Omega,\mathcal{O};E)$ par $\varphi \mapsto \tilde{\mu}(\varphi) = \varphi\mu$; $A \subset \Omega$ est $\tilde{\mu}$-négligeable (resp. $\tilde{\mu}$-mesurable) ssi il est μ-négligeable (resp. μ-mesurable) ; f réelle est $\tilde{\mu}$-intégrable ssi elle est μ-intégrable, et $\tilde{\mu}(f) = f\mu$; si $f \geq 0$, $\tilde{\mu}^*_\alpha(f) = \mu^*_\alpha(f)$; $f \mapsto f\mu = \tilde{\mu}(f)$ est un isomorphisme vectoriel topologique de $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{O},\mu)$ sur son image, qu'on peut donc noter $\tilde{\mu}(\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{O},\mu))$ ou $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{O},\mu)\mu$, sous-espace vectoriel fermé de $\mathrm{Mes}(\Omega,\mathcal{O};E)$, l'espace des mesures "de base μ".

(1.12) L'application bilinéaire $(f,\mu) \mapsto \mu(f)$ (resp. $(f,\mu) \mapsto f\mu$) est bilinéaire continue de $B\mathcal{O} \times \mathrm{Mes}(\Omega,\mathcal{O};E)$ dans E (resp. $\mathrm{Mes}(\Omega,\mathcal{O};E)$). Et même si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

converge simplement vers f en restant bornée dans $B\mathcal{O}$, et μ_n vers μ dans $Mes(\Omega,\mathcal{O};E)$, $\mu_n(f_n)$ converge vers $\mu(f)$ dans E, et $f_n\mu_n$ vers $f\mu$ dans $Mes(\Omega,\mathcal{O};E)$.

§ 2. MESURES NON BORNEES, OU MESURES FORMELLES

Résumé du § 2. C'est la notion fondamentale de cet article. (2.0), page 13, donne la définition des mesures formelles ; et leurs intégrales supérieures (2.1), (2.2), page 14. Les principales propriétés sont étudiées ensuite à (2.3), page 14; (2.4), page 15, définit la somme $\mu+\nu$ et le produit $h\mu$, puis une nouvelle définition tensorielle, page 16, de l'espace des mesures formelles comme module sur l'anneau $\mathcal{O}$ des fonctions boréliennes ; cette propriété de module sera essentielle dans la suite (l'espace des semi-martingales formelles sera un module sur l'anneau des fonctions prévisibles, la multiplication étant l'intégration stochastique). (2.5), page 16, donne la convergence des mesures formelles. (2.6), page 18 , étudie des sous-modules du module. (2.8) à (2. 9), pages 19-24, étudie les familles boréliennes de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^N$, et les sous-modules libres de $\mathcal{O}^{\mathbb{N}}$; cela paraît ici un peu abstrait et inutile, mais c'est bien ici que cela doit figurer, et ce sera fondamental dans l'étude, par la géométrie différentielle, des semi-martingales sur les variétés (article ultérieur), avec les idées des semi-martingales formelles.

(2.0) Il est très habituel de considérer des mesures ≥ 0 à valeurs finies ou non, mais pas très habituel de considérer des mesures analogues réelles ou vectorielles, donc non partout définies ; plutôt que de les appeler mesures non partout définies ou mesures non bornées (ce qu'on fait pour des mesures ≥ 0 ; non partout définies voulant dire non nécessairement partout définies, non bornées voulant dire non nécessairement bornées) je les appellerai mesures formelles ; un des seuls exemples vraiment intéressants rencontrés jusqu'à présent en analyse est celui des mesures de Radon sur un espace non compact. Provisoirement, une telle mesure μ formelle sur $(\Omega,\mathcal{B})$, à valeurs dans E métrisable complet, sera la donnée d'une suite croissante $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de parties boréliennes de Ω, de réunion Ω, et d'une suite $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$, μ_k mesure bornée sur Ω_k, μ_{k+1} induisant μ_k sur Ω_k (ce qui veut dire que nous nous bornons au cas σ-fini). On posera alors :

(2.1)
$$\mu_\alpha^*(f) = \sup_{\substack{\varphi\in B\mathcal{B},\\ |\varphi|\leq f;\\ k\in\mathbb{N}}} |\mu_k(\varphi|_{\Omega_k})|_\alpha \quad ,$$

pour f borélienne ≥ 0, finie ou non,

(2.2)
$$\mu_\alpha^*(f) = \inf_{\substack{g \text{ borélienne}\\ g\geq f}} \mu_\alpha^*(g) \quad ,$$

pour f quelconque ≥ 0, finie ou non.

<u>(2.3)</u> Les propriétés seront les mêmes que pour une mesure bornée. On dira que f réelle est μ-intégrable s'il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions boréliennes bornées, chaque φ_n portée par l'un des Ω_k, telle que $\mu_\alpha^*(|f-\varphi_n|)$ tende vers 0 pour tout α, et tout le reste s'en suit. Chaque Ω_k est μ-intégrable. Si E est un C-espace, f est μ-intégrable ssi elle est μ-mesurable, et $\mu_\alpha^*(|f|)<+\infty$ pour tout α. Il y a un espace $L^1(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ et une topologie définie par des jauges $f\mapsto\mu_\alpha^*(|f|)$ (mais pour l'instant l'espace des mesures formelles n'a pas de topologie naturelle).

La définition précédente n'était que provisoire, car, telle quelle, elle dépend de la suite des Ω_k. Si alors $(\Omega'_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\mu'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont deux autres suites, on dira que les mesures formelles μ, μ', définies respectivement par $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\Omega'_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\mu'_k)_{k\in\mathbb{N}}$, sont égales, $\mu=\mu'$, si μ_k et $\mu'_{k'}$ induisent la même mesure sur $\Omega_k\cap\Omega'_{k'}$; ou encore si tout Ω_k est μ'-intégrable, et si la mesure vraie induite par μ' sur Ω_k est μ_k ; alors bien entendu Ω'_k sera μ-intégrable, et μ induira sur Ω'_k la mesure μ'_k ; on pourra d'ailleurs définir μ et

μ' par les $((\Omega_k \cap \Omega'_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\mu_k)|_{\Omega_k\cap\Omega'_k} = (\mu'_k)|_{\Omega_k\cap\Omega'_k})_{k\in\mathbb{N}}$.
[La seule chose pas tout-à-fait triviale est que, si μ_k et μ'_k induisent la même mesure sur $\Omega_k \cap \Omega'_{k'}$, Ω_k est μ'-intégrable. Soit $\varphi \in B\mathcal{C}$, $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, φ portée par $(\Omega_k \setminus \Omega'_\ell) \cap \Omega'_m$, $m \geq \ell$; alors $\mu'^*(\varphi) = \mu'_m(\varphi) = \mu_k(\varphi)$; en prenant le sup des $|\mu'(\varphi)|_\alpha$ pour toutes ces φ et tous les $m \geq \ell$, $\mu^*_\alpha(\Omega_k \setminus \Omega'_\ell) \leq \mu^*_{k,\alpha}(\Omega_k \setminus \Omega'_\ell)$; mais les $\Omega_k \cap \Omega_\ell$ convergent vers Ω_k pour $\ell \to +\infty$, alors le théorème de convergence dominée de Lebesgue dit que $\mu^*_{k,\alpha}(\Omega_k \setminus \Omega'_\ell)$ tend vers 0 pour $\ell \to +\infty$, donc aussi $\mu'^*_\alpha(\Omega_k \setminus \Omega'_\ell)$, donc Ω_k est μ'-intégrable.]
Ensuite $\mu^*_\alpha = \mu'^*_\alpha$ pour tout α ; les parties μ-négligeables et μ'-négligeables, μ-mesurables et μ'-mesurables, les fonctions réelles μ-intégrables et μ'-intégrables seront les mêmes, etc. Si μ est une mesure vraie, elle pourra être définie par $\Omega_k = \Omega$ pour tout k ; une mesure formelle est vraie ssi Ω, ou 1, est intégrable. (Rappelons que, si E n'est pas un C-espace, il ne suffit pas, pour que 1 soit μ-intégrable, que $\mu^*_\alpha(1) < +\infty$ pour tout α ; il faut et il suffit que $\lim_{k\to+\infty} \mu^*_\alpha(\complement \Omega_k) = 0$ pour tout α). Une mesure μ formelle pourra être définie par n'importe quelle suite, de réunion Ω, de parties boréliennes μ-intégrables. Des exemples simples de telles mesures sont, sur $\mathbb{R}$, où dx est la mesure de Lebesgue : $\mu = f(x)dx$, f fonction borélienne non localement dx-intégrable, avec $\Omega_k = [-k,+k] \cap \{|f| \leq k\}$, ou $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} n!\ \delta_{\{r_n\}}$, où $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dense de points deux à deux disjoints, avec $\Omega_k = \{r_n\}_{n\leq k} \cup \complement \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>(2.4)</u> On définit la somme de deux mesures formelles, $\mu + \mu'$, par $(\Omega_k \cap \Omega'_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $((\mu_k + \mu'_k)|_{\Omega_k\cap\Omega'_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Si μ est une mesure formelle définie par les Ω_k, μ_k, et h une fonction μ-mesurable réelle, on définit $h\mu$ comme mesure formelle par $((\Omega_k \cap \{|h| \leq k\}), h\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$; toutes les propriétés qu'on espère sont vraies. En particulier, f est $h\mu$-intégrable ssi fh est μ-intégrable ; h est μ-intégrable ssi 1 est $h\mu$-intégrable, i.e. ssi $h\mu$ est une mesure vraie ; $h\mu = 0$ ssi h est μ-négligeable. Si μ est une mesure, vraie ou formelle, f une fonction borélienne, $\mu(f)$ n'a pas toujours un sens, mais $f\mu$ en a toujours un comme mesure formelle. On peut d'ailleurs définir toute mesure formelle comme une $h\mu$, avec μ mesure vraie et h borélienne réelle, qu'on peut choisir partout

> 0. Ou encore, si μ est une mesure formelle, il existe γ borélienne bornée partout > 0 telle que $\gamma\mu$ soit une mesure vraie : si μ est définie par les Ω_k, μ_k, on choisit c_k réelle > 0 par $c_k\, \mu^*_{k+1,\frac{1}{2^k}}(\Omega_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k}$, et $\gamma = c_k$ dans $\Omega_{k+1} \setminus \Omega_k$; γ est μ-intégrable, donc $\gamma\mu$ est une mesure vraie ; et $\mu = \frac{1}{\gamma}(\gamma\mu)$. On remarque aussi que, si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties boréliennes deux à deux disjointes, et ν_k une mesure, vraie ou formelle, portée par A_k, $\sum_{k\in\mathbb{N}} \nu_k$ est une mesure formelle. Enfin, quelles que soient μ, f, g, f et g boréliennes, on a toujours $f(g\mu) = (fg)\mu$; Mes$(\Omega,\mathcal{B};E)$ est un $B\mathcal{B}$-module, l'espace des mesures formelles est un $\mathcal{B}$-module. Plus spécialement il est exactement (et on pourrait le définir ainsi au lieu de définir une mesure non bornée par des suites $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$) l'extension du $B\mathcal{B}$-module Mes $(\Omega,\mathcal{B};E)$ par l'extension $B\mathcal{B}\to\mathcal{B}$ de l'anneau de base, c-à-d. $\mathcal{B}\otimes_{B\mathcal{B}}$ Mes$(\Omega,\mathcal{B};E)$ (voir Nicolas Bourbaki, Eléments de Mathématique, Algèbre I, chap. II, § 5). En effet, l'application $B\mathcal{B}$-bilinéaire $(h,\mu)\mapsto h\mu$ de $\mathcal{B}\times$ Mes$(\Omega,\mathcal{B};E)$, dans l'espace des mesures formelles, définit une application $\mathcal{B}$-linéaire unique de $\mathcal{B}\otimes_{B\mathcal{B}}$ Mes$(\Omega,\mathcal{B};E)$ dans l'espace des mesures formelles, où l'image de $h\otimes\mu$, $h\in\mathcal{B}$, $\mu\in$ Mes$(\Omega,\mathcal{B};E)$ est la mesure formelle $h\mu$. Cette application $B\mathcal{B}$-linéaire est surjective, puisque toute mesure formelle est de la forme $h\mu$, h borélienne, μ mesure vraie ; et elle est injective, car si l'image $\sum_i h_i\, \mu_i$ de $\sum_i h_i\otimes\mu_i$, $h_i\in\mathcal{B}$, $\mu_i\in$ Mes$(\Omega,\mathcal{B};E)$, est nulle, et si γ est une fonction borélienne bornée > 0 telle que les γh_i soient bornées, $\sum_i (\gamma h_i)\mu_i = 0$, donc aussi $0 = 1\otimes\sum_i(\gamma h_i) = \sum_i \gamma h_i\otimes\mu_i$ (parce que $\otimes$ est ici $\otimes_{B\mathcal{B}}$) $= \gamma\sum_i h_i\otimes\mu_i$, et aussi $\sum_i h_i\otimes\mu_i = \frac{1}{\gamma}\,\gamma\sum_i h_i\otimes\mu_i = 0$; elle est donc bijective. [Nous avons utilisé le fait que $\otimes = \otimes_{B\mathcal{B}}$; si on partait de $\mathcal{B}\otimes_{\mathbb{R}}$ Mes, ce ne serait pas injectif !] L'espace des mesures formelles sera noté $\mathcal{B}\otimes_{B\mathcal{B}}$ Mes$(\Omega,\mathcal{B};E)$, ou plus brièvement $\mathcal{B}$ Mes$(\Omega,\mathcal{B};E)$, ou même $\mathcal{B}$ Mes.

<u>(2.5)</u> On peut définir une topologie sur $\mathcal{B}$ Mes, mais c'est une limite inductive, pas drôle ! On se bornera à définir des convergences de suites. <u>On dira que</u> $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>tend vers</u> μ <u>dans</u> $\mathcal{B}$ Mes, <u>s'il existe une fonction</u> γ <u>borélienne</u>

bornée, *partout* > 0, *telle que* $(\gamma\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tende vers* $\gamma\mu$ *dans* Mes. *Si la limite existe*, *elle est unique*. Si en effet $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathfrak{C}$ Mes vers μ et vers μ', il existe γ, γ', boréliennes bornées > 0 telles que $\gamma\mu_n$, $\gamma'\mu_n$ convergent respectivement vers $\gamma\mu$, $\gamma'\mu'$, dans Mes. Mais alors $\gamma\gamma'\mu_n$ converge dans Mes à la fois vers $\gamma\gamma'\mu$ et vers $\gamma\gamma'\mu'$, donc $\gamma\gamma'\mu = \gamma\gamma'\mu'$ et par suite $\mu = \mu'$. *Si alors* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions boréliennes*, *tendant simplement vers* h (*sans aucune condition de majoration*), *et si* μ_n *tend vers* μ *dans* $\mathfrak{C}$ Mes, $h_n\mu_n$ *tend vers* $h\mu$ *dans* $\mathfrak{C}$Mes. En effet, si γ est une fonction borélienne bornée partout > 0 telle que $\gamma\mu_n$ tende vers $\gamma\mu$ dans Mes, et γ' une fonction borélienne bornée partout > 0 telle que $\|\gamma' h_n\|_\infty \leq 1$ pour tout n ($\gamma' \leq \bigwedge_n \frac{1}{|h_n|}$, qui est > 0 puisque h_n tend vers h), alors $\gamma' h_n$ tend simplement vers γh en restant bornée en module par 1, $\gamma\mu_n$ vers $\gamma\mu$ dans Mes, donc $\gamma\gamma' h_n\mu_n$ vers $\gamma\gamma' h\mu$ dans Mes, donc $h_n\mu_n$ vers $h\mu$ dans $\mathfrak{C}$ Mes. Cette propriété de convergence, pour une convergence *non dominée* des h_n , est au premier abord assez étonnante ! Un exemple dissipera les malentendus. Sur $\mathbb{R}$, la suite des $\delta_{(1/n)}$, n entier ≥ 1, tend vaguement vers $\delta_o = \delta$; dans Mes($\mathbb{R},\mathfrak{R};\mathbb{R}$) ($\mathfrak{R}$ tribu borélienne de $\mathbb{R}$) , elle n'a pas de limite, mais dans $\mathfrak{R}$ Mes elle tend vers 0. En effet, si γ est la fonction égale à $\frac{1}{n}$ aux points $\frac{1}{n}$, $n \geq 1$, à 1 ailleurs, $\gamma\delta_{(1/n)}$ tend vers 0 dans Mes. Quelles que soient les constantes c_n, $c_n\delta_{(1/n)}$ tend aussi vers 0 dans $\mathfrak{R}$ Mes. Si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues ≥ 0 sur $\mathbb{R}$, support de $\varphi_n \subset [-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}]$, $\int \varphi_n(x)dx = +1$, $\varphi_n(x)dx$ converge vaguement vers δ, mais converge vers 0 dans $\mathfrak{R}$ Mes : en effet, si α est une fonction continue, nulle en 0 et > 0 partout ailleurs, et γ la fonction égale à α sur $\complement\{0\}$, à 1 en 0, $\gamma\varphi_n dx$ tend vers 0 dans Mes. La convergence vague vers $\delta_{(0)}$ est liée à la structure topologique de $\mathbb{R}$, alors que les mesures ne sont liées ici qu'à la structure borélienne ; un automorphisme borélien de $\mathbb{R}$, consistant à échanger le point 0 et le point 1, sans rien changer ailleurs, ne peut pas changer les limites précédentes dans $\mathfrak{R}$ Mes, puisqu'il respecte ces mesures ; or $\delta_{(0)}$ devient $\delta_{(1)}$! Inversement, si $(h_n\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathfrak{C}$ Mes, on peut extraire une suite partielle pour laquelle $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 λ-pp. ; si en effet $\gamma > 0$ borélienne bornée est telle que $\gamma h_n\lambda$ converge vers 0 dans

Mes, donc γh_n vers 0 dans $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$, on peut extraire une suite partielle pour laquelle γh_n, donc h_n converge λ-pp. vers 0.

(2.6) Soit $\mathfrak{N}$ un sous-$B\mathcal{O}$-module de $\mathrm{Mes}(\Omega,\mathcal{O};E)$; on notera $\mathcal{O}\mathfrak{N}$ le sous-$\mathcal{O}$-module engendré par $\mathfrak{N}$ dans $\mathcal{O}$ Mes, ensemble des $h\mu$, $\mu \in \mathfrak{N}$, $h \in \mathcal{O}$. On a aussi $\mathcal{O}\mathfrak{N} = \mathcal{O} \otimes_{B\mathcal{O}} \mathfrak{N}$. On a $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}' = (\mathcal{O}\mathfrak{N} \cap \mathrm{Mes}) \subset \overline{\mathfrak{N}}$, adhérence de $\mathfrak{N}$ dans Mes. En effet, si $\mu \in \mathfrak{N}'$, $\mu = h\lambda$, $\lambda \in \mathfrak{N}$, h λ-intégrable puisque $h\lambda \in \mathrm{Mes}$, alors $h\, 1_{|h| \leq n}\lambda \in \mathfrak{N}$ converge vers $h\lambda$ dans Mes par Lebesgue, donc $\mu = h\lambda \in \overline{\mathfrak{N}}$. Mais on notera que $\mathfrak{N}$ peut être strictement plus petit que $\mathfrak{N}'$; le cas typique est $\mathfrak{N} = B\mathcal{O}\lambda$, le sous-$B\mathcal{O}$-module formé des $h\lambda$, $h \in B\mathcal{O}$; $\mathcal{O}\mathfrak{N} = \mathcal{O}\lambda$ est l'ensemble des $h\lambda$, $h \in \mathcal{O}$, et $\mathfrak{N}' = \mathcal{O}\lambda \cap \mathrm{Mes}$ est l'ensemble des $h\lambda$, h λ-intégrable ; bien entendu $\mathcal{O}\lambda$ est fermé dans $\mathcal{O}$ Mes car, si $h_n\lambda$, $h_n \in \mathcal{O}$, converge vers μ dans $\mathcal{O}$ Mes, et si $\gamma \in \mathcal{O}$, $\gamma > 0$, bornée est telle que $\gamma h_n\lambda$ converge vers $\gamma\mu$ dans Mes, γh_n est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^1(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$, donc a une limite k λ-intégrable, donc $\gamma h_n\lambda$ converge vers $k\lambda$ dans Mes, donc $\gamma\mu = k\lambda$, $\mu = \frac{k}{\gamma}\lambda$, $\mu \in \mathcal{O}\lambda$. Nous venons donc de montrer que, <u>dans $\mathcal{O}$ Mes (mais non dans Mes), un module à un générateur est fermé</u>. On notera aussi que $\mathfrak{N}'$ peut être strictement plus petit que $\overline{\mathfrak{N}}$. Par exemple, sur $(\mathbb{R},\mathfrak{K})$, soit $\mathfrak{N}$ le sous-$B\mathfrak{K}$-module de $\mathrm{Mes}(\mathbb{R},\mathfrak{K};\mathbb{R})$ engendré par les $\delta_{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$; c'est l'ensemble des mesures $\sum_n c_n \delta_{(n)}$, sommes finies ; $\overline{\mathfrak{N}}$ est l'ensemble des mesures $\sum_n c_n \delta_{(n)}$, sommes infinies, $\sum_n |c_n| < +\infty$, et $\mathcal{O}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$, donc $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} \subsetneq \overline{\mathfrak{N}}$. Puisque $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}' \subset \overline{\mathfrak{N}}$, $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$ si $\mathfrak{N}$ est fermé dans Mes, et $\mathfrak{N}$ est toujours dense dans $\mathfrak{N}'$; $\mathfrak{N}$ est aussi toujours dense dans $\mathcal{O}\mathfrak{N}$. Si $\mathfrak{N}$ est fermé dans Mes, $\mathcal{O}\mathfrak{N}$ est fermé dans $\mathcal{O}$ Mes, et $\mathfrak{N} = \mathcal{O}\mathfrak{N} \cap \mathrm{Mes}$ est donc fermé dans Mes, même pour la convergence de $\mathcal{O}$ Mes ; en effet, si $\mu_n \in \mathcal{O}\mathfrak{N}$ converge vers μ dans $\mathcal{O}$ Mes, si $\gamma > 0$ borélienne bornée est telle que $\gamma\mu_n$ converge vers $\gamma\mu$ dans Mes, $\gamma\mu_n \in \mathcal{O}\mathfrak{N} \cap \mathrm{Mes} = \mathfrak{N}$, supposé fermé, donc $\gamma\mu \in \mathfrak{N}$, et $\mu \in \mathcal{O}\mathfrak{N}$. On considère aussi des $B\mathcal{O}_+$-modules et $\mathcal{O}_+$-modules ; par exemple, pour $E = \mathbb{R}$, Mes_+ est le $B\mathcal{O}_+$-module des mesures bornées ≥ 0, $\mathcal{O}_+ \mathrm{Mes}_+$ le $\mathcal{O}_+$-module des mesures non bornées σ-finies ≥ 0.

(2.7) On dit qu'<u>une mesure</u> ν <u>sur</u> $(\Omega,\mathcal{O})$ <u>à valeurs dans</u> F <u>domine une mesure</u> μ <u>sur</u> $(\Omega,\mathcal{O})$ <u>à valeurs dans</u> E, <u>si toute partie borélienne</u> ν-<u>négligeable est</u>

μ-négligeable ; c'est alors aussi vrai pour une partie quelconque de Ω, et toute fonction réelle ν-mesurable est μ-mesurable. Si alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions réelles μ-mesurables, $|f_n| \leq g$, $g \geq 0$ μ-intégrable, et si $\nu_\alpha^*(|f_n|)$ tend vers 0 pour tout α, $\mu_\alpha(|f_n|)$ aussi tend vers 0 pour tout α. En effet, on peut extraire des f_n une suite partielle convergeant ν-pp. vers 0, donc μ-pp., et on peut appliquer aux f_n le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour μ. Si par exemple les Ω'_n sont des parties μ-mesurables de Ω, si μ est bornée, si $\nu_\alpha^*(\Omega'_n)$ tend vers 0 pour tout α, alors $\mu_\alpha^*(\Omega'_n)$ aussi.

(2.8) Modules de fonctions boréliennes et familles boréliennes de sous-espaces.

Nous allons donner ici un certain nombre de résultats faciles, mais que nous utiliserons dans certaines circonstances, sur les fonctions boréliennes sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^N$; ces fonctions forment le $\mathcal{B}$-module $\mathcal{B}^N$. Nous aurons à considérer des champs de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^N$, dont la dimension pourra être variable, comme dans la théorie des sommes hilbertiennes d'espaces hilbertiens. Pour ne pas nous canuler inutilement, si $(F_k)_{k\in K}$ est un système fini d'éléments de $\mathcal{B}^N$, nous dirons qu'il est libre si, pour tout $\omega \in \Omega$, certains des vecteurs, $(F_k(\omega))_{k\in K'(\omega)\subset K}$, forment un système libre dans $\mathbb{R}^N$, les autres étant nuls (pas toujours les mêmes lorsque ω varie, $K'(\omega)$ dépend de ω). Si $F \in \mathcal{B}^N$, nous dirons que $F = \sum_{k\in K} \alpha_k F^k$, $\alpha_k \in \mathcal{B}$, est une décomposition unique en ce sens que $\alpha_k(\omega)$ est unique pour $k \in K'(\omega)$. Le mot base sera entendu dans le même sens.

Une famille de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^N$ sera une application de Ω dans l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^N$; si τ est une telle famille, $\tau(\omega)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$, pour $\omega \in \Omega$. Nous dirons que τ est borélienne si elle admet une base borélienne (base au sens abusif ci-dessus), $(F_k)_{k\in K}$: le système des F_k est libre, et, pour tout ω, $\tau(\omega)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ engendré par les $F_k(\omega)$, $k \in K$. Si $\mathfrak{N}$ est un sous-$\mathcal{B}$-module de $\mathcal{B}^N$, nous dirons qu'il est libre, s'il est $\mathcal{B}$-engendré par un système libre $(F_k)_{k\in K}$.

Si τ est borélienne, de base $(F_k)_{k\in K}$, le sous-module $\mathfrak{N}(\tau)$ des sections boréliennes de τ ($F \in \mathfrak{N}(\tau)$ si F est borélienne et $F(\omega) \in \tau(\omega)$ pour tout ω) est libre, de base $(F_k)_{k\in K}$; mais $\mathfrak{N}(\tau)$ peut être libre même si τ n'est pas borélienne.

Si $\mathfrak{N}$ est un sous-module libre de $\mathcal{O}^N$, de base $(F_k)_{k\in K}$, la famille $\tau(\mathfrak{N})$ des sous-espaces de $\mathfrak{N}$, $\tau(\mathfrak{N})(\omega) =$ sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^N$ constitué par les $F(\omega)$, $F \in \mathfrak{N}$), est borélienne, de base $(F_k)_{k\in K}$; mais $\tau(\mathfrak{N})$ peut être borélienne même si $\mathfrak{N}$ n'est pas libre. Si $\mathfrak{N}$ est libre, $\mathfrak{N}(\tau(\mathfrak{N})) = \mathfrak{N}$; si τ est borélienne, $\tau(\mathfrak{N}(\tau)) = \tau$. On a aussi une correspondance bijective entre familles boréliennes τ et sous-$\mathcal{O}$-modules libres $\mathfrak{N}$.

Le théorème d'échange joue un rôle essentiel. Si $(J^k)_{k\in K}$ est un système libre de $\mathcal{O}^N$, on peut le compléter en un système libre $(J^{k'})_{k'\in K'}$, choisi dans la base canonique de $\mathcal{O}^N$, de manière à obtenir une base borélienne de $\mathcal{O}^N$ (cela se fait en chaque ω ; un calcul explicite de déterminants affirme que ce système est borélien). Un sous-$\mathcal{O}$-module libre de $\mathcal{O}^N$ est séquentiellement fermé pour la convergence simple sur Ω.

<u>(2.8 bis)</u> <u>Une famille τ engendrée par un nombre fini de fonctions $F_k \in \mathcal{O}^N$ est borélienne, un sous-$\mathcal{O}$-module $\mathfrak{N}$ de type fini de $\mathcal{O}^N$ est libre.</u> [On peut partager Ω en un nombre fini de parties boréliennes disjointes, dans chacune desquelles une partie des F_k est libre et les autres en sont dépendantes ; on remplace les dépendantes par 0.]

<u>(2.8 ter)</u> L'orthogonalité des $\mathbf{R}^N$ est relative au produit scalaire euclidien canonique. Si τ est une famille de sous-espaces de $\mathbf{R}^N$, on construit sa famille orthogonale τ^+ : $\tau^+(\omega)$ est l'orthogonal de $\tau(\omega)$ dans $\mathbf{R}^N$. Trivialement $\tau^{++} = \tau$; <u>τ^+ est borélienne si et seulement si τ est borélienne</u> [si τ est borélienne, soit $(F_k)_{k\in K}$ une base, $(F_{k'})_{k'\in K'}$ construite par le théorème d'échange, de manière que $(F_k \cup F_{k'})_{k\in K, k'\in K'}$ soit une base de $\mathbf{R}^N$ en chaque point ; on construit sa base duale $(E_k \cup E_{k'})_{k\in K, k'\in K'}$, qui est aussi borélienne par des calculs de déterminants ; τ^+ a pour base $(E_{k'})_{k'\in K'}$.]

(2.8 quarto) Soient τ_1, τ_2, deux familles boréliennes de sous-espaces. Trivialement $\tau_1 + \tau_2$ est borélienne (nombre fini de générateurs $\in \mathfrak{O}^N$), donc aussi $\tau_1 \cap \tau_2 = (\tau_1^+ + \tau_2^+)^+$. Si $\tau_1 \supset \tau_2$, il existe τ_3 borélienne telle que $\tau_1 = \tau_2 \oplus \tau_3$.

(2.8 quinto) Soit $\mathfrak{N}$ un sous-$\mathfrak{O}$-module de $\mathfrak{O}^N$. On dit que, F, G $\in \mathcal{O}$ sont orthogonales si $(F(\omega)|G(\omega))_{\mathbf{R}^N} = 0$ en tout point ω ; l'ensemble des éléments de $\mathfrak{O}^N$ orthogonaux à $\mathfrak{N}$ est son orthogonal $\mathfrak{N}^+$. Si $\mathfrak{N}$ est libre, $\mathfrak{N}^+$ aussi et $\mathfrak{N}^+ = \mathfrak{N}((\tau(\mathfrak{N}))^+)$ (même démonstration que (2.8 ter)) ; mais $\mathfrak{N}^+$ peut être libre sans que $\mathfrak{N}$ le soit ; si $\mathfrak{N}$ est libre, $\mathfrak{N}^{++} = \mathfrak{N}$. Si τ est borélienne, $\tau^+ = \tau((\mathfrak{N}(\tau)^+)$. Si $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, sont deux sous-$\mathfrak{O}$-modules libres de $\mathfrak{O}^N$, $\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2$ est libre (de type fini !), donc aussi $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 = (\mathfrak{N}_1^+ + \mathfrak{N}_2^+)^+$; si $\mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2$, il existe $\mathfrak{N}_3$ libre tel que $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 \oplus \mathfrak{N}_3$.

Si τ_1, τ_2, sont boréliennes, $\mathfrak{N}(\tau_1 + \tau_2) = \mathfrak{N}(\tau_1) + \mathfrak{N}(\tau_2)$, $\mathfrak{N}(\tau_1 \cap \tau_2) = \mathfrak{N}(\tau_1) \cap \mathfrak{N}(\tau_2)$; si $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ sont libres, $\tau(\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2) = \tau(\mathfrak{N}_1) + \tau(\mathfrak{N}_2)$, $\tau(\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2) = \tau(\mathfrak{N}_1) \cap \tau(\mathfrak{N}_2)$. (On peut former une base borélienne de $\tau_1 + \tau_2$ formée d'un système libre engendrant $\tau_1 \cap \tau_2$, d'un système libre engendrant un supplémentaire de $\tau_1 \cap \tau_2$ dans τ_1, et d'un système libre engendrant un supplémentaire de $\tau_1 \cap \tau_2$ dans τ_2.)

Proposition (2.9) : Soit $(\mu_k)_{k=1,2,\ldots,N}$ un système de mesures formelles sur $(\Omega,\mathfrak{O})$, à valeurs dans E ; elles définissent une mesure formelle μ à valeurs dans $E^N = \mathbf{R}^N \otimes E$. On suppose qu'il existe un système $(\nu_{k'})_{k'=1,2,\ldots,N'}$ $\mathfrak{O}$-engendrant les μ_k, orthogonal au sens suivant : si $\sum_{k'=1}^{N'} \alpha_{k'} \nu_{k'} = 0$, $\alpha_{k'} \in \mathfrak{O}$, chacune des $\alpha_{k'} \nu_{k'}$ est nulle (i.e. chaque $\alpha_{k'}$ est $\nu_{k'}$-pp. nulle), [nous définirons l'orthogonalité en un sens plus strict au § 7 ; c'est sans grand inconvénient] et que chaque $\nu_{k'}$ admet une mesure $\lambda_{k'} \geq 0$ équivalente. Alors μ admet une mesure $\nu \geq 0$ équivalente. Il existe un sous-$\mathfrak{O}$-module libre $\mathfrak{N}$ de $\mathfrak{O}^N$, et une famille borélienne τ de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^N$ indexée par Ω, $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\tau)$, $\tau = \tau(\mathfrak{N})$, uniques à un ensemble μ- ou ν-négligeable près, tels que : si $\alpha = (\alpha_k)_{k=1,2,\ldots,N} \in \mathfrak{O}^N$, $\alpha\mu = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mu_k$ est nulle, ssi α est μ- ou ν-pp. égale à un élément de $\mathfrak{N}$, ou ssi α prend μ- ou ν-pp. ses valeurs dans τ. Il existe une infinité de systèmes $(\bar{\nu},\bar{\tau})$ d'une mesure $\bar{\nu} \geq 0$ et d'une famille borélienne

$\bar{\tau}$ de sous-espaces vectoriels, tels que, pour $\alpha \in \mathcal{O}^N$, $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mu_k$ soit nulle ssi α prend $\bar{\nu}$-pp. ses valeurs dans $\bar{\tau}$; à une équivalence près, ν est la plus petite de toutes ces $\bar{\nu}$ (autrement dit, toute $\bar{\nu}$ domine ν, ν est de base $\bar{\nu}$), et $\bar{\nu}$ est équivalente à ν ssi elle est $\bar{\tau}$-minimale, i.e. ne charge pas l'ensemble $\{\bar{\tau} = \mathbb{R}^N\}$ des $\omega \in \Omega$ tels que $\bar{\tau}(\omega) = \mathbb{R}^N$. On peut prendre pour $\bar{\nu}$ n'importe quelle mesure ≥ 0 dominant ν ; $\bar{\tau}$ est toujours déterminée à un ensemble $\bar{\nu}$-négligeable près (en particulier τ est unique à un ensemble ν-négligeable près) ; si $\bar{\nu}$ domine ν, $(\bar{\nu},\bar{\tau})$ convient ssi $\bar{\tau} = \tau$ ν-pp. (de sorte que $(\nu,\bar{\tau})$ convient aussi), et $\bar{\tau} = \mathbb{R}^N$ $\bar{\nu}$-pp. sur tout ensemble ν-négligeable ; donc $\bar{\nu}$-pp. $\bar{\tau} = \tau$ ou $\bar{\tau} = \mathbb{R}^N$.

Remarque : Il est commode de savoir que $A \in \mathcal{O}$ est μ-négligeable ssi, pour toute $\alpha \in \mathcal{O}^N$ portée par A, $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mu_k = 0$.

Démonstration : Soit $\mu_k = \sum_{k' \in N'} \beta_{k,k'} \nu_{k'}$; $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mu_k = \sum_{k,k'} \alpha_k \beta_{k,k'} \nu_{k'}$. Posons $\theta_{k'} = (\beta_{k,k'})_{k=1,2,\dots,N}$, $\theta_{k'} = \mathcal{O}^N$ pour tout $k' = 1,2,\dots,N'$. Alors $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \beta_{k,k'} = (\alpha|\theta_{k'})$, pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^N$; l'orthogonalité des $\nu_{k'}$ implique que $\sum \alpha_k \mu_k = 0$ ssi chaque $(\alpha|\theta_{k'})$, $k' = 1,2,\dots,N'$, est $\nu_{k'}$-pp. nulle ; ou λ_k pp. nulle puisque $\lambda_k \geq 0$ est équivalente à $\nu_{k'}$. Soit $\bar{\nu}$ n'importe quelle mesure ≥ 0 dominant les $\lambda_{k'}$, $\lambda_{k'} = \rho_{k'} \bar{\nu}$, $\rho_{k'}$ borélienne. Alors $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mu_k = 0$ ssi chaque $(\alpha|\theta_{k'} \rho_{k'})$ est $\bar{\nu}$-pp. nulle. Soit $\bar{\mathfrak{N}}'$ le sous-$\mathcal{O}$-module libre engendré par les $\theta_{k'}\rho_{k'}$, $\bar{\mathfrak{N}}$ son sous-module libre orthogonal. Alors le système d'égalités $(\alpha|\theta_{k'}\rho_{k'}) = o$ $\bar{\nu}$-pp. signifie que α est $\bar{\nu}$-pp. égale à un élément de $\mathfrak{N}$. [Soit $(G_k)_{k\in K}$ une $\mathcal{O}$-base de $\mathfrak{N}'$, $(G_{k'})_{k' \in K}$ une $\mathcal{O}$-base supplémentaire ; soit $(F_k)_{k\in K} \cup (F_{k'})_{k' \in K'}$ la base duale. Alors α est $\bar{\nu}$-pp. égale à $\sum_{k' \in K'} (\alpha|G_{k'}) F_{k'}$.]

Nous avons ainsi montré l'existence d'un couple $(\bar{\tau},\bar{\nu})$ tel que $\alpha\mu = 0$ ssi α est $\bar{\nu}$-pp. à valeurs dans $\bar{\tau} = \tau(\bar{\mathfrak{N}})$. D'après la construction de $\bar{\nu}$, on peut toujours trouver un autre couple, en remplaçant $\bar{\nu}$ par une mesure dominant $\bar{\nu}$; il est donc intéressant de chercher une $\bar{\nu}$ minima. Sur $\{\bar{\tau} = \mathbb{R}^N\}$; on peut remplacer $\bar{\nu}$ par une mesure arbitraire ; car, si $\alpha \in \mathcal{O}^N$ est portée par $\{\bar{\tau} = \mathbb{R}^N\}$, $\alpha\mu = 0$, cet ensemble est μ-négligeable, et aussi $\alpha \in \bar{\tau}$, presque partout pour toute mesure portée par cet ensemble ; il y a donc intérêt à remplacer $\overline{\nu}$ par 0 sur $\{\overline{\tau} = \mathbf{R}^N\}$, donc à supposer que $\overline{\nu}$ ne charge pas $\{\overline{\tau} = \mathbf{R}^N\}$, ce que nous avons appelé $\overline{\tau}$-minimale ; supposons-le désormais, et appelons (τ,ν) un tel système minimal. Soit alors A borélien $\subset \{\tau \neq \mathbf{R}^N\}$; soit $\alpha \in \mathcal{O}^N$ à valeurs dans $\complement\tau$ dans $\{\tau \neq \mathbf{R}^N\}$, nulle sur $\{\tau = \mathbf{R}^N\}$; alors, si A est μ-négligeable, voir la remarque, $\alpha\mu = 0$, donc α est ν-pp. dans τ, et comme elle n'y est jamais sur A, A est ν-négligeable, et A ν-négligeable entraîne $\beta\mu = 0$ pour toute $\beta \in \mathcal{O}^N$ portée par A donc A μ-négligeable. Comme $\{\tau = \mathbf{R}^N\}$ est à la fois μ-négligeable et ν-négligeable, μ et ν ont les mêmes parties négligeables. Donc μ admet une mesure $\nu \geq 0$ équivalente, et toute ν τ-minimale est équivalente à μ, et réciproquement bien sûr, puisque $\{\tau = \mathbf{R}^N\}$ est μ-négligeable ; en particulier, une ν τ-minimale est unique à une équivalence près. Il existe donc un système minimal (τ,ν) ou (τ,μ). Pour tout couple $(\overline{\nu},\overline{\tau})$, $\overline{\tau}$ est unique à un ensemble $\overline{\nu}$-négligeable près (en particulier, τ est unique à un ensemble μ-négligeable près). Soient en effet $(\overline{\nu},\overline{\tau}),(\overline{\nu}',\overline{\tau}')$ deux couples. Soit $\alpha \in \mathcal{O}^N$, portée par $\{\overline{\tau}' \not\subset \overline{\tau}\}$, à valeurs dans $\overline{\tau}' \setminus \overline{\tau}$; puisque $\alpha \in \overline{\tau}'$, $\alpha\mu = 0$; donc $\alpha \in \overline{\tau}$ $\overline{\nu}$-pp. ; or $\alpha \notin \overline{\tau}$ sur $\{\overline{\tau}' \not\subset \overline{\tau}\}$, donc cet ensemble est $\overline{\nu}$-négligeable. Donc $\overline{\nu}$-pp., $\overline{\tau}' \subset \tau$, et aussi $\overline{\tau} \subset \overline{\tau}'$, donc $\overline{\tau}' = \overline{\tau}$.

Toute $\overline{\nu}$ domine ν, puisque, si A est $\overline{\nu}$-négligeable, $\alpha\mu = 0$ pour toute $\alpha \in \mathcal{O}^N$ portée par A, donc A est μ-négligeable ou ν-négligeable. Inversement, soit $\overline{\nu}$ dominant ν. On peut faire une partition $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, Ω_1 et Ω_2 boréliennes disjointes, Ω_1 portant ν, Ω_2 ν-négligeable, $\overline{\nu}$ équivalente à ν sur Ω_1, arbitraire sur Ω_2. Nécessairement $\overline{\tau} = \tau$, ν et $\overline{\nu}$-pp. sur Ω_1. Sur Ω_2, τ est arbitraire puisque Ω_2 est ν-négligeable ; mais $\tau = \overline{\tau} = \mathbf{R}^N$ répond à la question pour ν et $\overline{\nu}$, car, pour α arbitraire $\in \mathcal{O}^N$ portée par Ω_2, $\alpha\mu = 0$, et α est aussi ν et $\overline{\nu}$-presque partout à valeurs dans $\mathbf{R}^N$. Donc, pour toute $\overline{\nu}$ dominant ν, il existe un couple $(\overline{\nu},\overline{\tau})$: $\overline{\tau} = \tau$ sur Ω_1, $\overline{\tau} = \mathbf{R}^N$ sur Ω_2, peut être associé à $\overline{\nu}$. Puisque $\overline{\tau}$ est unique à un ensemble $\overline{\nu}$-négligeable près, $(\overline{\nu},\overline{\tau})$ convient, ssi $\overline{\tau} = \tau$ ν-pp. sur Ω_1 donc ν-pp. (et alors $(\nu,\overline{\tau})$ convient aussi), et $\overline{\tau} = \mathbf{R}^N$ $\overline{\nu}$-pp. sur Ω_2, ou $\overline{\nu}$-pp. sur tout ensemble ν-négligeable. Et alors $\overline{\nu}$-pp., $\overline{\tau} = \tau$ ou $\overline{\tau} = \mathbf{R}^N$.

Remarque : Le plus simple est presque toujours de prendre $\overline{\nu} = \nu$. Mais, si on a à comparer plusieurs mesures telles que μ, soit $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \ldots, \mu^{(n)}$, il est indispensable de prendre une même mesure $\overline{\nu}$ dominant toutes les $\mu^{(i)}$, si on désire comparer les $\overline{\tau}^{(i)}$ associées.

§ 3. LES SEMI-MARTINGALES COMME MESURES SUR LA TRIBU PREVISIBLE (7)

Résumé du § 3. (3.0 bis), page 26, introduit les mesures sur la tribu prévisible $\mathcal{P} = \mathcal{P}$ré de $\boldsymbol{\Omega} = \overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, à valeurs dans $E = L^0(\Omega, \mathcal{O}, \lambda)$. Les semi-martingales sont de telles mesures, par l'intégrale stochastique, page 27, vérifiant les propriétés (3.1), page 27 ; inversement, (3.2), page 27, ces propriétés caractérisent les semi-martingales (théorème de Dellacherie). La suite montre comment les propriétés des semi-martingales sont liées aux mesures qu'elles définissent : intégrabilité (3.4 bis), page 29, topologie sur l'espace $\mathcal{M}$ des semi-martingales (Emery) à (3.7), page 31. On étudie ensuite les sous-espaces importante de $\mathcal{M}$; $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}^c$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^\delta$, $\mathcal{M}^c$, (3.8 bis), page 32, les opérations $X \mapsto X^c$, $X \mapsto X^T$ (arrêt), le crochet $[\ ,\ ]$, à (3.10), page 34. Retour à l'intégrabilité (3.11), p. 35, avec critères ; cas de $\mathcal{V}$, $\mathcal{M}$, des semi-martingales spéciales (3.14), page 37. Cas des espaces H^p, (3.17), page 38.

Tout ce qui est traité dans ce paragraphe est connu, et le lien avec la théorie de la mesure vectorielle a déjà été fait par Bichteler [1]. Mais il est indispensable de rappeler tout cela pour bien comprendre ensuite les semi-martingales formelles. Sauf mention expresse du contraire, toutes les semi-martingales considérées seront supposées nulles au temps 0.

(3.0) On prend le plus souvent comme échelle du temps $[0,+\infty[$; par exemple le mouvement brownien n'est défini que pour $0 \leq t < +\infty$. On peut considérer soit des temps d'arrêt partout définis, variables aléatoires à valeurs dans $[0,+\infty[$, soit non partout définis, c-à-d. à valeurs dans $[0,+\infty]$. Par exemple, si A est une partie optionnelle de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, son début T a la valeur $T(\omega) = +\infty$, si $A(\omega) = \{t ; (t,\omega) \in A\}$ est vide. L'épigraphe fermé de T est alors l'intervalle stochastique $[T,+\infty[= \{(t,\omega) ; T(\omega) \leq t < +\infty\}$, son éprigraphe ouvert est $]T,+\infty[= \{t,\omega) ; T(\omega) < t < +\infty\}$, son graphe est $\{(t,\omega) ; t = T(\omega) < +\infty\}$. Je préfère prendre partout ici $[0,+\infty] = \overline{\mathbb{R}}_+$ comme échelle des temps. Dans ce cas, il y aura des temps d'arrêt partout définis, à valeurs dans $[0,+\infty]$, et d'autres non partout définis, à valeurs dans $[0,\overline{+\infty}]$, où $\overline{+\infty}$ est un temps rajouté, $> +\infty$, $[0,\overline{+\infty}] = [0,+\infty] \cup \{\overline{+\infty}\}$. Si $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, le début de A sera, ou bien partout défini, alors on prend $T(\omega) = +\infty$ si $A(\omega)$ est vide, ou bien non partout défini, $T(\omega) = \overline{+\infty}$ si $A(\omega)$ est vide ; sauf mention expresse du contraire, les temps d'arrêt seront à valeurs dans $[0,+\infty]$, c-à-d. partout définis. L'épigraphe fermé est toujours $[T,+\infty]$, l'épigraphe ouvert toujours $[T,+\infty[$, le graphe est toujours $\{(t,\omega) ; T(\omega) \leq t \leq +\infty\}$. Pour définir des propriétés locales (martingale locale, etc.), on considère une suite croissante $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de temps d'arrêt, qui, pour une échelle de temps $[0,+\infty[$, sont en général non partout définis, et tendent vers $+\infty$, non nécessairement stationnairement. Pour une échelle de temps $[0,+\infty]$, que nous prendrons toujours ici, les temps d'arrêt seront, sauf mention expresse du contraire, partout définis et convergeront stationnairement vers $+\infty$ (pour presque tout ω, $T_n(\omega) = +\infty$ pour n assez grand). Dans certains cas, qui seront explicitement spécifiés, les T_n sont à valeurs dans $[0,\overline{+\infty}]$, et tendent stationnairement vers $\overline{+\infty}$ pour $n \to +\infty$. Voici un cas où $\overline{+\infty}$ est utile : une proposition de P.A. Meyer, M [1], citée dans S [1],(8), avec des temps d'arrêt partout définis, s'énonce de façon meilleure avec $[0,\overline{+\infty}]$: si X est un processus, si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de temps d'arrêt à valeurs dans $[0,\overline{+\infty}]$, tendant stationnairement vers $\overline{+\infty}$, et si, dans chaque $[0,T_n[$, X est restriction d'une semi-martingale, X est une semi-martingale (sans l'hypothèse "X_∞ est $\mathcal{T}_\infty$-mesurable" faite dans S [1], avec $T_n \leq +\infty$). De même, dans S [1], lemme (2.3), page 10, S pourra avantageusement être pris à valeurs dans $[s,\overline{+\infty}]$; alors $[s,S_n|$ est toujours $[s,S_n[$, ce qui simplifie la démonstration.

(3.0 bis) Ainsi Ω sera un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{O}$, d'une probabilité λ sur $\mathcal{O}$, et d'une filtration $(\mathcal{T}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+=[0,+\infty]}$, famille de tribu λ-mesurables, λ-complètes, croissante et continue à droite ; on pourra prendre $\mathcal{T}_{\overline{+\infty}} = \mathcal{T}_{+\infty}$. La tribu optionnelle (resp. prévisible) de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ est définie par les épigraphes fermés (resp. ouverts) des temps d'arrêt, et les parties λ-négligeables (ou λ-évanescentes) ; $E = L^0(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$ sera l'espace des fonctions réelles sur Ω, mesurables, muni de la topologie de la convergence en probabilité. Une fois pour toutes, $\boldsymbol{\Omega}$ sera l'ensemble $]0,+\infty] \times \Omega$, $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ le tribu prévisible $\mathcal{P}$ré sur $\boldsymbol{\Omega}$, et Mes désignera l'ensemble Mes($\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\mathcal{O}}$,E) des mesures sur $(\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\mathcal{O}})$, à valeurs dans E. La raison pour laquelle nous prenons $]0,+\infty]$ au lieu de $[0,+\infty]$ est la suivante : les intégrales stochastiques seront $\int_{]0,t]}$; l'intégrale stochastique est nulle au temps 0 ; elle est égale à $f \bullet (X - X_0)$, on a donc toujours avantage à supposer $X_0 = 0$. Au lieu de se donner λ, on peut se donner seulement une classe Λ de probabilités (ou de mesures ≥ 0 finies) deux à deux équivalentes sur $(\Omega,\mathcal{O})$; l'espace $E = L^0(\Omega,\mathcal{O},\Lambda)$ est bien déterminé (vectoriellement et topologiquement), ainsi que les tribus optionnelles et prévisibles. Mais les jauges J_α sur E dépendent du choix de $\lambda \in \Lambda$, ainsi que les espaces $L^p(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$.

[On peut partout remplacer l'intervalle stochastique $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ par $[S,T]$, S et T temps d'arrêt, $S \leq T$. Comme $[S,T]$ est optionnel, la tribu optionnelle sur $[S,T]$ est évidente. La tribu prévisible, nécessaire pour l'intégration, a été prise sur $\Omega =]0,+\infty] \times \Omega$, pour éviter le temps 0 ; elle sera alors prise sur $]S,T]$, qui est prévisible. Les semi-martingales réelles ou vectorielles, étaient toujours, sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, nulles au temps 0 ; elles seront ici nulles en S ; on pourra prolonger X par $\overline{X}$, semi-martingale sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, par 0 dans $[0,S[$, X_T sur $[T,+\infty]$; si X est continue, nulle en S, $\overline{X}$ sera continue, nulle en 0. Les intégrales stochastiques seront prises à partir de S, $(h \bullet X)_t = \int_{]S,t]} h_s \, dX_s$, et $h \bullet X$ est encore une semi-martingale sur $[S,T]$, nulle en S. Tout ce qui a été énoncé sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ est alors vrai sur $[S,T]$. Par exemple, au § 3, $\mathcal{P}$ré $\mathcal{M}[S,T]$ sera l'espace des semi-martingales formelles X sur $[S,T]$, nulles en S, ou l'espace des semi-martingales formelles $\overline{X}$ sur $[0,+\infty] \times \Omega$, nulles sur $[0,S]$, arrêtées en T ; X est continue, ssi $\overline{X}$ l'est. Ceci dit, revenons à $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$.]

Si alors X est, par rapport à ce système, avec $\lambda \in \Lambda$, une semi-martingale réelle, ou plus généralement une λ-classe de semi-martingales (classe pour l'égalité λ-presque-partout), nulle au temps 0, elle définit une intégrale stochastique ; si φ est une fonction sur $]0,+\infty] \times \Omega$, prévisible bornée, on définit l'intégrale stochastique $\varphi \bullet X$, $(\varphi \bullet X)_t = \int_{]0,t]} \varphi_s \, dX_s$, qui est elle-même une Λ-classe de semi-martingales ; donc une application linéaire $\mu_X : \varphi \mapsto (\varphi \bullet X)_\infty = \int_{]0,+\infty]} \varphi_s \, dX_s$ de B$\mathcal{P}$ré dans $E = L^0$; et on sait que, si $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions prévisibles bornée, $\|\varphi_n\|_\infty \leq 1$, convergeant simplement vers 0, $(\varphi_n \bullet X)_\infty$ converge vers 0 dans L^0 (et même $\sup_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+} |(\varphi_n \bullet X)_t|$ converge vers 0 dans L^0)[(9)]. Donc $\varphi \mapsto (\varphi \bullet X)_\infty$ est une mesure bornée μ_X sur $(]0,+\infty] \times \Omega, \mathcal{P}\text{ré}) = (\mathbf{\Omega}, \mathbf{\mathcal{O}})$, à valeurs dans $E = L^0$, $\mu_X \in \mathrm{Mes}(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\mathcal{O}}; E) = \mathrm{Mes}$. Cette mesure possède les deux propriétés fondamentales suivantes :

(3.1)

1) Elle est adaptée (ou progressive) : si φ est portée par $]0,t] \times \Omega$ (c-à-d. si elle est nulle sur son complémentaire), $\mu_X(\varphi)$ est $\mathcal{T}_t$-mesurable ;

2) Elle est localisable : si φ est portée par $]0,+\infty] \times \Omega'$, $\Omega' \subset \Omega$, $\mu_X(\varphi)$ est portée par Ω' [(10)].

Elle a même bien des propriétés beaucoup plus fortes, mais nous ne les considérons pas ici. On sait aussi que X reste une semi-martingale pour toute $\lambda' \in \Lambda$ (Girsanov) et que l'intégrale stochastique ne dépend pas de λ'. On peut donc ne pas spécifier $\lambda \in \Lambda$ [(11)]. Ce qui est essentiel, c'est que la réciproque est vraie :

Théorème (3.2) : Si μ est une mesure $\in$ Mes, adaptée et localisable, il existe une Λ-classe de semi-martingales X unique (nulle au temps 0), telle que $\mu = \mu_X$.

Esquisse de la démonstration : L'idée de ce type de propriétés vient, je crois, de Pellaumail [1], puis de nombreux travaux de Pellaumail et Métivier. Cette réciproque est dûe à Dellacherie [(12)]. Le principe est le suivant. On remarque que, si l'on pose $X_t = \mu(]0,t] \times \Omega)$, $X_t \in \mathcal{T}_t$, et $t \mapsto X_t$ est continue à droite de $\overline{\mathbb{R}}_+$ dans L^0. Ensuite, par une technique de temps d'arrêt, $\sup_{t \in \mathbb{Q}_+} |X_t| < \infty$

Λ-ps ; on a donc là une variable M partout finie, et il existe $\lambda \in \Lambda$ pour laquelle cette variable aléatoire est intégrable. Alors, encore par continuité à droite, $|X_t| \leq M$ pour tout t, donc X est de la classe D pour λ, lorsqu'on se borne aux temps d'arrêt à nombre fini de valeurs. Ensuite, si Γ est l'espace vectoriel des fonctions, combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques d'ensembles de la forme $\Omega' \times]s,t]$, $\Omega' \in \mathcal{C}_s$, et si on munit Γ de la topologie de la convergence uniforme sur $]0,\infty] \times \Omega$, c-à-d. de la norme $\| \ \|_{+\infty}$, μ est une application linéaire continue de Γ dans L^0, mais $\mu(\Gamma)$ est contenue dans $L^1(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$. La démonstration de Dellacherie utilise alors un théorème de Maurey, de géométrie des Banach, qui prouve qu'il existe une nouvelle mesure $\lambda' \in \Lambda$, majorée par un multiple de λ, par rapport à laquelle X est une quasi-martingale, donc une D-quasi-martingale ; elle admet donc, par Pellaumail [13], une version semi-martingale cadlag X. Alors μ et μ_X coïncident sur Γ, mais sont toutes les deux des mesures sur $\mathcal{P}$ré, donc elles coïncident sur B$\mathcal{P}$ré,

<u>cqfd</u>.

<u>Remarque</u> : La démonstration de ce théorème dépend du théorème de Girsanov, car on trouve que X est une semi-martingale relativement à une certaine $\lambda' \in \Lambda$, donc, par Girsanov, pour toute mesure $\lambda \in \Lambda$.

<u>(3.3)</u> Il est donc bien évident qu'il devient intéressant de changer la définition des semi-martingales (et même il faudrait changer leur nom) : <u>une (Λ-classe de) semi-martingale(s) est une mesure</u> $\mu \in$ Mes, <u>adaptée et localisable, c-à-d. vérifiant (3.1)</u>. On en déduit tout de suite bien des propriétés des semi-martingales [14]. Ce n'est que très lentement que les probabilistes ont adopté cette définition (y compris moi-même), on s'en aperçoit par exemple au temps qu'il a fallu à la topologie d'Emery pour être adoptée. Voici des corollaires immédiats :

<u>Corollaire (3.3)</u> (Girsanov généralisé) : <u>Si</u> Λ' <u>est une classe de mesures équivalentes sur</u> Ω, <u>de base</u> Λ, <u>une semi-martingale</u> X <u>relative à</u> Λ <u>l'est a for-</u>

tiori relativement à Λ'.

Démonstration : La tribu $\mathcal{P}ré(\Lambda')$ est engendrée par la tribu $\mathcal{P}ré(\Lambda)$ et les parties Λ'-négligeables. Soit φ' prévisible (Λ') ; il existe φ prévisible (Λ), Λ'-pp. égale à φ'. On peut donc considérer $\mu_X(\varphi) \in L^0(\Omega,\mathcal{O},\Lambda)$ et prendre sa classe dans $L^0(\Omega,\mathcal{O},\Lambda')$, qui ne dépend pas du choix de φ, à cause de la localisation (3.1), 2 ; on définit ainsi une application linéaire de $B\mathcal{P}ré(\Lambda')$ dans $L^0(\Omega,\mathcal{O},\Lambda')$, qui vérifie évidemment (3.1), donc définit une mesure $\in$ Mes$(]0,+\infty] \times \Omega, \mathcal{P}ré(\Lambda'), L^0(\Omega,\mathcal{O},\Lambda'))$, donc une semi-martingale X' relative à Λ' ; on a $X'_t = \mu_X(]0,t] \times \Omega) = X_t$, donc X est bien une semi-martingale pour Λ', cqfd.

On démontre de la même manière le théorème de remplacement de la famille $(\mathcal{T}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$ par une famille plus petite $(\mathcal{S}_t)_{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}$, si X est adaptée pour cette famille (15), le théorème d'adjonction aux $\mathcal{T}_t$ des ensembles d'une partition dénombrable de Ω (15), le théorème de convexité de Jacod (16), qui sont tous des théorèmes spécialement adaptés à la définition des semi-martingales comme mesures sur la tribu prévisible.

(3.4) Parfois on confondra X et μ_X, parfois on les distinguera soigneusement, car X est une "primitive" de μ_X (comme une fonction à variation finie F sur $\mathbb{R}$ est la primitive de la mesure $dF = \mu$ qu'elle définit) : $X_t = \mu_X(]0,T] \times \Omega)$. On écrira aussi dX au lieu de μ_X.

(3.4 bis) On a beaucoup écrit sur l'intégrabilité d'une fonction f sur $]0,+\infty] \times \Omega$ par rapport à une semi-martingale. En réalité, on n'a pas le choix, puisque dX est une mesure sur $(]0,+\infty] \times \Omega, \mathcal{P}ré)$ à valeurs dans $L^0(\Omega,\mathcal{O},\Lambda)$; on appliquera (1.8 bis) ou (1.10).

On démontre facilement que f est sûrement dX-intégrable si d'une part elle est dX-mesurable, si d'autre part, pour une $\lambda \in \Lambda$ choisie, il existe une décomposition $X = V + M$, V processus adapté à variation finie, M λ-martingale locale, tels que

$$(3.5)\quad \begin{cases} \int_{]0,+\infty]} |f_s|\ |dV_s| < +\infty \ \text{ps.} \\ \int_{]0,+\infty]} |f_s^2|\ d[M,M]_s < +\infty \ \text{ps. et } (f^2 \bullet [M,M])^{1/2} \\ \text{est localement intégrable.} \end{cases}$$

Alors on calcule $f \bullet V$, pour chaque ω, comme une intégrale de Stieltjes, et $f \bullet V$ est adaptée à variation finie ; et $f \bullet M$ est une martingale locale. On remarquera que $L^0 = E$ est un C-espace (1.8 ter), donc f est dX-intégrable, ssi elle est dX-mesurable, et, pour $\lambda \in \Lambda$ choisie, $(\mu_X)^*_\alpha(|f|) < +\infty$ pour tout α ; pour f prévisible, cela veut simplement dire que l'ensemble des $(\varphi \bullet X)_\infty$, $\varphi \in B\mathcal{P}ré$, $|\varphi| \leq |f|$, est borné dans $E = L^0$.

(3.6) Il peut être plus agréable de considérer partout $\varphi \bullet X$ plutôt que $(\varphi \bullet X)_\infty$. La mesure $\tilde{\mu}_X$ (voir (1.11)) est définie par $\tilde{\mu}_X(\varphi) = \varphi\mu_X$, c'est la mesure $\psi \mapsto (\varphi\mu_X)(\psi) = \mu_X(\varphi\psi) = (\varphi\psi \bullet X)_\infty = (\psi \bullet (\varphi \bullet X))_\infty = \mu_{\varphi \bullet X}$, donc $\tilde{\mu}_X(\varphi) = \mu_{\varphi \bullet X}$, mesure cette fois sur $(]0,+\infty] \times \Omega, \mathcal{P}ré)$ à valeurs dans Mes, mais en fait dans le sous-espace $\mathcal{S}\mathcal{M}$ des semi-martingales (muni de la topologie induite par Mes). On pourra donc toujours, au lieu de considérer $\mu_X : \varphi \mapsto (\varphi \bullet X)_\infty \in L^0$, considérer $\tilde{\mu}_X : \varphi \mapsto \varphi \bullet X \in \mathcal{S}\mathcal{M}$. Comme l'intégrabilité est la même pour μ_X et pour $\tilde{\mu}_X$, on voit que $\int_{]0,+\infty]} f_s\, dX_s$ a un sens si et seulement si $f \bullet X$ a un sens, si et seulement si f est μ_X ou $\tilde{\mu}_X$-intégrable. Le fait que, si h est dX-intégrable, f est $d(h \bullet X)$-intégrable ssi fh est dX-intégrable, et qu'alors $h \bullet (f \bullet X) = hf \bullet X$, est simplement la propriété générale (1.10). On ne sait pas si $\mathrm{Mes}(\Omega,\mathcal{O};E)$ est un C-espace quand E est un C-espace. Mais de toute façon, puisque f est $\tilde{\mu}_X$-intégrable ssi elle est μ_X-intégrable, et que $\tilde{\mu}^*_\alpha(|f|) = \mu^*_\alpha(|f|)$, on peut dire aussi que, pour f prévisible, f est μ_X-intégrable ssi l'ensemble des $\varphi \circ X$, pour $B\mathcal{P}ré$, $|\varphi| \leq f$, est borné dans $\mathcal{S}\mathcal{M} \subset$ Mes.

(3.6 bis) Notons que dX admet une mesure $\mu \geq 0$ équivalente : si $\lambda \in \Lambda$ est choisie de manière que X soit une semi-martingale H^2, $X = V + M$, $V \in \mathcal{V}^{\text{pré}}$, $M \in \mathcal{M}$, alors $A \subset \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ prévisible est dX-négligeable ssi $1_A \bullet V = 0$, et $1_A \bullet M$ ou $1_A \bullet [M,M] = 0$, ou $\mu(A) = 0$, avec μ mesure réelle ≥ 0 sur $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, \mathcal{P}ré)$ définie par

$$\mu(\varphi) = \mathbb{E}_\lambda \left(\int_{]0,+\infty]} \varphi_s \, |dV_s| + \int_{]0,+\infty]} \varphi_s \, d[M,M]_s \right) .$$

C'est en fait sans rapport avec la théorie des semi-martingales. Toute mesure à valeurs dans un Banach admet une mesure ≥ 0 équivalente (17). Mais une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{O})$ à valeurs dans $E = L^0(\Omega, \mathcal{O}, \lambda)$, est d'abord une application linéaire continue de $B\mathcal{O}$ dans L^0, et $B\mathcal{O}$ est isométrique à un espace $C(K)$; donc elle factorise par une application linéaire continue de $B\mathcal{O}$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{O}, \lambda)$, et la multiplication par une fonction $\alpha \in L^0(\Omega, \mathcal{O}, \lambda)$ (18) ; si on remplace λ par la mesure équivalente $\lambda' = \frac{\lambda}{1+\alpha^2}$, on voit que μ est linéaire continue de $B\mathcal{O}$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{O}, \lambda')$. Si ensuite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 dans $B\mathcal{O}$, $\|\varphi_n\|_\infty \leq 1$, $\mu(\varphi_n)$ est bornée dans $L^2(\Omega, \mathcal{O}, \lambda')$ et converge vers 0 dans $L^0(\Omega, \mathcal{O}, \lambda')$, donc, par Hölder, converge vers 0 dans $L^{2-\varepsilon}(\Omega, \mathcal{O}, \lambda')$, $\varepsilon > 0$. Donc μ est une mesure à valeurs dans un Banach $L^{2-\varepsilon}(\Omega, \mathcal{O}, \lambda')$, d'injection continue dans $L^0(\Omega, \mathcal{O}, \lambda)$, donc admet une mesure ≥ 0 équivalente.

(3.7) La topologie d'Emery, pour l'espace $\mathcal{S}\mathcal{M}$ des semi-martingales est la topologie induite par Mes. Comme $\mathcal{S}\mathcal{M}$ est trivialement (condition (3.1)) fermé dans Mes, $\mathcal{S}\mathcal{M}$ est un espace vectoriel topologique métrisable complet ; si on a choisi $\lambda \in \Lambda$ donc les jauges J_α sur $L^0(\Omega, \mathcal{O}, \lambda)$, il est défini par les jauges $\| \ \|_\alpha$, où $\|\mu_X\|_\alpha = (\mu_X)^*_\alpha(1) = \underset{\substack{\varphi \in B\mathcal{P}ré \\ \|\varphi\|_\infty \leq 1}}{\text{Sup}} = J_\alpha((\varphi \bullet X)_\infty)$. Emery introduit aussi l'espace $\mathcal{S}^0$ des (Λ-classes de) processus réels cadlag, muni de la topologie définie par les jauges $f \mapsto J_\alpha(f^*) = J_\alpha(\underset{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}{\text{Sup}} |f_t|)$ qui est aussi métrisable complet (f_n converge vers 0 sans $\mathcal{S}^0$ si f_n^* converge vers 0 dans L^0). Bien évidemment, si X est une semi-martingale, $J_\alpha(X^*) \geq J_\alpha(X_\infty)$; mais
$J_\alpha(X^*) \leq \underset{\substack{\varphi \in B\mathcal{P}ré \\ \|\varphi\|_\infty \leq 1}}{\text{Sup}} J_\alpha((\varphi \bullet X)_\infty) = (\mu_X)^*_\alpha(1)$. En effet, supposons $(\mu_X)^*_\alpha(1) \leq R$. Soit

$T = \mathrm{Inf}\{t \in \mathbb{R}_+ \ ; \ |X_t| > R\}$. Alors

$$\lambda\{X^* > R + \varepsilon\} \leq \lambda\{|X_T| > R\} = \lambda\{|(1_{]0,T]} \bullet X)_\infty| > R\} \leq \alpha \quad ;$$

donc, ε étant > 0 arbitraire,

$$\lambda\{X^* > R\} \leq \alpha \ , \quad \text{ou} \quad J_\alpha(X^*) \leq R \quad ;$$

donc $$J_\alpha(X^*) \leq (\mu_X)^*_\alpha(1) \quad .$$

(3.8) Donc la topologie de $\mathcal{SM}$ est indifféremment celle de la convergence dans $\mathcal{L}_b(\mathrm{B}\mathcal{P}\mathrm{r\acute{e}};L^0)$ (pour $\varphi \mapsto (\varphi \bullet X)_\infty$), ou de $\mathcal{L}_b(\mathrm{B}\mathcal{P}\mathrm{r\acute{e}};\mathrm{Mes}$ ou $\mathcal{SM})$ (pour $\varphi \mapsto \varphi \bullet X$), ou de $\mathcal{L}_b(\mathrm{B}\mathcal{P}\mathrm{r\acute{e}};\ \mathcal{S}^0)$ (pour $\varphi \mapsto \varphi \bullet X$). En prenant $\varphi = 1$, $1 \bullet X = X$, ou simplement par (3.7), $\mathcal{SM}$ est plus fine que $\mathcal{S}^0$. Il résulte de (1.12) que, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 simplement, avec $\|\varphi_n\|_\infty \leq 1$, et si X_n converge vers X dans $\mathcal{SM}$, $\varphi_n \bullet X_n$ converge vers $\varphi \bullet X$ dans $\mathcal{SM}$.

(3.8 bis) Emery a montré de remarquables propriétés de la topologie $\mathcal{SM}$. Choisissons une fois pour toutes $\lambda \in \Lambda$. Appelons $\mathcal{V}$ l'espace des processus adaptés à variation finie, $\mathcal{M}$ l'espace des martingales locales, $\mathcal{SM}^c$, $\mathcal{V}^c$, $\mathcal{M}^c$ l'espace des processus de $\mathcal{SM}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{M}$, qui sont continus ; $\mathcal{SM}^c$ est trivialement fermé dans $\mathcal{SM}$. L'espace $\mathcal{V}$ est muni d'une topologie trivialement plus fine que la topologie induite par $\mathcal{SM}$, définie, pour $\lambda \in \Lambda$, par les jauges $V \mapsto J_\alpha(\int_{]0,+\infty]} |dV_s|)$; il est métrisable complet ; bien sûr $\mathcal{V}^c$ aussi sera muni de cette topologie et il est fermé dans $\mathcal{V}$. Pour une martingale locale M, appelons $\delta(M)$ le sup. Λ-essentiel des discontinuités de M ; appelons $\mathcal{M}^\delta$ l'espace des martingales locales à sauts bornés, et munissons-le de la topologie définie par les jauges (pour $\lambda \in \Lambda$ choisi) $M \mapsto \delta(M) + J_\alpha([M,M]_\infty^{1/2})$. Cette topologie est plus fine que la topologie induite par $\mathcal{SM}$, et le rend métrisable et complet ; elle est aussi définie par la famille de jauges équivalentes $M \mapsto \delta(M) + J_\alpha(M^*)$. [Emery montre ces propriétés par la méthode très féconde des arrêts à T_-. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers 0 dans $\mathcal{M}^\delta$: $\delta(M_n)$ tend vers 0, et $[M_n,M_n]^{1/2}$ tend vers 0 dans L^o. On peut extraire une suite partielle $\overline{M}_n$ telle que $[\overline{M}_n,\overline{M}_n]_\infty^{1/2}$ tende vers 0 Λ-ps. Posons $T_k = \mathrm{Inf}\{t;\ \exists\ n$ tel que $[\overline{M}_n,\overline{M}_n]_t^{1/2} \geq k\}$; $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de temps d'arrêt, convergeant stationnairement vers $+\infty$. Fixons k ; alors $[\overline{M}_n,\overline{M}_n]_{T_k-}^{1/2}$ tend vers 0 Λ-ps., mais est majorée par k ; puisque $\delta(\overline{M}_n)$ tend vers 0, $[\overline{M}_n,\overline{M}_n]_{T_k}^{1/2}$ converge vers 0, en restant bornée, donc, pour $\lambda\in\Lambda$ choisie, $(\overline{M}_n)^{T_k}$ converge vers 0 dans l'espace des martingales H^2. Mais alors $[\varphi\cdot\overline{M}_n,\varphi\cdot\overline{M}_n]_{T_k}^{1/2}$ tend aussi vers 0 dans cet espace, donc $(\varphi\cdot\overline{M}_n^{T_k})_\infty$ vers 0 dans $L^2(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$, uniformément pour $\varphi\in\mathcal{P}$ré, $\|\varphi\|_\infty\leq 1$; donc $\overline{M}_n^{T_k}$ tend vers 0 dans $\mathcal{S}\mathcal{M}$; ceci étant vrai pour tout k, $\overline{M}_n$ tend vers 0 dans $\mathcal{S}\mathcal{M}$, donc aussi M_n, donc $\mathcal{M}^\delta$ est plus fine que $\mathcal{S}\mathcal{M}$. En outre, $(\overline{M}_n^{T_k})^*$ converge vers 0 dans L^2 donc dans L^o, et, k étant quelconque, $\overline{M}_n$ converge vers 0 pour la topologie des jauges $M\mapsto J_\alpha(M^*)$; donc aussi la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tout entière, et le même raisonnement, fait en sens inverse, montre que les familles de jauges $M\mapsto\delta(M)+J_\alpha([M,M]_\infty^{1/2})$, $M\mapsto\delta(M)+J_\alpha(M^*)$, sont équivalentes. Il résulte de cela que, pour tout α, il existe $\beta\dot{<}\alpha$ et C tels que $J_\alpha(M^*)\leq C(\delta(M)+J_\beta([M,M]_\infty^{1/2}))$, $J_\alpha([M,M]_\infty^{1/2})\leq C(\delta(M)+J_\beta(M^*))$; la méthode utilisée donne un moyen pour estimer C, β, en fonction de α. Le fait que $\mathcal{M}^\delta$ soit complet se montre de la même manière : si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe une suite partielle $(\overline{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_n [\overline{M}_{n+1}-\overline{M}_n]^* < +\infty$ ps. ; alors $\overline{M}_n$ a une limite M, pour Λ-presque tout ω, uniformément en t ; on peut trouver une suite de T_k comme ci-dessus, permettant de se ramener à l'espace des martingales H^2, qui est complet. Notons que sur l'espace $\mathcal{M}$ des martingales locales, les familles des jauges $J_\alpha([M,M]_\infty^{1/2})$ et $J_\alpha(M^*)$ ne sont pas équivalentes et ne rendent pas $\mathcal{M}$ complet.]

<u>(3.9)</u> Ensuite toute semi-martingale X admet une décomposition $X=V+M$, $V\in\mathcal{V}$, $M\in\mathcal{M}^\delta$, donc $(V,M)\mapsto V+M$ est une surjection linéaire continue de $\mathcal{V}\oplus\mathcal{M}^\delta$, sur $\mathcal{S}\mathcal{M}$ (19), donc, par le théorème du graphe fermé, $\mathcal{S}\mathcal{M}$ est le quotient de $\mathcal{V}\otimes\mathcal{M}^\delta$ défini par cette surjection. Cela signifie que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

dans $\mathcal{SM}$ si et seulement s'il existe des décompositions $X_n = V_n + M_n$, où V_n converge vers 0 dans $\mathcal{V}$, M_n dans $\mathcal{M}^\delta$.

<u>(3.9 bis)</u> <u>Par ailleurs les sous-espaces</u> $\mathcal{V}^c$, $\mathcal{M}^c$, $\mathcal{SM}^c$ <u>sont évidemment fermés dans</u> $\mathcal{V}$, $\mathcal{M}^\delta$, $\mathcal{SM}$, <u>donc complets</u> (la topologie de $\mathcal{M}^c$ est définie par les jauges, pour $\lambda \in \Lambda$ choisi, $M \mapsto J_\alpha([M,M]_\infty^{1/2})$ ou $J_\alpha(M^*)$). Mais ici $(V,M) \mapsto V + M$ est linéaire continue bijective de $\mathcal{V}^c \oplus \mathcal{M}^c$ sur $\mathcal{SM}^c$, donc c'est un isomorphisme par Banach ; $\mathcal{V}^c$ et $\mathcal{M}^c$ sont fermés dans $\mathcal{SM}^c$ (lui-même fermé dans $\mathcal{SM}$), et les topologies propres de $\mathcal{V}^c$ et $\mathcal{M}^c$ sont induites par $\mathcal{SM}^c$ ou $\mathcal{SM}$. (Par contre, $\mathcal{V}$ <u>et</u> $\mathcal{M}$ <u>ou</u> $\mathcal{M}^\delta$ <u>ne sont pas fermés dans</u> $\mathcal{SM}$.) Plus généralement, si $\mathcal{V}^{pré}$ est l'espace des processus à variation finie prévisibles, il est fermé dans $\mathcal{V}$ et dans $\mathcal{SM}$, et sur lui les topologies $\mathcal{V}$ et $\mathcal{SM}$ coïncident. [Ces deux affirmations sont équivalentes par Banach. Il suffit de montrer que $\mathcal{V}$ est moins fine que $\mathcal{SM}$ sur $\mathcal{V}^{pré}$. Soit $V \in \mathcal{V}^{pré}$; il existe W, processus croissant prévisible associé, $W_t = \int_{]0,t]} |dV_s|$, $W \in \mathcal{V}^{pré}$, et $\varphi \in B\mathcal{P}ré$, prenant seulement les valeurs ± 1, telle que $W = \varphi \bullet V$; alors $W_\infty = (\varphi \bullet V)_\infty$, donc $J_\alpha(W_\infty) \le \sup_{\substack{\psi \in B\mathcal{P}ré \\ \|\psi\|_\infty \le 1}} J_\alpha((\psi \bullet V)_\infty) = (\mu_V)^*_\alpha(1)$.]

<u>L'espace</u> $\mathcal{SM}^{pré}$ <u>des semi-martingales prévisibles est d'ailleurs évidemment fermé dans</u> $\mathcal{SM}$, et on a la décomposition en somme directe (toute semi-martingale prévisible étant spéciale) $\mathcal{SM}^{pré} = \mathcal{V}^{pré} \oplus \mathcal{M}^c$. Alors $(V,M) \mapsto V + M$ est une bijection linéaire continue de $\mathcal{V}^{pré} \times \mathcal{M}^c$ sur $\mathcal{SM}^{pré}$ complet, ce qui reprouve, par le théorème de l'isomorphisme de Banach, que tous ces espaces sont fermés, et que, sur $\mathcal{V}^{pré}$, les topologies induites par $\mathcal{V}$ et $\mathcal{SM}$ coïncident. Bien évidemment, l'espace $\mathcal{SM}^{acc}$ des semi-martingales accessibles est aussi fermé dans $\mathcal{SM}$, mais je ne pense pas que l'espace $\mathcal{V}^{acc}$ des processus à variation finie accessibles soit fermé dans $\mathcal{SM}$, ni que, sur lui, les topologies induites par $\mathcal{V}$ et $\mathcal{SM}$ coïncident, ni qu'il y ait une décomposition $\mathcal{SM}^{acc} = \mathcal{V}^{acc} \oplus \mathcal{M}^c$, mais nous verrons à (4.6) que c'est vrai pour les semi-martingales formelles.

<u>(3.10)</u> Toujours d'après Emery, $X \mapsto X^c$ (composante martingale locale continue) est linéaire continue de $\mathcal{SM}$ dans $\mathcal{M}^c$. [D'après (3.9), il suffit de montrer que

$M \mapsto M^c$ est continue de $\mathcal{M}^\delta$ dans $\mathcal{M}^c$. Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $\mathcal{M}^\delta$, il existe une suite partielle $(\overline{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt, croissante et tendant stationnairement vers $+\infty$, telles que $(\overline{M}_n^{T_k})_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout k, converge vers 0 dans l'espace des martingales H^2 ; alors $(\overline{M}_n^c)^{T_k}$ aussi, donc $(\overline{M}_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathcal{M}^c$; donc aussi $(M_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$.] Et $(X,Y)\mapsto[X,Y]$ est bilinéaire continue de $\mathcal{SM}\times\mathcal{SM}$ dans $\mathcal{V}$ [d'après (3.9) il suffit de montrer qu'elle l'est de $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}\times\mathcal{M}^\delta$ dans $\mathcal{V}$, $\mathcal{M}^\delta\times\mathcal{M}^\delta$ dans $\mathcal{V}$. La première assertion est évidente, la 2ème et la 3ème se prouvent toujours par la même technique de temps d'arrêt remplaçant $\mathcal{M}^\delta$ par H^2].

<u>(3.11)</u> Si $V\in\mathcal{V}$, et si f est dV-intégrable, $f\bullet V$ n'est pas nécessairement à variation finie. [Par exemple, si V est une martingale à variation finie, il suffit, pour que f prévisible soit dV-intégrable, par (3.5), que $\sum_s |f_s|^2\Delta V_s^2<+\infty$ ps. ; cela n'entraîne pas que $\sum_s |f_s|\,|dV_s|<+\infty$ ps.] Mais :

<u>(3.11 bis)</u> f <u>prévisible est</u> dV-<u>intégrable</u>, <u>et</u> $f\bullet V$ <u>est à variation finie</u>, <u>si et seulement si</u> $\int_{]0,+\infty]}|f_s|\,|dV_s|<+\infty$ ps. ; <u>alors</u> $f\bullet V$ <u>se calcule par intégration de Stieltjes pour tout</u> ω . <u>Si</u> $V\in\mathcal{V}$ <u>est prévisible</u>, f <u>est</u> dV-<u>intégrable ssi</u> $\int_{]0,+\infty]}|f_s|\,|dV_s|<+\infty$ <u>ps.</u>, <u>et</u> $f\bullet V$ <u>est à variation finie et prévisible</u> ; <u>si</u> V <u>est croissante</u>, f <u>est</u> dV-<u>intégrable ssi</u> $\int_{]0,+\infty]}|f_s|\,dV_s<+\infty$ ps.

<u>Démonstration</u> : L'une des implications est évidente, montrons l'autre ; supposons donc f prévisible dV-intégrable et $f\bullet V$ à variation finie. On a $(1_{|f|\le n}f)\bullet V=1_{|f|\le n}\bullet(f\bullet V)$, donc, $f\bullet V$ étant à variation finie, $\int_{]0,+\infty]}(1_{|f_s|\le n}|f_s|)|dV_s|$ est borné dans $L^0_+(\Omega,\mathcal{O};\Lambda)$ pour $n\in\mathbb{N}$; donc $\int_{]0,+\infty]}|f_s|\,|dV_s|<+\infty$ ps. Le cas V prévisible s'obtient en choisissant $\varphi\in B\mathcal{P}$ré, ne prenant que les valeurs ±1, telle que, si $W_t=\int_{]0,t]}|dV_s|$, $|f|\bullet W=f\varphi\bullet V$; donc $|f|$ est dW-intégrable, avec W croissante et $|f|\ge0$, ce qui ramène au cas croissant. Alors les $(|f|\,1_{|f|\le n}\bullet W)_\infty$ doivent être bornés dans L^0 pour $n\in\mathbb{N}$; donc $\int_{]0,+\infty]}|f_s|\,dW_s<+\infty$ ps.

<u>(3.12)</u> Si M est une martingale locale, f dM-intégrable, $f \cdot M$ n'est pas nécessairement une martingale locale. [Par exemple, si M est une martingale à variation finie, et si $\int_{]0,+\infty]} |f_s|\,|dM_s| < +\infty$ ps., f est dM-intégrable ; donc $\sum_s |f_s|\,|\Delta M_s| < +\infty$ ps., a fortiori $\sum_s |f_s|^2\,\Delta M_s^2 < +\infty$ ps., mais cela n'entraîne pas forcément que $(\sum_{s\le\cdot} |f_s|^2\,\Delta M_s^2)^{1/2}$ soit localement intégrable.] Mais :

<u>(3.12 bis)</u> f <u>prévisible est</u> dM-<u>intégrable et</u> $f \cdot M$ <u>est une martingale locale</u>, <u>ssi</u> $\int_{]0,+\infty]} |f_s|^2\, d[M,M]_s < +\infty$ <u>ps. et</u> $(f^2 \cdot [M,M])^{1/2}$ <u>est localement intégrable</u>. <u>Si</u> M <u>est continue</u>, f <u>est</u> dM-<u>intégrable ssi</u> $\int_{]0,+\infty]} |f_s|^2\, d[M,M]_s < +\infty$ <u>ps. et</u> $f \cdot M$ <u>est une martingale locale continue</u>.

<u>Démonstration</u> : L'implication dans un sens est évidente, montrons l'autre. Soit donc f dM-intégrable, et $f \cdot M$ martingale locale. Alors elle est localement H^1, donc $[f \cdot M, f \cdot M]_\infty^{1/2}$ est localement intégrable ; or c'est $f^2 \cdot [M,M]_\infty^{1/2}$. Le cas M continue se règle en remarquant que $f \cdot M$ est limite dans $\mathcal{S}\mathcal{M}$, des $f\,1_{|f|\le n} \cdot M \in \mathcal{M}^c$, et que $\mathcal{M}^c$ est fermé dans $\mathcal{S}\mathcal{M}$.

<u>(3.13)</u> Si $X \cdot Y$ sont des semi-martingales, f, g des fonctions prévisibles sur $]0,+\infty] \times \Omega$, f est dX-intégrable, g dY-intégrable, f^2 est d[X,X]-intégrable, g^2 est d[Y,Y]-intégrable, fg est $|d[X,Y]|$-intégrable, et $[f \cdot X\,,\, g \cdot Y] = fg \cdot [X,Y]$; on a Kunita-Watanabé :

$$\int_{]0,t]} |f_s\, g_s|\, |d[X,Y]_s| \le \left(\int_{]0,t]} f_s^2\, d[X,X]_s\right)^{1/2} \left(\int_{]0,t]} g_s^2\, d[Y,Y]_s\right)^{1/2} .$$

[On passe à la limite, par (3.10), à partir des $f\,1_{|f|\le n}$, $g\,1_{|g|\le n}$.]

<u>Proposition (3.14)</u> : <u>Soit</u> X <u>une semi-martingale spéciale</u>, $X = V + M$ <u>sa décomposition canonique</u>, V <u>à variation finie prévisible</u>, M <u>martingale locale</u>. <u>Alors</u> f <u>est</u> dX-<u>intégrable et</u> $f \cdot X$ <u>spéciale</u>, <u>si et seulement si</u> f <u>est</u> dV-<u>intégrable</u> (<u>et</u> $f \cdot V$ <u>à variation finie prévisible</u>, <u>par (3 11 bis))</u>, <u>et</u> f dM-<u>intégrable et</u>

$f \bullet M$ martingale locale (voir (3.12 bis)) ; alors la décomposition canonique de $f \bullet X$ est $f \bullet X = f \bullet V + f \bullet M$.

Démonstration : On peut supposer f prévisible. C'est évident dans un sens, montrons l'autre : soit f dX-intégrable, et $f \bullet X$ spéciale. Soit $\gamma > \sigma$ prévisible bornée, telle que γf soit bornée. Soit $f \bullet X = W + N$ la décomposition canonique de $f \bullet X$; alors celle de $\gamma f \bullet X = \gamma \bullet (f \bullet X)$ est indifféremment $\gamma f \bullet V + \gamma f \bullet M$ et $\gamma \bullet W + \gamma \bullet N$. Donc $\gamma f \bullet V = \gamma \bullet W$, $\gamma f \bullet M = \gamma \bullet N$. Mais 1 est dW-intégrable, donc $\frac{1}{\gamma}$ est $d(\gamma \bullet W)$-intégrable, donc aussi $d(\gamma f \bullet V)$-intégrable, donc $f = \frac{1}{\gamma}\gamma f$ est dV-intégrable, et $f \bullet V = \frac{1}{\gamma} \bullet (\gamma f \bullet V) = \frac{1}{\gamma} \bullet (\gamma \bullet W) = W$ est à variation finie prévisible. De même 1 est dN-intégrable, donc $\frac{1}{\gamma}$ est $d(\gamma \bullet N)$-intégrable, donc aussi $d(\gamma f \bullet M)$-intégrable, donc $f = \frac{1}{\gamma}\gamma f$ est dM-intégrable, et $f \bullet M = \frac{1}{\gamma} \bullet (\gamma f \bullet M) = \frac{1}{\gamma} \bullet (\gamma \bullet N) = N$ est une martingale locale.

Corollaire (3.15) (Yan Jia-An[35]). (Réciproque de (3.5)) : Si f est prévisible et dX-intégrable, il existe une décomposition $X = V + M$, V à variation finie, M martingale locale, telle que f soit dV-intégrable et $f \bullet V$ à variation finie (3.11 bis), et que f soit dM-intégrable et $f \bullet M$ martingale locale (3.12 bis).

Démonstration : Soient $T_o, T_1, \ldots, T_n, \ldots$ les temps d'arrêt, $T_n \geq T_{n-1}$, $T_n = \text{Inf}\{t > T_{n-1} \,;\, |\Delta X_t| \geq 1 \text{ ou } |f_t \Delta X_t| \geq 1\}$. Alors $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît et tend stationnairement vers $+\infty$. Si on pose $X = \Sigma\, 1_{t\geq T_n} 1_{T_n > T_{n-1}} \Delta X_{T_n} + Y$; forcément f est intégrable par rapport au processus de sauts, donc dY-intégrable ; mais les sauts de Y et de $f \bullet Y$ sont de module ≤ 1, donc Y et $f \bullet Y$ sont des semi-martingales spéciales, d'où le résultat par (3.14).

(3.16) Emery a enfin montré (cela résulte de la formule d'Itô) que, si $C^2(F;G)$ est l'espace des applications de classe C^2 d'un espace vectoriel de dimension finie F dans un autre G, nulles au temps 0, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des fonctions et de leurs dérivées d'ordre ≤ 2, l'application $(\Phi, X) \mapsto \Phi(X)$ est continue de $C^2(F;G) \times \mathcal{S}\mathcal{M}(F)$ dans $\mathcal{S}\mathcal{M}(G)$ (où $\mathcal{S}\mathcal{M}(F)$ est l'espace des semi-martingales à valeurs dans F). Ici

<u>il importe de distinguer</u> le processus X, et la mesure dX : $\Phi(X)$ n'a <u>rien à voir</u> avec une image de dX par Φ, et Itô compare $d(\Phi(X))$ et dX [20]. Ceci permet de passer aux semi-martingales à valeurs dans une variété V. On ne peut plus alors imposer $X_0 = 0$, 0 n'ayant pas de sens pour une variété. Mais bien évidemment on peut topologiser l'espace des semi-martingales réelles ou vectorielles non nécessairement nulles au temps 0 par la somme directe $L^0(\Omega, \mathcal{T}_0, \Lambda) \oplus \mathcal{S}\mathcal{M}$, $X = X_0 + (X - X_0)$; on appellera encore sans danger, dans ce n° (3.16), $\mathcal{S}\mathcal{M}$ l'espace de toutes les semi-martingales, nulles ou non au temps 0. Alors on déduit aisément du résultat d'Emery que, si $C^2(V;W)$ est l'espace des applications C^2 d'une variété V de classe C^2 dans une autre W, et si on topologise l'espace $\mathcal{S}\mathcal{M}(V)$ des semi-martingales à valeurs dans V par un plongement de V dans un espace vectoriel, $(\Phi, X) \mapsto \Phi(X)$ est continue de $C^2(V;W) \times \mathcal{M}(V)$ dans $\mathcal{S}\mathcal{M}(W)$.

<u>(3.17)</u> <u>Les espaces</u> H^p <u>de semi-martingales</u>, $0 \leq p < +\infty$ [21].

Soit $1 \leq p < +\infty$. <u>On appelle</u> $H^p(\Omega, \mathcal{O}, \lambda, (\mathcal{T}_t)_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+}) = H^p$ <u>(ici</u> $\lambda \in \Lambda$ <u>est choisie)</u> <u>l'espace des semi-martingales réelles</u> X <u>admettant une décomposition</u> $X = V + M$, <u>où</u> V <u>est à variation</u> L^p, $(\mathbb{E}(\int_{]0,+\infty]} |dV_s|)^p)^{1/p} < +\infty$, <u>et où</u> M <u>est une martingale</u> H^p, $[M,M]_\infty^{1/2} \in L^p(\Omega, \mathcal{O}, \lambda)$, <u>équivalent à</u> $M^* \in L^p$. Cet espace H^p est un Banach pour la norme

$$(3.18) \qquad \|X\|_{H^p} = \operatorname*{Inf}_{X=V+M} \left(\mathbb{E}\left(\left(\int_{]0,+\infty]} |dV_s|\right)^p + [M,M]_\infty^{p/2}\right)\right)^{1/p} .$$

Remarquons que $X \in H^p$ est une semi-martingale spéciale, et la norme peut, à une équivalence près, se calculer sur la décomposition canonique $X = V + M$, où V est prévisible. Le théorème suivant est dû à Marc Yor [22] :

<u>(3.19)</u> Soit X une semi-martingale. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes [23] :

$$(3.19\ \mathrm{bis})\begin{cases} 1) & X \in H^p \ ; \\ 2) & \underline{\text{Pour toute}}\ \varphi \in B\mathcal{P}ré,\ (\varphi \bullet X)_\infty \in L^p \ ; \\ 3) & dX = \mu_X\ \underline{\text{est une mesure sur}}\ (]0,+\infty] \times \Omega, \mathcal{P}ré)\ \underline{\text{à valeurs dans}} \\ & L^p(\Omega,\mathcal{O},\lambda). \end{cases}$$

On peut donc dire que H^p est l'espace des mesures sur $(]0,+\infty] \times \Omega, \mathcal{P}ré)$ à valeurs dans L^p, adaptées et localisables (3.1). Bien entendu, le théorème du graphe fermé entraîne que, sur H^p, les normes H^p (3.18) et $\mathrm{Mes}(]0,+\infty] \times \Omega, \mathcal{P}ré, L^p)$, c-à-d.

(3.20) $$\|X\|_{Mes} = \sup_{\substack{\varphi \in B\mathcal{P}ré \\ \|\varphi\|_\infty \leq 1}} (\mathbb{E}\,|(\varphi \bullet X)_\infty|^p)^{1/p} \quad ,$$

sont équivalentes.

Aucun théorème analogue ne semble exister pour $0 < p < 1$, et, pour une martingale locale M, $(\mathbb{E}[M,M]_\infty^{p/2})^{1/p}$ et $(\mathbb{E}(M^{*p}))^{1/p}$ ne semblent pas équivalentes. Si de tels espaces, pour $0 < p < 1$, doivent jamais servir à quelque-chose, on peut imaginer que le plus utile sera l'espace des semi-martingales qui définissent des mesures sur $(]0,+\infty] \times \Omega, \mathcal{P}ré)$ à valeurs dans $L^p(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$ (adaptées et localisables), muni de la p-norme (3.20). C'est un espace vectoriel p-normé complet ; c'est lui qui mériterait le nom de H^p (et $\mathcal{SM}$ pourrait s'appeler H^0). Mais c'est là une conjecture sans fondement réel actuellement, et peut être sans intérêt.

§ 4. SEMI-MARTINGALES FORMELLES

Résumé du § 4. Ce § est au § 3 ce qu'est le § 2 au § 1 ; il est la partie la plus importante de cet article. (4.1), page 40, introduit l'espace $\mathcal{P}ré\,\mathcal{SM}$ des semi-martingales formelles, module (pour l'intégration stochastique) sur

sur la tribu prévisible $\mathcal{P}$ré. (4.1 bis), p. 40, en étudie les sous-modules : $\mathcal{P}$ré$\mathcal{V}$, $\mathcal{P}$ré$\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$ré$\mathcal{V}^c$, $\mathcal{P}$ré$\mathcal{M}^c$. (4.2), p. 42, définit l'arrêt à un temps T , (4.3), p. 42, les discontinuités d'une semi-martingale formelle. On en déduit un théorème nouveau : (4.5), page 43 , toute semi-martingale formelle accessible est somme d'une manière unique, d'un processus à variation fini formel accessible et d'une martingale locale continue formelle ; ce théorème n'a sans doute pas d'équivalent pour des semi-martingales vraies. (4.6), page 44 , donne l'application aux intégrales stochastiques $\sum_{k=1}^{m} h_k \cdot X_k$, signalée dans l'Introduction. (4.7), page 44 , donne la composante X^c, la semi-martingale arrêtée X^T, le processus croissant formel $[X,X]$. Et (4.8), page 45 , étudie les semi-martingales formelles H^p.

Ce paragraphe est très court ; parce que tout a été préparé pour lui. On pourrait, à la rigueur, ne lire que lui !

<u>(4.1)</u> Avec les notations du § 3, $\mathcal{S}\mathcal{M}$ est un sous-B$\mathcal{P}$ré-module de Mes, on peut donc former $\mathcal{P}$ré $\mathcal{S}\mathcal{M}$, <u>qui sera l'espace des semi-martingales formelles</u> (voir § 2). Ici seule existe la mesure formelle μ_X ou dX, le processus X n'existe pas (exactement comme, sur $\mathbb{R}$, une mesure réelle formelle n'a pas de primitive). Mais nous continuerons à employer X sans danger, en sachant seulement que ce n'est pas un processus, et que X_t n'a pas de sens (sauf $X_o = 0$). On peut dire qu'une mesure semi-martingale formelle est une mesure formelle $\in$ $\mathcal{P}$ré Mes, adaptée et localisable : si f est dX-intégrable et portée par $]0,t] \times \Omega$, $\mu_X(f)$ est $\mathcal{T}_t$-mesurable, et, si f est dX-intégrable, et portée par $]0,+\infty] \times \Omega$, $\mu_X(f)$ et $f \cdot X$ sont portées par Ω' ; ou encore, il existe γ prévisible bornée > 0 telle que $\gamma\mu_X$, encore notée $\gamma \cdot X$, soit une semi-martingale, i.e. une mesure adaptée et localisable. Notons que μ_X est équivalente à $\gamma\mu_X$, donc admet une mesure ≥ 0 équivalente (3.6 bis).

<u>(4.1 bis)</u> On a ensuite, pour les divers sous-B$\mathcal{P}$ré-modules $\mathfrak{N}$ de $\mathcal{S}\mathcal{M}$, des espaces $\mathcal{P}$ré $\mathfrak{N} = \mathcal{P}$ré $\otimes_{B\mathcal{P}ré} \mathfrak{N}$:

<u>$\mathcal{P}$ré $\mathcal{V}$</u>, <u>espace des processus à variation finie formels</u>, <u>avec les sous-espaces</u>

$\mathcal{P}ré\ \mathcal{V}^c$, $\mathcal{P}ré\ \mathcal{V}^{pré}$; et $\mathcal{P}ré\ \mathcal{V}$ a une notion de suites convergentes, plus fine que $\mathcal{P}ré\ \mathcal{SM}$;

$\mathcal{P}ré\ \mathcal{M}$, espace des martingales formelles, avec son sous-espace $\mathcal{P}ré\ \mathcal{M}^c$; etc. Et $\mathcal{P}ré\ \mathcal{SM} = \mathcal{P}ré\ \mathcal{V} + \mathcal{P}ré\ \mathcal{M}$, $\mathcal{P}ré\ \mathcal{SM}^c = \mathcal{P}ré\ \mathcal{V}^c \oplus \mathcal{P}ré\ \mathcal{M}^c$. Aucun théorème de graphe fermé ne permet de dire ici qu'il s'agisse d'une somme directe topologique, mais c'est visible directement. Supposons que $X_n = V_n + M_n$ tende vers 0 dans $\mathcal{P}ré\ \mathcal{SM}^c$. Soit $\gamma > 0$ bornée telle que les $\gamma \bullet X_n$ soient des semi-martingales vraies, et convergent vers 0 dans $\mathcal{SM}^c$. Alors leurs décompositions sont $\gamma \bullet X_n = \gamma \bullet V_n + \gamma \bullet M_n$, donc $\gamma \bullet V_n$ et $\gamma \bullet M_n$ convergent vers 0 respectivement dans $\mathcal{V}^c$ et dans $\mathcal{M}^c$ (qui ont les topologies induites par $\mathcal{SM}^c$), et par suite V_n et M_n dans $\mathcal{P}ré\ \mathcal{V}^c$ et $\mathcal{P}ré\ \mathcal{M}^c$. Par rapport à une semi-martingale formelle X, on peut parler d'ensemble dX-négligeable ou dX-mesurable de $]0,+\infty] \times \Omega$, de fonction f dX-mesurable, $(\mu_X)^*_\alpha(f)$ existe pour $f \geq 0$, par rapport à des jauges J_α pour un choix de $\lambda \in \Lambda$; on peut parler de f dX-intégrable, f est dX-intégrable ssi elle est dX-mesurable et $(\mu_X)^*_\alpha(|f|) < +\infty$ pour tout α, (L^0 est un C-espace, (1.8 ter)); pour f prévisible, cela veut dire que, pour toute φ prévisible bornée telle que $|\varphi| \leq |f|$, φ est dX-intégrable, et que $\displaystyle\sup_{\substack{\varphi \in B\mathcal{P}ré \\ |\varphi| \leq |f|}} J_\alpha((\varphi \bullet X)_\infty) < +\infty$

pour tout α, ou que les $(\varphi \bullet X)_\infty$, $\varphi \in B\mathcal{P}ré$, $|\varphi| \leq f$, forment une partie bornée de $E = L^0$; f est dX-intégrable ssi $f \bullet X$ est une vraie semi-martingale.
Puisque $\mathcal{SM}$ est fermé dans Mes, $\mathcal{P}ré\ \mathcal{SM} \cap \text{Mes} = \mathcal{SM}$; puisque $\mathcal{V}^c$, $\mathcal{V}^{pré}$, $\mathcal{M}^c$, $\mathcal{SM}^c$ sont fermés dans $\mathcal{SM}$, $\mathcal{P}ré\ \mathcal{V}^c \cap \mathcal{SM} = \mathcal{V}^c$, $\mathcal{P}ré\ \mathcal{V}^{pré} \cap \mathcal{SM} = \mathcal{V}^{pré}$, $\mathcal{P}ré\ \mathcal{SM}^c \cap \mathcal{SM} = \mathcal{SM}^c$ (2.6). Par contre, on a vu (3.9 bis) que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{M}$ ne sont pas fermés dans $\mathcal{M}$; et on a $\mathcal{P}ré\ \mathcal{V} \cap \mathcal{SM} \supsetneqq \mathcal{M}$, $\mathcal{P}ré\ \mathcal{M} \cap \mathcal{SM} \supsetneqq \mathcal{M}$: si V est un processus à variation finie, f une fonction prévisible dV-intégrable telle que $f \bullet V$ ne soit pas à variation finie, $f \bullet V \in \mathcal{P}ré\ \mathcal{V} \cap \mathcal{SM}$ et $\notin \mathcal{V}$; si M est une martingale locale, f une fonction prévisible dM-intégrable telle que $f \bullet M$ ne soit pas une martingale locale, $f \bullet M \in \mathcal{P}ré\ \mathcal{M} \cap \mathcal{SM}$ et $\notin \mathcal{M}$.

On peut aussi considérer le $B\mathcal{P}ré$-module $\mathcal{SM}_{sp}$ des semi-martingales spéciales, somme directe $\mathcal{V}^{pré} \oplus \mathcal{M}$. Alors $\mathcal{P}ré\ \mathcal{SM}_{sp} = \mathcal{P}ré\ \mathcal{V}^{pré} \oplus \mathcal{P}ré\ \mathcal{M}$ (c'est bien une somme directe, autrement dit la décomposition $X = V + M$ reste unique ; car,

42

si $V+M=0$, on trouvera $\gamma > 0$ prévisible bornée dV- et dM-intégrable, alors $\gamma \cdot V + \gamma \cdot M = 0$, $\gamma \cdot V \in \mathcal{V}^{\text{pré}}$, $\gamma \cdot M \in \mathcal{M}$, donc $\gamma \cdot V = 0$, $\gamma \cdot M = 0$, donc $V=0$, $M=0$. Mais $\mathcal{SM}_{sp}$ n'est pas fermé dans $\mathcal{SM}$, et Pré $\mathcal{SM}_{sp} \cap \mathcal{SM} \underset{\neq}{\supset} \mathcal{SM}_{sp}$; par exemple, si M est une martingale formelle, semi-martingale vraie mais non martingale locale, $M \in$ Pré $\mathcal{M} \subset$ Pré $\mathcal{SM}_{sp}$, et $M \in \mathcal{SM}$, cependant $M \notin \mathcal{SM}_{sp}$, car sa décomposition canonique est $0+M$, et $M \notin \mathcal{M}$). En fait, c'est bien ce raisonnement qu'on a fait pour démontrer (3.14) : si X est une semi-martingale spéciale, $X = V + M$; alors, si f est dX-intégrable, $f \cdot X$ est une semi-martingale spéciale formelle, $f \cdot X = f \cdot V + f \cdot M$; si elle est une vraie semi-martingale spéciale, sa décomposition canonique est la même, par l'unicité, donc f est dV- et dM-intégrable, $f \cdot V$ est un processus à variation finie, et $f \cdot M$ est une martingale.

<u>(4.2)</u> <u>Si</u> T <u>est un temps d'arrêt</u>, $X \mapsto X^T$ <u>est une application Pré-linéaire (séquentiellement) continue de</u> Pré $\mathcal{SM}$ <u>dans</u> Pré $\mathcal{SM}$; l'image est Pré $\mathcal{SM}^T$, l'espace des semi-martingales formelles arrêtée en T, associé au sous-BPré-module $\mathcal{SM}^T$ de $\mathcal{SM}$, ou de celles pour lesquelles $]T,+\infty]$ est négligeable. On peut d'ailleurs aussi arrêter en T_-, et $X \mapsto X^{T_-}$ est Pré-linéaire continue de Pré $\mathcal{SM}$ sur Pré $\mathcal{SM}^{T_-}$, espace des semi-martingales formelles arrêtées en T_-.

<u>(4.3)</u> <u>Soit</u> X <u>une semi-martingale</u>. <u>On peut parler de ses sauts</u>, <u>définis à un ensemble</u> Λ-<u>négligeable près</u>, et qui sont contenus dans une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt ; on distingue alors les sauts accessibles et les sauts inacessibles. On peut donc en faire autant pour une semi-martingale formelle X : on choisit γ prévisible bornée > 0 dX-intégrable, et on posera

(4.4) $$\Delta X_s = \frac{1}{\gamma_s} \Delta(\gamma \cdot X)_s \quad .$$

C'est évidemment indépendant du choix de γ ; faisons une fois ce raisonnement, nous ne répèterons en général plus. Si γ' est une autre fonction analogue, $\frac{1}{\gamma'_s} \Delta(\gamma' \cdot X)_s = \frac{1}{\gamma'_s} \Delta(\frac{\gamma'}{\gamma} \cdot \gamma \cdot X)_s = \frac{1}{\gamma'_s} \frac{\gamma'_s}{\gamma_s} \Delta(\gamma \cdot X)_s = \frac{1}{\gamma_s} \Delta(\gamma \cdot X)_s$. Et on peut parler de sauts accessibles et de sauts inaccessibles de X.

Il n'y a pas de sens immédiat à dire que $\sum_s \Delta X_s^2 < +\infty$ ps. Mais, si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties prévisibles dX-intégrables, croissante et de réunion $]0,+\infty] \times \Omega$, $\sum_{s\in A_k} \Delta X_s^2 < +\infty$ pour tout k ; si $\gamma > 0$ est prévisible dX-intégrable, $\sum_s \gamma_s^2 \Delta X_s^2 < +\infty$; on pourra dire que $\sum_s \Delta X_s^2$ est formellement fini. Par contre, en général $\sum_s |\Delta X_s|$ n'est pas formellement fini.

<u>(4.5)</u> Voici cependant un résultat étrange. On sait que toute semi-martingale prévisible est spéciale, et $\mathcal{SM}^{pré} = \mathcal{V}^{pré} \oplus \mathcal{M}^c$, et de même $\mathcal{P}ré\,\mathcal{SM}^{pré} = \mathcal{P}ré\,\mathcal{V}^{pré} \oplus \mathcal{P}ré\,\mathcal{M}^c$; pour X semi-martingale prévisible, $\sum_s |\Delta X_s| < +\infty$ ps. Mais supposons X semi-martingale formelle n'ayant que des discontinuités accessibles. Il existe une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt (non partout définis) prévisibles disjoints, qui épuise ses sauts. Alors, si $V_k = \Delta X_{T_k} 1_{t\geq T_k}$, c'est une semi-martingale accessible, et $\sum_k \mu_{V_k}$ est une mesure formelle (puisque les μ_{V_k} sont portées par des ensembles disjoints), adaptée localisable , définissant un processus de sauts accessible formel V^σ qu'on peut écrire $dV^\sigma = \sum_k dV_k^\sigma$, ou $\mu_{V^\sigma} = \sum_k \mu_{V_k}$; autrement dit, $\sum_s |\Delta X_s|$ est formellement fini, et $V^\sigma = \sum_{s\leq\bullet} \Delta X_s$. Alors $X = \sum_{s\leq\bullet} \Delta X_s + Z$, Z semi-martingale continue formelle, admettant donc la décomposition usuelle $V^c + M$, $V^c \in \mathcal{P}ré\,\mathcal{V}^c$, $M \in \mathcal{P}ré\,\mathcal{M}^c$. En posant $V^\sigma + V^c = V$, $V \in \mathcal{P}ré\,\mathcal{V}^{acc}$; en particulier $X = V+M$ est accessible, et inversement une semi-martingale formelle accessible n'a que des discontinuités accessibles. <u>D'où une décomposition en somme directe</u> $\mathcal{P}ré\,\mathcal{SM}^{acc} = \mathcal{P}ré\,\mathcal{V}^{acc} \oplus \mathcal{P}ré\,\mathcal{M}^c$. [C'est bien une somme directe : une martingale locale continue à variation finie est nulle, c'est donc vrai aussi en formel.] Mais, même si $X \in \mathcal{SM}$ est une semi-martingale <u>vraie</u>, sa décomposition $X = V + M$ est en général <u>formelle</u>(36), $V \in \mathcal{P}ré\,\mathcal{V}^{acc}$, $M \in \mathcal{P}ré\,\mathcal{M}^c$, Pour des espaces avec suites convergentes et sans topologie, pas question d'appliquer un théorème du graphe fermé ; la décomposition de $\mathcal{P}ré\,\mathcal{SM}^{acc}$ en somme directe est algébrique, peut-être pas topologique. Supposons que X_n converge vers 0 dans $\mathcal{P}ré\,\mathcal{SM}^{acc}$; $X_n^c = M_n$ converge vers 0 dans $\mathcal{P}ré\,\mathcal{M}^c$, donc aussi V_n dans $\mathcal{SM}$, mais rien ne dit que V_n converge vers 0 dans $\mathcal{P}ré\,\mathcal{V}$, plus fin que $\mathcal{P}ré\,\mathcal{SM}$. Je ne le pense pas.

Soit X une semi-martingale formelle accessible spéciale : elle a deux décompositions canoniques, $X = V_1 + M_1$, $V_1 \in \text{Pré } \mathcal{V}^{acc}$, $M_1 \in \text{Pré } \mathcal{M}^c$, et $X = V_2 + M_2$, $V_2 \in \text{Pré } \mathcal{V}^{pré}$, $M_2 \in \text{Pré } \mathcal{M}$. Elles ne coïncident pas en général. Soit par exemple T un temps d'arrêt prévisible, Φ une variable aléatoire intégrable $\in \mathcal{T}_T$, $\notin \mathcal{T}_{T_-}$, $\mathbf{E}(\Phi / \mathcal{T}_{T_-}) = 0$, et soit $X = 1_{t \geq T}\, \Phi$; X est une semi-martingale vraie, accessible et spéciale, à variation finie et martingale non prévisible. Alors $V_1 = X$, $M_1 = 0$; $V_2 = 0$, $M_2 = X$.

(4.6) Un exemple d'application à des intégrales stochastiques vectorielles.

Soient X une semi-martingale à valeurs dans un espace vectoriel E de dimension finie, J un processus prévisible à valeurs dans son dual E^*. Quel sens donnera-t-on à l'intégrale stochastique $J \bullet X$, $(J \bullet X)_t = \int_{]0,t]} (J_s \mid dX_s)_{E^*,E}$? On peut prendre des coordonnées, $E = \mathbb{R}^N$, et dire que c'est $\sum_{k=1}^{N} J_k \bullet X_k$, mais il faut évidemment dépasser le cas où chaque J_k est dX_k-intégrable. Il n'est pas nécessaire de se creuser beaucoup les méninges : $J \bullet X = \sum_{k=1}^{N} J_k \bullet X_k$ existe toujours comme semi-martingale formelle, et on dira que J est dX-intégrable, si le résultat $J \bullet X$ (indépendant du choix de la base, par calcul formel) est une semi-martingale [21].

(4.7) Il existe donc une application Pré-linéaire (séquentiellement) continue $X \mapsto X^c$ de Pré $\mathcal{SM}$ dans Pré $\mathcal{M}^c$ (nous l'avons déjà vu à (4.5)) et une Pré-bilinéaire (séquentiellement) continue $(X,Y) \mapsto [X,Y]$ de Pré $\mathcal{SM} \times$ Pré $\mathcal{SM}$ dans Pré $\mathcal{V}$. Par exemple, pour définir $[X,Y]$, on prend $\gamma > 0$ prévisible bornée dX- et dY-intégrable, et on pose $[X,Y] = \frac{1}{\gamma^2} [\gamma \bullet X, \gamma \bullet Y]$; $[X,Y]$ est un processus à variation finie formel. [Faisons encore une fois le raisonnement complet qui montre que c'est indépendant du choix de γ. Soit γ' une autre fonction analogue. Puisque γ est dX-intégrable, et aussi $\gamma' = \frac{\gamma'}{\gamma} \gamma$, $\frac{\gamma'}{\gamma}$ est $d(\gamma \bullet X)$-intégrable, et $\gamma' \bullet X = \frac{\gamma'}{\gamma} \bullet (\gamma \bullet X)$. Alors $\frac{1}{\gamma'^2} \bullet [\gamma' \bullet X, \gamma' \bullet Y] = \frac{1}{\gamma'^2} \bullet [\frac{\gamma'}{\gamma} \bullet (\gamma \bullet X), \frac{\gamma'}{\gamma} \bullet (\gamma \bullet Y)] =$ $= \frac{1}{\gamma'^2} \frac{\gamma'^2}{\gamma^2} \bullet [\gamma \bullet X, \gamma \bullet Y]$ (3.13) $= \frac{1}{\gamma^2} \bullet [\gamma \bullet X, \gamma \bullet Y]$. Tous les raisonnements sont de ce type !] Tout processus à variation finie est somme unique d'un processus de sauts et d'un processus à variation finie continu ; donc on a la même décomposition unique pour un processus à variation finie formelle, et $[X,Y] = \sum_{s\leq\bullet} \Delta X_s \Delta Y_s + \langle X^c,Y^c\rangle$; $\sum_{s\leq\bullet}$ est un processus de sauts formel ; $\sum_{s\leq t}$ n'a pas de sens ; mais il existe une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ croissante de parties prévisibles, de réunion $]0,+\infty]\times\Omega$, et $\sum_{\substack{s\leq\bullet\\ s\in A_k}} \Delta X_s \Delta Y_s$ a un sens comme vrai processus de sauts, $\sum_{\substack{s\leq t\\ s\in A_k}}$ est défini pour tout tout t. Et $\langle X^c,Y^c\rangle \in \mathcal{V}^c$. Ensuite $[X,X]$ est un processus croissant formel $\in \mathcal{P}ré_+ \mathcal{V}_+$, définissant sur $(]0,+\infty]\times\Omega,\mathcal{P}ré)$ une mesure non bornée "positive", dont la valeur sur tout ensemble B prévisible est un élément de $L^0(\Omega,\mathcal{O},\Lambda;\overline{\mathbb{R}}_+)$, une fonction Λ-mesurable ≥ 0, finie ou non.

(4.8) Une semi-martingale X sera dite formellement H^p $(1\leq p<+\infty)$ s'il existe γ prévisible bornée >0 telle que $\gamma\bullet X\in H^p$ (24). Une semi-martingale localement H^p est formellement H^p ; si en effet $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de temps d'arrêt convergeant stationnairement vers $+\infty$, $T_0=0$, telle que chaque semi-martingale arrêtée X^{T_n} soit H^p, et si nous posons $\gamma=\overline{\gamma}_n = 1\wedge\gamma_n \|X^{T_{n+1}}\|^{-1}_{H^p}$ dans $]T_n,T_{n+1}]$, γ_n constantes >0, $\sum_n \gamma_n<+\infty$, alors $\gamma\bullet X=\sum_n \overline{\gamma}_n(X^{T_{n+1}}-X^{T_n})$, et $\|\gamma\bullet X\|_{H^p}\leq\sum_n\gamma_n<+\infty$. Il y a donc identité entre semi-martingales localement H^p formelles et semi-martingales H^p formelles ; leur espace pourra être noté $\mathcal{P}ré\ H^p$. Une semi-martingale est localement H^1, rappelons-le, ssi elle est spéciale. On sait que $X\in H^p_{loc}$ ssi il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt, tendant stationnairement vers $+\infty$, telle que, pour tout temps d'arrêt T, $\Delta X_{T\wedge T_n}\in L^p$. Supposons en effet cette condition réalisée; alors X est spéciale, soit $X=V+M$ sa décomposition canonique. Soit $(T'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de temps d'arrêt, tendant stationnairement vers $+\infty$, $T'_n\leq T_n$, telle que $V^{T'_n}$ soit à variation bornée, et $M^{T'_n}$ martingale, bornée dans $[0,T'_n[$. Alors $\Delta X_{T'_n}\in L^p$, donc $\Delta V_{T'_n}$ est bornée et $\Delta M_{T'_n}\in L^p$; finalement $X^{T'_n}\in H^p$ et $X\in H^p_{loc}$.

Alors $X\in\mathcal{P}ré\ H^p$ ssi il existe γ prévisible >0 bornée, et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, tendant stationnairement vers $+\infty$, telle que, pour tout temps d'arrêt T, $\gamma_{T\wedge T_n}\Delta X_{T\wedge T_n}\in L^p$ (rappelons que les sauts d'une semi-martingale formelle sont bien définis). Il pourra arriver que X soit une semi-martingale vraie, non localement H^p, mais formellement H^p ; par exemple, pour $p=1$, non spéciale, mais formellement spéciale ; dans ce dernier cas, elle a une décomposition unique $X = V + M$, $V \in \mathcal{P}ré\ \mathcal{V}^{pré}$ (mais non nécessairement $\in \mathcal{V}^{pré}$), $M \in \mathcal{P}ré\ \mathcal{M}$ (mais non nécessairement $\in \mathcal{M}$). C'est ce qui a été vu à (4.1 bis).

§ 5. INTEGRALE STOCHASTIQUE OPTIONNELLE PAR RAPPORT A DES SEMI-MARTINGALES CONTINUES FORMELLES

Résumé du § 5. Quand une semi-martingale est continue, elle intègre aussi les fonctions optionnelles ; on peut remplacer la tribu prévisible $\mathcal{P}$ré par la tribu optionnelle $\mathcal{O}$pt. (5.1), page 47 , caractérise la mesure associée à une semi-martingale continue sur la tribu optionnelle. Ceci passe évidemment aux semi-martingales formelles continues ; tout est évident.

(5.0) On peut considérer une semi-martingale continue X comme une mesure $\overline{\mu}_X$ sur la tribu optionnelle $\mathcal{O}$pt, $\overline{\mu}_X \in \mathrm{Mes}(]0,+\infty] \times \Omega, \mathcal{O}\mathrm{pt}, L^0(\Omega,\mathcal{O},\Lambda))$. [Si on travaille sur un intervalle stochastique [S,T], au lieu de [0,+∞], avec des semi-martingales continues nulles X en S, il n'y a aucune modification, puisqu'elles se prolongent en semi-martingale $\overline{X}$ continues sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, nulles sur [0,S], arrêtées en T. Tous les résultats de ce § sont donc valables, avec ces modifications évidentes.] Il ne s'agit pas là d'un prolongement de Lebesgue de la restriction μ_X de $\overline{\mu}_X$ à la tribu prévisible : si X est continue, μ_X la mesure qu'elle définit pour la tribu prévisible, le graphe d'un temps d'arrêt inaccessible ne sera pas en général μ_X-négligeable ni même μ_X-mesurable. Il s'agit d'un prolongement d'une autre nature, en posant, pour φ optionnelle, $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, $\overline{\mu}_X(\varphi) = \mu_X(\varphi^{pré})$, où $\varphi^{pré}$ est la projection prévisible de φ, ou plus généralement $\overline{\mu}_X(\varphi) = \mu_X(\varphi')$, où φ' est n'importe quelle fonction prévisible bornée, coïncidant avec φ sauf sur un ensemble à coupes dénombrables [parce que $\varphi' - \varphi^{\text{pré}}$ est prévisible portée par un ensemble prévisible à coupes dénombrables, donc ne chargeant pas dX].

<u>Proposition (5.1)</u> : <u>Pour que</u> $\mu \in \mathrm{Mes}(]0,+\infty] \times \Omega, \mathcal{O}pt, L^0)$ <u>soit la mesure</u> $\bar{\mu}_X$ <u>associée à une semi-martingale continue</u> X, <u>il faut et il suffit qu'elle vérifie les propriétés suivantes (voir (3.1))</u> :

(5.2)
1) <u>elle est adaptée</u> ;
2) <u>elle est localisable</u> ;
3) <u>elle ne charge aucun graphe de temps d'arrêt</u> ;
4) <u>sa restriction à</u> $\mathcal{P}$ré <u>est la mesure définie par une semi-martingale continue.</u>

<u>Démonstration</u> : Nous avons montré dans S [1] [(25)] que les conditions étaient nécessaires. Pour la suffisance, 3 et 4 entraînent le résultat. En effet, soit μ une mesure vérifiant 3 et 4. Sa restriction à $\mathcal{P}$ré est supposée être par 4), μ_X, X semi-martingale continue ; alors μ_X possède un prolongement $\bar{\mu}_X$ comme ci-dessus, et nous devons montrer que $\bar{\mu}_X = \mu$. Mais, si $\varphi \in B\mathcal{O}pt$, $\bar{\mu}_X(\varphi) = \mu_X(\varphi^{\text{pré}})$, et $\varphi - \varphi^{\text{pré}}$ est portée par une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt, donc, par 3, $\mu(\varphi) = \mu(\varphi^{\text{pré}}) = \mu_X(\varphi^{\text{pré}}) = \bar{\mu}_X(\varphi)$, cqfd.

<u>Remarque</u> : 1 et 2 ne sont mis que pour mémoire, puisque 3 et 4 suffisent. On pourrait espérer en fait que 1, 2, 3, suffisent ; il n'en est rien. Considérons la mesure μ suivante sur $\mathcal{O}pt$: $\mu(\varphi) = \varphi_T^{\text{pré}}$, où T est un temps d'arrêt inaccessible. Sa restriction à la tribu prévisible $\mathcal{P}$ré est μ_V, où $V = 1_{\{t \geq T\}}$ est un processus croissant adapté <u>discontinu</u> ; elle est définie comme μ_V, mais avec V discontinue ! Bien évidemment μ est adaptée, c-à-d. vérifie la condition 1). Ensuite μ ne charge aucun graphe de temps d'arrêt τ inaccessible ; soit en effet φ portée par τ et optionnelle bornée ; pour tout temps d'arrêt prévisible S, $\varphi_S^{\text{pré}}$ est l'espérance conditionnelle de φ_S pour la tribu $\mathcal{T}_{S_-}$, mais $\varphi_S = 0$, donc $\varphi_S^{\text{pré}} = 0$; $\varphi^{\text{pré}}$ étant prévisible, par le

théorème des sections, $\varphi^{\text{pré}} = 0$, donc $\bar{\mu}_V(\varphi) = \mu_V(\varphi^{\text{pré}}) = 0$. Mais μ ne charge non plus aucun graphe de temps d'arrêt prévisible τ ; car si φ est optionnelle bornée portée par ce graphe, $\varphi^{\text{pré}}$ est aussi portée par ce graphe, donc $\varphi_T^{\text{pré}} = 0$, $\mu_V(\varphi^{\text{pré}}) = 0$. Donc μ vérifie la condition 3. Il est moins clair qu'elle vérifie 2. Montrons que c'est vrai dans le cas particulier suivant : $\Omega = [0,+\infty]$, $\mathcal{O}$ = tribu borélienne, Λ = classe de la mesure de Lebesgue ; $\mathcal{T}_t$ est, dans $[0,t]$, la tribu Λ-mesurable, et, dans $]t,+\infty]$, la tribu engendrée par la tribu grossière $\{\emptyset,]t,+\infty]\}$ et les parties Λ-négligeables. Alors T, application identique de $\overline{\mathbb{R}}_+$, $T(\omega) = \omega$, est un temps d'arrêt inaccessible (et c'est d'ailleurs le seul) (26). Une fonction φ est optionnelle si et seulement si elle est dans $\mathcal{O} \otimes \hat{\mathcal{O}}_\Lambda$ (i.e. Λ-mesurable) et Λ-ps. indépendante de ω dans $\{(t,\omega); \omega > t\}$; elle est prévisible si et seulement si elle est Λ-mesurable, et Λ-ps. indépendante de ω dans $\{\omega \geq t\}$. La projection prévisible $\varphi^{\text{pré}}$ de φ optionnelle (quelle que soit $\lambda \in \Lambda$) est $\varphi^{\text{pré}} = \varphi$ dans $\complement\{\omega = t\}$, et $\varphi^{\text{pré}}(\omega,\omega) = \varphi(\omega,\omega+\delta)$, pour Λ-presque tout $\delta > 0$. Supposons φ optionnelle portée par $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega'$, $\Omega' \subset \Omega$. Soit $\sigma = \operatorname{Inf}\{\omega ;]\omega,+\infty] \subset \Omega' \text{ ps.}\}$; alors $]\sigma,+\infty] \subset \Omega'$ Λ-ps., mais, pour tout $\sigma' < \sigma$, $[\sigma',\sigma] \cap \complement\Omega'$ est de mesure extérieure > 0. Alors $\varphi^{\text{pré}}$ est portée, a priori, par $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega') \cup \Delta$, où Δ est la diagonale de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+$. Mais, si $\varphi^{\text{pré}}(\omega,\omega) \neq 0$, cela veut dire que $\varphi(\omega,\omega+\delta) \neq 0$ pour Λ-presque tout $\delta > 0$, donc $\omega \geq \sigma$; et alors Λ-presque tout ω pour lequel $\varphi^{\text{pré}}(\omega,\omega) \neq 0$ est dans Ω'. Donc $\varphi^{\text{pré}}$ est portée par $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega'$ à un ensemble Λ-négligeable près, donc $\mu_V(\varphi^{\text{pré}})$ est portée par Ω', μ est localisable, condition 2. Ainsi μ vérifie 1, 2, 3, mais pas 4, V admet un saut unité sur le graphe de T.

De toute façon, les conditions (1,2,3,4) font de $\mathcal{S}\mathcal{M}^c$ un sous-espace vectoriel fermé de $\text{Mes}(]0,+\infty] \times \Omega, \mathcal{O}\text{pt}, L^0)$; et, sur $\mathcal{S}\mathcal{M}^c$, la topologie induite par $\text{Mes}(]0,+\infty] \times \Omega, \mathcal{O}\text{pt}, L^0)$ et par $\text{Mes}(]0,+\infty] \times \Omega, \mathcal{P}\text{ré}, L^0)$ coïncident, car si $\varphi \in B\mathcal{O}\text{pt}$ $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, on a $\varphi^{\text{pré}} \in B\mathcal{P}\text{ré}$, $\|\varphi^{\text{pré}}\|_\infty \leq 1$. Donc tout ce qui a été dit sur $\mathcal{S}\mathcal{M}^c$, $\mathcal{V}^c$, aux §§ 3, 4, subsiste complètement, en remplaçant partout la tribu prévisible par la tribu optionnelle ; et on continuera à écrire dX, μ_X, pour la mesure définie par X sur la tribu optionnelle, à la place de $\bar{\mu}_X$.

§ 6. LOCALISATION DES SEMI-MARTINGALES FORMELLES SUR DES OUVERTS DE $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$

Résumé du § 6. On a défini dans S [1] les équivalences de semi-martingales sur des ouverts A de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$; on va faire de même ici pour les semi-martingales formelles - (6.1), page 50, donne la définition, puis quelques propriétés. La proposition (6.3 ter), page 51, est toute nouvelle, elle n'a pas d'équivalent pour les semi-martingales vraies, et c'est la clef de nombreuses propriétés intéressantes. Par exemple, (6.4), page 52, aurait normalement dû figurer dans S [1], mais arrive en fait naturellement ici. Alors (6.4 ter), page 53, est très intéressant : une semi-martingale sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, continue sur A, est équivalente sur A à une semi-martingale formelle partout continue ; ce qui permettra, sur A, d'intégrer par rapport à elle des processus optionnels. (6.5), page 54, définit suivant P.A. Meyer les semi-martingales dans l'ouvert A ; (6.5 bis) et (6.5 ter), page 55, en rappelle des propriétés importantes. (6.5 quinto), page 56, les étend aux variétés de classe C^2. (6.6 bis), page 58, définit l'équivalence sur A d'un processus défini seulement sur A, et d'une semi-martingale formelle. (6.6 ter), page 58, est un théorème utile. Et (6.7), page 59, étend (6.4 ter) aux semi-martingales dans A ; on applique ensuite à des intégrales stochastiques de fonctions optionnelles. (6.12) traite des semi-martingales formelles localement bornées. Ce sont (6.4 ter) et (6.7) et leurs conséquences qui donneront les meilleures applications des semi-martingales formelles à l'intégration de processus cotangents d'ordre 2 par rapport à des semi-martingales continues sur des variétés, et aux équations différentielles stochastiques sur les variétés (article ultérieur).

Dans les §§ 3, 4, 5, les semi-martingales étaient considérées sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, ou sur $[S,T]$, S et T temps d'arrêt, $S \leq T$; elles étaient supposées nulles au temps 0, ou au temps S. Ici on considèrera des semi-martingales sur un ensemble A, généralement ouvert, de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, et on ne leur imposera évidemment aucune condition de ce genre pour le temps 0 ! Elles seront encore supposées à valeurs vectorielles, sauf à (6.5 quarto et quinto).

(6.1) Soit A un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. On dit que $X \underset{A}{\sim} 0$, X semi-martingale formelle, s'il existe γ prévisible bornée > 0, telle que $\gamma \bullet X$ soit une semi-martingale vraie, équivalente à 0 sur A ; c'est alors vrai aussi de $f \bullet X$, pour toute f prévisible dX-intégrable (parce que $f \bullet X = \frac{f}{\gamma} \bullet (\gamma \bullet X)$, $\frac{f}{\gamma}$ $d(\gamma \bullet X)$-intégrable). En choisissant une fois pour toutes γ dX-intégrable, on voit qu'il existe un plus grand ouvert d'équivalence de X à 0, et qu'il est optionnel. Les diverses propriétés des §§ 3, 4 de S [1] se transportent aussitôt au cas formel : si X est continue, $X \underset{A}{\sim} 0$ ssi A est dX-négligeable ; il existe un plus grand ouvert d'équivalence de X à une martingale continue formelle , et il est optionnel, etc.

(6.2) Si X est une vraie semi-martingale, équivalente sur A à une martingale locale continue formelle, elle est aussi équivalente sur A à une vraie martingale locale continue, à savoir X^c.
Si X est une vraie semi-martingale continue, équivalente sur A à un processus à variation fini continu formel, elle est aussi équivalente à un processus à variation finie continu vrai, à savoir $\tilde{X} = X - X^c$ (27). Le résultat ne subsiste sans doute pas si X n'est pas continue, car alors $\tilde{X}$ n'est pas nécessairement à variation finie, et n'est pas continue. Tout aussi tristement, une vraie semi-martingale, continue sur A, équivalente,sur A, à une semi-martingale continue formelle, n'est pas nécessairement équivalente à une semi-martingale continue vraie ; voir (6.4 ter) (un contre-exemple a été donné par Stricker).

(6.3) Une semi-martingale continue formelle X est équivalente sur A ouvert optionnel à une vraie semi-martingale continue, ssi A est dX-intégrable.

(6.3 bis) L'équivalence des semi-martingales sur un ouvert A est conservée par passage à la limite : si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sont deux suites de semi-martingales formelles, convergeant vers X, Y dans Pré $\mathcal{S}\mathcal{M}$, et si $X_n \sim Y_n$ sur A ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, alors $X \sim Y$ sur A. Il suffit de le voir pour des semi-martingales vraies. Or on peut extraire des suites partielles, que nous noterons encore X_n, Y_n, pour lesquelles $\underset{t\in\overline{\mathbb{R}}_+}{\mathrm{Sup}} |((X_n - Y_n) - (X-Y))_t|$ converge vers 0 Λ-ps., d'où le résultat.

Proposition (6.3 ter) : Soient A un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts optionnels recouvrant A, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de semi-martingales continues formelles, $X_m \sim X_n$ sur $A \cap A_m \cap A_n$. Alors il existe une semi-martingale continue formelle $\overline{X}$, unique à une équivalence près sur A, équivalente à X_n sur $A \cap A_n$, pour tout n. On peut la définir par

(6.3 quarto) $$\overline{X} = 1_{A_o} \bullet X_o + 1_{A_1\setminus A_o} \bullet X_1 + \ldots + 1_{A_k\setminus A_{k-1}\setminus\ldots\setminus A_o} \bullet X_k + \ldots$$

Démonstration : Les intégrales de (6.3 quarto) ont un sens, puisque les X_k sont continues et les A_k optionnels. La série est une somme de semi-martingales continues formelles, dont les mesures associées sont portées par des parties optionnelles disjointes, donc cette somme définit une mesure formelle $\mu \in \mathcal{O}pt\,\mathrm{Mes}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, \mathcal{O}pt, L^0)$, et, si S_N est la somme $\sum\limits_{0\leq n\leq N}$, μ_{S_N} converge vers μ dans $\mathcal{O}pt$ Mes pour $N \to +\infty$, par (2.5). Comme $\mathcal{O}pt\ \mathcal{S}\mathcal{M}^c$ est fermé dans $\mathcal{O}pt$ Mes, $\mu = \mu_{\overline{X}}$, $\overline{X}$ semi-martingale continue formelle. Montrons que $\overline{X} \sim X_n$ sur $A \cap A_n$. Nous devons utiliser un lemme : si A, B, sont deux ouverts de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, B optionnel, si Y est une semi-martingale continue formelle, si $Y \sim 0$ sur $A \cap B$, alors $1_B \bullet Y \underset{A}{\sim} 0$. [C'est vrai si Y est un processus V à variation finie, car on peut alors raisonner pour tout ω, et $A(\omega)$ est alors $dV(\omega)$-mesurable ; V est localement constant sur $A \cap B$, donc $1_B \bullet V$ aussi, donc $1_B \bullet V$ ne charge pas $A \cap B$; mais il ne charge pas non plus $\complement B$, donc il ne charge pas A, donc $1_B \bullet V \underset{A}{\sim} 0$. C'est aussi vrai si Y est une martingale locale continue M, car alors $\langle M,M\rangle \underset{A\cap B}{\sim} 0$, donc $1_B \bullet \langle M,M\rangle \underset{A}{\sim} 0$, donc $1_B \bullet M \underset{A}{\sim} 0$. C'est donc vrai pour $Y \in \mathcal{S}\mathcal{M}^c$, donc aussi trivialement pour $Y \in \mathcal{O}pt\ \mathcal{S}\mathcal{M}^c$.] On a

$1_{A_k\setminus A_{k-1}\setminus\ldots\setminus A_o} \bullet X_k = 1_{A_k\setminus A_{k-1}\setminus\ldots\setminus A_o} (1_{A_k} \bullet X_k)$; et d'après ce que nous venons de voir, puisque $X_k \sim X_n$ sur $A \cap A_n \cap A_k$, $1_{A_k} \cdot X_k \sim 1_{A_k} \cdot X_n$ sur $A \cap A_n$, donc $1_{A_k \setminus A_{k-1} \setminus \cdots \setminus A_o} \cdot X_k \sim 1_{A_k \setminus A_{k-1} \setminus \cdots \setminus A_o} \cdot X_n$ sur $A \cap A_n$. Donc

$$S_N \underset{A \cap A_n}{\sim} \sum_{k=0}^{N} 1_{A_k \setminus A_{k-1} \setminus \cdots \setminus A_o} \cdot X_n = 1_{\bigcup\limits_{0 \le k \le N} A_k} \cdot X_n \underset{A \cap A_n}{\sim} X_n$$

dès que $N \geq n$. L'équivalence des semi-martingales étant conservée par passage à la limite (6.3 bis), $\overline{X} \sim X_n$ sur $A \cap A_n$. Donc $\overline{X}$ répond bien à la question. L'unicité de $\overline{X}$ à une équivalence près résulte de (6.1).

<u>Remarque</u> : Même si toutes les X_n sont des semi-martingales vraies, $\overline{X}$ est en général seulement formelle (voir Remarque après (6.4 ter)).

Voici maintenant deux propriétés qui auraient dû figurer dans S [1] :

<u>Corollaire (6.4)</u> : 1) <u>Soient</u> X <u>un processus défini sur un ouvert</u> A <u>de</u> $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, $(A_n)_{n=0,1,\ldots,N}$ <u>une suite finie d'ouverts optionnels recouvrant</u> A. <u>Si</u> X <u>est équivalent sur chaque</u> $A \cap A_n$ <u>à une semi-martingale continue, il l'est aussi sur</u> A.

2) <u>Soit</u> $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ <u>une suite d'ouverts optionnels recouvrant</u> $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. <u>Si un processus</u> X <u>sur</u> $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ <u>est, sur chaque</u> A_n, <u>équivalent à une semi-martingale continue, et si</u> X_o <u>est</u> $\mathcal{T}_o$<u>-mesurable,</u> X <u>est une semi-martingale continue</u>.

<u>Démonstration</u> : 1) On reprend le résultat précédent, mais avec une suite finie : sur $A \cap A_n$, X est équivalent à une semi-martingale continue vraie X_n, donc $X_m \sim X \sim X_n$ sur $A \cap A_m \cap A_n$; la semi-martingale continue formelle $\overline{X}$ de (6.3 quarto) est alors une semi-martingale continue vraie, puis $X \underset{A \cap A_n}{\sim} X_n \underset{A \cap A_n}{\sim} \overline{X}$, donc $X \underset{A}{\sim} \overline{X}$.

2) Soit T_N le temps de sortie de $\bigcup\limits_{n=0}^{N} A_n$. D'après 1), X est équivalent à une semi-martingale continue sur cette réunion, donc sur $[0,T_N[$, donc, X_o étant $\mathcal{T}_o$-mesurable, X est égal à une semi-martingale continue sur

$[0,T_n[$, donc sur $[0,T_N]$ par continuité, donc sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$.

Corollaire (6.4 bis) : Soient X une semi-martingale formelle, A un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts recouvrant A. Si, dans chaque $A \cap A_n$, X est équivalent à une semi-martingale continue formelle, soit X_n, elle l'est aussi sur A.

Démonstration : On peut remplacer A_n par le plus grand ouvert d'équivalence de X et de X_n, donc le supposer optionnel. Sur $A \cap A_n \cap A_m$, $X_m \sim X \sim X_n$, donc il existe $\overline{X}$ semi-martingale continue formelle, $\overline{X} \underset{A\cap A_n}{\sim} X_n$ par (6.3 ter). Alors $X \underset{A\cap A_n}{\sim} X_n \underset{A\cap A_n}{\sim} \overline{X}$, donc, par réunion dénombrable, $X \underset{A}{\sim} \overline{X}$.

Remarque : Si X est une vraie semi-martingale, et si, sur chaque $A \cap A_n$, elle est équivalente à une vraie semi-martingale continue, il se peut qu'elle soit seulement, sur A, équivalente à une semi-martingale continue formelle $\overline{X}$. Voir (6.4 ter).

Corollaire (6.4 ter) : Soient X une semi-martingale formelle, A un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) X est continue sur A ;

2) X est équivalente, sur A, à une semi-martingale continue formelle.

Donc il existe un plus grand ouvert d'équivalence de X à une semi-martingale continue formelle, et il est optionnel : c'est l'intérieur de l'ensemble optionnel des points de continuité de X.

Remarque : Ce corollaire sera généralisé à (6.7).

Démonstration : On peut toujours supposer X semi-martingale vraie. $2) \Rightarrow 1)$ est trivial, montrons $1) \Rightarrow 2)$. Quitte à remplacer A par l'intérieur de l'ensemble des points de continuité de X, on peut le supposer optionnel, et $X_0 = 0$. Supposons d'abord $A =]S,T[$, S et T temps d'arrêt, T à valeurs dans $[0,\overline{+\infty}]$, $S \leq T$.

Alors

$$1_{[0,T[}(X - X^S) + 1_{\{t\geq T\}}\, 1_{\{T>S\}}(X_{T_-} - X_S) = 1_{\{T>S\}}(X^{T_-} - X^S)$$

est une semi-martingale, nulle dans $[0,S]$, arrêtée en T_-. Elle est continue, sauf peut-être en T ; mais en T_-, la première semi-martingale vaut $1_{\{T>S\}}(X_{T_-} - X_S)$, la deuxième 0, tandis qu'en T la première vaut 0 et la deuxième $1_{\{T>S\}}(X_{T_-} - X_S)$; donc c'est une semi-martingale continue ; et elle est équivalente à X dans $]S,T[$. Le résultat est aussi vrai dans $[S,T[$ ou $[S,T]$ pour $T \leq +\infty$, non nécessairement ouvert.

Prenons maintenant A ouvert optionnel quelconque. Il est réunion d'intervalles stochastiques $[s,S[$, $s \in \mathbb{Q}_+$, S temps de sortie de A postérieur à s, à valeurs dans $[s,\overline{+\infty}]$; $]s,S[$ est l'intérieur de $[s,S[$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Dans chacun de ces intervalles, nous venons de voir que X est équivalente à une semi-martingale continue, et on applique (6.4 bis).

Remarque : Même si X est une semi-martingale vraie, continue sur A, elle n'est pas nécessairement équivalente sur A à une semi-martingale continue vraie (Stricker m'a communiqué un contre-exemple). Il n'existe donc pas de plus grand ouvert d'équivalence de X à une semi-martingale continue vraie : il existe une semi-martingale X et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts de réunion A, telle que X soit, dans chaque A_n, équivalente à une semi-martingale continue vraie, mais dans A seulement équivalente à une semi-martingale continue formelle.

Définition (6.5) : Soit A un ensemble arbitraire de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, X un processus sur A, à valeurs dans une variété V de classe C^2. X est dit restriction à A de semi-martingale, s'il admet un prolongement à $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, qui est une semi-martingale.

La tribu optionnelle de A (règle générale pour la tribu induite sur A par la tribu optionnelle de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$) est l'intersection avec A de la tribu optionnelle de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$. Alors une fonction sur A, à valeurs dans un espace lusinien, est optionnelle si elle est restriction à A d'une fonction optionnelle sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ (28).

Un processus X réel sur A est appelé une semi-martingale dans A (29), s'il est optionnel, et s'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts recouvrant A, telle que, dans chaque $A \cap A_n$, X soit restriction d'une semi-martingale X_n. Les A_n peuvent être choisis optionnels si A est ouvert ; si en effet X est restriction à A de $\overline{X}$ défini partout et optionnel, et si A'_n est le plus grand ouvert d'égalité de $\overline{X}$ et X_n, $A \cap A'_n \supset A \cap A_n$, et A'_n est optionnel. C'est encore vrai dans certains A non ouverts, par exemple un ouvert relatif A d'un intervalle stochastique $[S,T]$, S et T temps d'arrêt, $S \leq T$, parce qu'on peut d'abord remplacer $\overline{X}$ et X_n par les processus respectivement égaux à 0 sur $[0,S[$, $\overline{X}$ et X_n dans $[S,T[$, $\overline{X}_T$ et $(X_n)_T$ dans $[T,+\infty]$, et si alors A'_n est défini de la même manière pour ces processus transformés, ils sont encore optionnels ; et $A \cap A'_n \supset A \cap A_n$. Il est automatique que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts recouvrant A, et si X, processus sur A, est optionnel sur A et semi-martingale dans chaque $A \cap A_n$, il est semi-martingale dans A. Si $A = \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, on retrouve les semi-martingales sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, par la proposition (2.4) de S [1].

(6.5 bis) Si $A = [S,T]$, S et T temps d'arrêt, $S \leq T$, et si X est semi-martingale dans A, il est restriction de semi-martingale (30).

(6.5 ter) Si $A = [S,T[$, S et T temps d'arrêt, $S \leq T$, et si X est semi-martingale dans A, il existe une suite croissante $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de temps d'arrêt, $S \leq T_n \leq T$, tendant vers T, telle que, dans chaque $[S,T_n[$, X soit restriction de semi-martingale (30).

(6.5 quarto) Si X est un processus défini sur A à valeurs dans une variété V, il est dit semi-martingale si, pour toute φ réelle C^2 sur V, $\varphi(X)$ est semi-martingale. Si alors Φ est une application C^2 de V dans une variété W, $\Phi(X)$ est aussi une semi-martingale. Supposons V plongée dans un espace vectoriel E ;

56

X est une semi-martingale si et seulement si, d'une part il est restriction d'un processus optionnel sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ à valeurs dans V (V est lusinienne !), et si d'autre part il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts recouvrant A telle que, dans chaque A_n, X soit restriction d'une semi-martingale X_n à valeurs dans E ; on voudrait bien que ce soit à valeurs dans V :

Proposition (6.5 quinto) : Soit X un processus sur un ouvert relatif A de $[S,T]$, S, T temps d'arrêt, $S \leq T$, à valeurs dans une sous-variété V' (non nécessairement fermée) d'une variété V. On suppose en outre que, pour tout $(t,\omega) \in A, t > S(\omega), X(t_-,\omega) \in V'$ (ce qui est toujours réalisé si V' est fermée ou X continue). Si X est semi-martingale à valeurs dans V, il l'est à valeurs dans V', et il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts recouvrant A, telle que, dans chaque $A \cap A_n$, X soit restriction d'une semi-martingale à valeurs dans V'. En particulier, pour un tel A, si X est une semi-martingale dans A à valeurs dans une variété V, il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts recouvrant A, dans chacun desquels il est restriction d'une semi-martingale à valeurs dans V. Si $A = [S,T]$, X est restriction à A d'une semi-martingale à valeurs dans V ; si $A = [S,T[$, il existe $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $S \leq T_n \leq T$, tendant vers T, telle que, dans chaque $[S,T_n[$, X soit restriction d'une semi-martingale à valeurs dans V.

Démonstration : Bornons-nous à A ouvert. Plongeons V comme sous-variété fermée d'un espace vectoriel E ; V' est sous-variété de E, et X semi-martingale à valeurs dans E ; ce qui revient à faire la démonstration avec $V = E$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts recouvrant A telle que, dans chaque $A \cap A_n$, X soit restriction d'une semi-martingale X_n à valeurs dans E. Nous supposerons X_n égale à un élément fixe de V' dans $[0,S[$, et à X_n^T dans $[S,+\infty]$, c-à-d. arrêtée en T. Soit $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts épuisant V'. Soit $s \in \mathbb{Q}_+$. Soit $S_{n,m}$ (c'est abusivement qu'on écrit $S_{n,m}$, on devrait l'écrire $S_{n,m}(s)$) le temps de sortie $\geq s$ de K_m du processus X_n, à valeurs dans $[s,\overline{+\infty}]$ ($S_{n,m} = \overline{+\infty}$ si X_n est dans K_m dans $[s,+\infty]$). C'est un temps d'arrêt. Nous appellerons $|s,S_{n,m}[$ l'intérieur de $[s,S_{n,m}[$; c'est $]s,S_{n,m}[$, sauf pour $s = 0$, où c'est

$[0,S_{n,m}(0)[$. Appelons $X_{n,m}$ (on devrait dire $X_{n,m,s}$) la semi-martingale égale à une constante de K_m dans $[0,s[\times\Omega$ et dans $[s,+\infty]\times\{S_{n,m}=s\}$, et à $X_n^{(S_{n,m})-}$ dans $[s,+\infty]\times\{S_{n,m}>s\}$ (ce sont 3 ensembles semi-martingales) ; elle prend ses valeurs dans K_m (parce que nous avons mis $X^{S_{n,m}-}$ et non $X^{S_{n,m}}$) compact de V', donc [31] c'est une semi-martingale à valeurs dans V ; or $X=X_n=X_{n,m}$ dans $A\cap A_n\cap\,]s,S_{n,m}[$. Il reste à voir que les $A\cap A_n\cap\,]s,S_{n,m}[$, $s\in\mathbb{Q}_+$, $n,m\in\mathbb{N}$, qui sont des ouverts relatifs de A, recouvrent A ; car alors, si $A'_{s,n,m}$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+\times\Omega$, dont l'intersection avec A est $A\cap A_n\cap\,]s,S_{n,m}[$, X sera dans $A\cap A'_{s,n,m}$ la restriction d'une semi-martingale $X_{n,m}$ à valeurs dans V'. Soit $(t,\omega)\in A$, et supposons d'abord t différent des nombres 0, $S(\omega)$, $T(\omega)$, $+\infty$. Puisque $X_n(t_-,\omega)=X(t_-,\omega)$ et $X_n(t,\omega)=X(t,\omega)$, ils sont dans V', et il existe m tel que K_m soit un voisinage de ces deux points dans V'. Puisque X est cadlag, il existe s rationnel $<t$ et $t'>t$ tel que, dans $[S,t']$, $X_n(\omega)=X(\omega)\in K_m$, donc $S_{n,m}(s)(\omega)\geq t'$, et $(t,\omega)\in\,]s,S_{n,m}[\,\cap A\cap A_n$. Il reste à examiner les cas particuliers. Soit $t=0$. On prendra K_m voisinage de $X(0,\omega)=X_n(0,\omega)$ seulement ; on remplace $s<t$ par $s=0$; on trouvera un $t'>0$ tel que $X(\omega)=X_n(\omega)\in K_m$ dans $[0,t']$ si $T(\omega)>0$, et, si $T(\omega)=0$, on prendra $t'=+\infty$, en se rappelant que X_n est arrêtée en T donc qu'alors $X_n(\omega)=X_n(0,\omega)=X(0,\omega)\in K_m$ dans $[0,+\infty]$ donc dans ce cas $S_{n,m}(0)(\omega)=\overline{+\infty}$; on aura alors $S_{n,m}(0)(\omega)\geq t'$, et $(0,\omega)\in[0,S_{n,m}(0)[\,\cap A\cap A_n$. Soit ensuite $t=S(\omega)$, $0<t<+\infty$. On chosit K_m comme dans le cas général ; on prend $s=0$, en se rappelant que X_n est une constante dans $[0,S[$, cette constante est $X_n(t_-,\omega)\in K_m$; puis $t'>t$ tel que $X_n(\omega)=X(\omega)\in K_m$ dans $[t,t']$ si $T(\omega)>S(\omega)$, et, si $T(\omega)=S(\omega)$, $t'=+\infty$ comme plus haut ; ici encore $S_{n,m}(0)(\omega)\geq t'$, et $(t,\omega)\in[0,S_{n,m}(0)[\,\cap A\cap A_n$. Soit ensuite $s=T(\omega)<+\infty$, $S(\omega)<T(\omega)$; on choisit K_m comme dans le cas général ; on prend s comme dans le cas général, et $t'=+\infty$ comme ci-dessus ; on a encore $S_{n,m}(s)(\omega)\geq t'$, et $(T(\omega),\omega)\in\,]s,S_{n,m}[\,\cap A\cap A_n$. Il reste $t=+\infty$. On choisit K_m comme dans le cas général, s aussi si $S(\omega)<+\infty$, et, si $S(\omega)=+\infty$, $s=0$ convient ; alors $S_{n,m}(s)(\omega)=\overline{+\infty}$, et $(+\infty,\omega)\in\,]s,S_{n,m}[\,\cap A\cap A_n$.

Les énoncés finaux résulteront alors des références de [30], où les résultats sont valables pour une variété.

(6.6) Rappelons qu'on peut parler d'équivalence sur A ouvert de deux processus à valeurs vectorielles, ou de deux semi-martingales formelles, mais pas en général d'un processus et d'une semi-martingale formelle. Cependant :

Définition (6.6 bis) : Soient A un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, X un processus sur A, Y une semi-martingale formelle, toutes deux à valeurs vectorielles. On dit que $X \underset{A}{\sim} Y$, s'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts recouvrant A, tels que, sur chaque $A \cap A_n$, X soit équivalent à une semi-martingale vraie X_n, équivalente à Y. Si X' est un autre processus, Y' une autre semi-martingale formelle, si $X \underset{A}{\sim} Y$ et $X' \underset{A}{\sim} Y$, alors $X \underset{A}{\sim} X'$; si $X \underset{A}{\sim} Y$ et $X \underset{A}{\sim} Y'$, alors $Y \underset{A}{\sim} Y'$; si $X \underset{A}{\sim} X'$, $Y \underset{A}{\sim} Y'$, alors $X \underset{A}{\sim} Y \Leftrightarrow X' \underset{A}{\sim} Y'$; et si, dans un sous-ouvert A' de A, X est restriction d'une semi-martingale vraie, ou si Y est une semi-martingale vraie, alors $X \underset{A'}{\sim} Y$ au sens antérieur.

Soient X un processus sur A, Y une semi-martingale formelle. On suppose qu'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts recouvrant A, telle que, dans chaque $A \cap A_n$, X soit équivalent à une semi-martingale X_n. Alors il existe un plus grand sous-ouvert d'équivalence de X et de Y ; si A est optionnel, il est optionnel. Si en effet A'_n est le plus grand ouvert d'équivalence de X_n et Y, qui est optionnel, le plus grand ouvert cherché est $\bigcup_n A \cap A'_n$.

Les hypothèses que nous avons faites là sur X ont l'air d'être beaucoup plus générales que l'hypothèse "X est une semi-martingale dans A". Mais :

Proposition (6.6 ter) : Soit X restriction à A d'un processus optionnel $\overline{X}$. Supposons qu'il existe une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts tels que, dans $A \cap A_n$, X soit équivalente à une semi-martingale X_n. Alors X est une semi-martingale dans A [32].

Démonstration : Soit $s \in \mathbb{Q}_+$, et soit S_n le temps de sortie $\geq s$ de $A \cap A_n$, pris à valeurs dans $[s, +\infty]$ (ce n'est pas un temps d'arrêt, A_n n'est pas supposé optionnel). Dans $[s, S_n[$, $X \sim X_n$, donc $X = X_n + C_n$, C_n processus constant ; ce processus constant peut être étendu en $\overline{C}_n = \overline{X}_s - X_{n,s}$ dans $[s,+\infty]$, et une constante arbitraire dans $[0,s[$; alors $\overline{C}_n$ est une semi-martingale. Donc $X = X_n + \overline{C}_n$ dans $]s,S_n[$, intérieur de $[s,S_n[$, et $\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ s\in\mathbb{Q}_+}}]s,S_n[= A$.

<u>Proposition (6.7)</u> : <u>Soient</u> A <u>un ouvert de</u> $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, X <u>une semi-martingale dans</u> A. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

1) X <u>est continue sur</u> A (<u>nous dirons que</u> X <u>est</u>, <u>dans</u> A, <u>une semi-martingale continue</u>) ;

2) X <u>est équivalente sur</u> A <u>à une semi-martingale continue formelle</u> $\overline{X}$ <u>définie sur</u> $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$.

<u>Démonstration</u> : $2 \Rightarrow 1$ trivialement, montrons $1 \Rightarrow 2$.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts sur chacun desquels X est restriction d'une semi-martingale X_n ; X étant optionnel dans A, on peut supposer les A_n optionnels ; X_n est continue sur $A \cap A_n$ donc équivalente sur $A \cap A_n$ à une semi-martingale continue formelle $\overline{X}_n$, par (6.4 ter). Mais $\overline{X}_m \sim X_m \sim X_n \sim \overline{X}_n$ sur $A \cap A_m \cap A_n$. Donc, par (6.3 ter), il existe une semi-martingale continue formelle $\overline{X}$, $\overline{X} \sim \overline{X}_n \sim X_n = X$ sur $A \cap A_n$ pour tout n, donc $\overline{X} \sim X$ sur A.

<u>Remarque</u> : Si alors X est semi-martingale dans A, il existe un plus grand sous-ouverts A' d'équivalence à une semi-martingale continue formelle, c'est l'intérieur de l'ensemble des points de continuité de X' ; si A est optionnel, il est optionnel [X est optionnel sur A optionnel. Le processus X_- : $t \to X_{t_-}$, égal à $(X_n)_{t_-}$ sur A_n optionnel, est optionnel sur A_n, donc sur A. Alors $\{X = X_-\}$, ensemble des points de continuité dans A, est optionnel, et son intérieur aussi].

<u>(6.8)</u> On peut définir beaucoup d'intégrales stochastiques. La seule dont nous aurons besoin est la suivante. Soit X la classe d'équivalence sur A d'une semi-martingale continue formelle $\tilde{X}$; soit f la restriction à A d'une fonction optionnelle $\overline{f}$. Alors on pose $f \cdot X$ = classe d'équivalence sur A de

60

$\overline{f}\cdot\tilde{X}$; elle ne dépend que de f et X, non de $\overline{f}$ et $\overline{X}$. Ce n'est pas un processus ni une semi-martingale formelle, mais seulement une classe d'équivalence sur A de semi-martingales continues formelles. On a $f\cdot(g\cdot X)=fg\cdot X$.

Soit en particulier X une semi-martingale continue dans A, à valeurs dans E, restriction d'un processus optionnel $\overline{X}$; on a vu (6.7) que X est équivalente sur A à une semi-martingale continue formelle $\tilde{X}$. Soit Φ une application C^2 de E dans un espace vectoriel F. Alors $\Phi(X)$ est semi-martingale continue dans A, restriction d'un processus optionnel $\Phi(\overline{X})$, donc aussi équivalente à une semi-martingale continue formelle $\Phi(X)$; calculons-la. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recouvrant A, tels que X soit égale dans $A\cap A_n$ à une semi-martingale X_n, forcément $\sim\tilde{X}$. Dans $A\cap A_n$,

$$\Phi(X) = \Phi(X_n)\sim\Phi'(X_{n_-})\cdot X_n+\frac{1}{2}\Phi''(X_n)\cdot\langle X_n^c,X_n^c\rangle \quad ,$$

où X_{n_-} est $t\mapsto X_{n,t_-}$; les termes discontinus n'ont pas été mis ; ils sont ~ 0 dans $A\cap A_n$; ceci est équivalent à $\Phi'(X_{n_-})\cdot\tilde{X}+\frac{1}{2}\Phi''(X_n)\cdot\langle\tilde{X}^c,\tilde{X}^c\rangle$; mais alors on peut remplacer X_{n_-} par X_n, et $\Phi'(X_n)$ par $\Phi'(\overline{X})$, optionnel qui le prolonge. Donc, dans $A\cap A_n$, et par conséquent dans A, $\Phi(X)$ est équivalente à

$$\Phi(X) = \Phi'(\overline{X})\cdot\tilde{X}+\frac{1}{2}\Phi''(\overline{X})\cdot\langle\tilde{X}^c,\tilde{X}^c\rangle \quad . \tag{6.9}$$

D'après la définition (6.8) de l'intégrale stochastique, cela pourra s'abréger par la formule d'Itô usuelle,

$$\Phi(X) = \Phi'(X)\cdot X+\frac{1}{2}\Phi''(X)\cdot\langle X^c,X^c\rangle \quad , \tag{6.10}$$

où X veut dire, dans $\Phi(X)$, $\Phi'(X)$, $\Phi''(X)$, la restriction de $\overline{X}$, et dans $\Phi(X)$, $\cdot X$, $\cdot\langle X^c,X^c\rangle$, la classe d'équivalence $\tilde{X}$. Il est donc à la fois $\overline{X}$ et $\tilde{X}$; mais X^c, $\langle X^c,X^c\rangle$ n'existent que comme classes $\tilde{X}^c$, $\langle\tilde{X}^c,\tilde{X}^c\rangle$. Le plus intéressant est, en fait, (6.9), qui donne $\Phi(X)$, à partir de $\overline{X}$, $\tilde{X}$.

Bien entendu, si X prend ses valeurs dans un ouvert U de E, on peut choisir $\overline{X}$ à valeurs dans U ; mais $\tilde{X}$ n'est qu'à valeurs dans E, et rien d'autre n'aurait de sens ! On choisit des A_n, des X_n à valeurs dans U (6.5 quinto), et il suffit alors que Φ soit définie et C^2 de U dans F.

(6.11) Une semi-martingale continue formelle $\overline{X}$ définit une mesure $\mu_{\overline{X}} = d\overline{X}$ qui est toujours σ-finie : il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties optionnelles de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, $d\overline{X}$-intégrables. Nous dirons que $d\overline{X}$ est localement bornée s'il existe une suite d'ouverts optionnels $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $d\overline{X}$-intégrables, c-à-d. tels que $1_{A_n} \bullet \overline{X}$ soit une semi-martingale continue vraie [comparer à ceci : une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$ est non seulement σ-finie, elle est localement bornée !] ; et que $\overline{X}$ est localement bornée sur un ouvert A de $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, s'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts optionnels recouvrant A tels que $1_{A_n} \bullet \overline{X}$ soit équivalente sur A à une semi-martingale continue vraie.

Voici alors une proposition évidente, et sans doute peu utile :

Proposition (6.12) : Soit X un processus sur A. Pour qu'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts optionnels recouvrant A, telle que X soit, sur chaque $A \cap A_n$, équivalente à une semi-martingale continue X_n, il faut et il suffit que X soit équivalente sur A à une semi-martingale formelle continue $\overline{X}$, $d\overline{X}$ localement bornée sur A.

Démonstration : Soit X admettant des A_n comme indiqués. Par (6.3 ter), et la définition (6.6 bis), on construit $\overline{X}$ semi-martingale continue formelle $\underset{A}{\sim} X$. Mais, sur $A \cap A_n$, $\overline{X} \sim X_n$ semi-martingale continue vraie, donc $1_{A_n} \bullet \overline{X} \underset{A}{\sim} 1_{A_n} \bullet X_n$ (voir démonstration de (6.3 ter)) semi-martingale continue vraie, $d\overline{X}$ est localement bornée sur A.

Inversement, soit $X \underset{A}{\sim} \overline{X}$, $d\overline{X}$ localement bornée sur A ; soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts optionnels recouvrant A, tels que $1_{A_n} \bullet \overline{X} \underset{A}{\sim} X_n$, semi-martingale continue vraie. Alors $X \underset{A\cap A_n}{\sim} \overline{X} \underset{A\cap A_n}{\sim} 1_{A_n} \bullet \overline{X} \underset{A\cap A_n}{\sim} X_n$.

Remarques : En conséquence, dans (6.4 ter), si X est continue sur A, elle y est équivalente à une semi-martingale continue formelle $\overline{X}$, $d\overline{X}$ localement bornée sur A. On peut en effet prendre A optionnel, et la démonstration montre que, dans chaque $]s,S[$, X est équivalente à une semi-martingale continue vraie, on peut donc appliquer (6.12). Il en est donc de même dans (6.7) : chaque $\overline{X}_n$ est localement bornée sur $A \cap A_n$; donc il existe une suite $(A_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ d'ouverts optionnels telle que chaque $1_{A_{n,m}} \cdot \overline{X}_n$ soit équivalente sur $A \cap A_n$ à une semi-martingale continue vraie $X'_{n,m}$; $\bigcup_{n,m} A_{n,m} \supset A$; mais $\overline{X} \underset{A\cap A_{n,m}}{\sim} \overline{X}_n$ donc (voir démonstration de (6.3 ter)) $1_{A_{n,m}} \cdot \overline{X} \underset{A}{\sim} 1_{A_{n,m}} \cdot \overline{X}_n \underset{A}{\sim} 1_{A_{n,m}} \cdot X'_{n,m}$, semi-martingale continue ; $d\overline{X}$ est localement bornée sur A.

§ 7. ESPACES STABLES DE SEMI-MARTINGALES CONTINUES FORMELLES

Résumé du § 7. La théorie des espaces stables se traite bien mieux en semi-martingales formelles qu'en semi-martingales vraies. (7.1), page 63, en donne la définition. (7.3), page 64, étend au formel des propriétés classiques des espaces stables de martingales. Le principal résultat, qui donne l'avantage essentiel des semi-martingales formelles sur les martingales, est (7.4), page 65, et (7.5), page 66 : tout sous-$\mathcal{O}$pt-module de type fini de $\mathcal{J}\mathcal{M}^c$ est fermé, donc stable. La démonstration de ce théorème existait déjà, avec un autre énoncé, bien plus compliqué ; ici l'énoncé est devenu très simple, avec une démonstration analogue, mais simplifiée (l'intégrabilité n'y figure jamais, puisqu'on travaille en formel). (7.6), page 68, étudie les espaces stables et crochets-stables, qui seront utilisés sur les variétés (article ultérieur).

Dans ce §, semi-martingale (formelle) voudra dire semi-martingale continue (formelle), et martingale (formelle) voudra dire martingale locale continue (formelle).

Définition (7.1) : Un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}\mathcal{M}^c$ (resp. $\mathcal{O}pt\ \mathcal{S}\mathcal{M}^c$) est dit stable, si c'est un sous-B$\mathcal{O}$pt-module (resp. sous-$\mathcal{O}$pt-module) fermé. Montrons que cela revient à la définition de S [1] dans le cas de $\mathcal{M}^c$. Soit $\mathfrak{N}$ un sous-B$\mathcal{O}$pt-module fermé de $\mathcal{M}^c$; il est stable par arrêt, parce que $M^T = 1_{]0,T]} \cdot M$; il est stable par limite croissante de temps d'arrêt $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant stationnairement $+\infty$, car si $M \in \mathcal{M}^c$ et si les M^{T_n} sont dans $\mathfrak{N}$, M en est la limite dans $\mathcal{M}^c$ donc $M \in \mathfrak{N}$; enfin $\mathfrak{N} \cap \mathcal{M}^2$ est fermé dans $\mathcal{M}^2$ parce que la topologie de $\mathcal{M}^2$ est plus fine que la topologie induite par $\mathcal{M}^c$; donc $\mathfrak{N}$ est stable dans $\mathcal{M}^c$ au sens de S [1]. Inversement soit $\mathfrak{N}$ un sous-espace stable dans $\mathcal{M}^c$ au sens de S [1] ; nous y avons vu qu'il est un sous-B$\mathcal{O}$pt-module, il reste à voir qu'il est fermé dans $\mathcal{M}^c$. Or, si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M dans $\mathcal{M}^c$, il existe une suite $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ croissante de temps d'arrêt, convergeant stationnairement vers $+\infty$, et une suite partielle $\overline{M}_n$, telles que $\overline{M}_n^{T_k}$ converge vers M^{T_k} dans $\mathcal{M}^2$, pour tout k ; si les M_n sont dans $\mathfrak{N}$, les $\overline{M}_n^{T_k}$ aussi, donc M^{T_k} aussi, donc M aussi, et $\mathfrak{N}$ est fermé dans $\mathcal{M}^c$. Les deux définitions sont bien équivalentes, mais celle-ci est bien plus légère ; et elle s'applique aussitôt à $\mathcal{O}pt\ \mathcal{M}^c$.

Définitions (7.2) : 1) On dit que deux processus à variation finie formels V, W, sont orthogonaux si dV, dW, sont portés par deux ensembles optionnels disjoints. En utilisant un multiplicateur γ, cela veut dire que $\gamma\, dV$, $\gamma\, dW$ sont disjoints. Quitte à changer $\lambda \in \Lambda$, de manière à rendre $\int_{]0,+\infty]} \gamma_s |dV_s|$ et $\int_{]0,+\infty]} \gamma_s |dW_s|$ intégrables, cela veut dire que les mesures réelles ≥ 0 sur $(\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega, \mathcal{O}pt)$: $\varphi \mapsto \mathbb{E}_\lambda \int_{]0,+\infty]} \varphi_s \gamma_s |dV_s|$, $\varphi \mapsto \mathbb{E}_\lambda \int_{]0,+\infty]} \varphi_s \gamma_s |dW_s|$, respectivement équivalentes à dV, dW, sont disjointes ; ou que, pour Λ-presque tout ω, les mesures réelles formelles sur $\overline{\mathbb{R}}_+$, $dV(\omega)$, $dW(\omega)$, sont disjointes.

2) On dit que deux martingales formelles M, N, sont orthogonales, si $[M,N] = 0$.

3) On dit que deux semi-martingales formelles $X = V + M$, $Y = W + N$, sont orthogonales, si V et W sont orthogonales, et M et N sont ortho-

<u>gonales. En particulier,</u> $\mathcal{V}^c$ et $\mathcal{M}^c$ <u>sont orthogonaux.</u>

Etudions maintenant l'orthogonalité dans $\mathcal{M}^c$:

<u>Proposition (7.3)</u> [33] : <u>Soit</u> $\mathcal{K}$ <u>une partie de</u> $\mathcal{M}^c$ (<u>resp.</u> $\mathcal{O}pt\ \mathcal{M}^c$) ; <u>son orthogonal</u> $\mathcal{K}^+$ <u>dans</u> $\mathcal{M}^c$ <u>est stable, et</u> $\mathcal{K}^{++}$ <u>est le plus petit sous-espace stable contenant</u> $\mathcal{K}$. <u>Si</u> $\mathfrak{N}$ <u>est stable,</u> $\mathcal{M}^c$ (<u>resp.</u> $\mathcal{O}pt\ \mathcal{M}^c$) <u>est somme directe orthogonale</u> $\mathfrak{N} + \mathfrak{N}^+$.

<u>Si</u> $M, N \in \mathcal{O}pt\ \mathcal{M}^c$, $[M,N]$ <u>est de base</u> $[M,M]$, <u>c-à-d. il existe</u> D <u>optionnel, unique à un ensemble</u> dM-<u>négligeable près, tel que</u> $[M,N] = D \bullet [M,M]$; <u>alors la projection orthogonale de</u> N <u>sur le sous-espace stable engendré par</u> M <u>est</u> $D \bullet N$. <u>On écrit</u> $D = \frac{d[M,N]}{d[M,M]}$. <u>Plus généralement, la projection orthogonale de</u> N <u>sur le sous-espace stable engendrée par</u> $(M_k)_{k=1,2,\dots,m}$, <u>système de martingales formelles orthogonales, est</u> $\sum_{k=1}^{m} \frac{d[N,M_k]}{d[M_k,M_k]} \bullet M_k$.

<u>Démonstration</u> : Tout est à peu près évident, en se ramenant aux martingales vraies. Par exemple, si $\gamma > 0$ borélienne bornée est dM et dN-intégable,

$$\begin{aligned}[M,N] &= \frac{1}{\gamma^2} \bullet (\gamma^2 \bullet [M,N]) = \frac{1}{\gamma^2} \bullet [\gamma \bullet M, \gamma \bullet N] \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \bullet (D \bullet [\gamma \bullet M, \gamma \bullet M]) = \frac{1}{\gamma^2} \bullet (D \bullet (\gamma^2 \bullet [M,M])) \\ &= D \bullet [M,M] \quad .\end{aligned}$$

A la fin, $\sum_{k=1}^{m} D_k \bullet M_k$, $D_k = \frac{d[N,M_k]}{d[M_k,M_k]}$, est dans le sous-espace stable engendré, et $M - \sum_{k=1}^{m} D_k \bullet M_k$ est orthogonale aux M_k donc au sous-espace stable qu'elles engendrent, donc $\sum_{k=1}^{m} D_k \bullet M_k$ est bien la projection orthogonale de N. Maintenant vient le résultat intéressant, qui montre la grande supériorité des martingales formelles sur les martingales. Un sous-$\mathcal{B}\mathcal{O}pt$-module engendré par une martingale $M \in \mathcal{M}^c$ n'est pas fermé dans $\mathcal{M}^c$ (voir (2.6)) ; mais le sous-

$\mathcal{B}$Opt-module fermé et engendré par M, c-à-d. le sous-espace stable engendré, est en tout cas l'ensemble des $h \bullet M$, h dM-intégrable. Si les M_k, $k = 1,2,\ldots,m$, sont des martingales orthogonales, le sous-espace stable engendré dans $\mathcal{M}^c$ est l'ensemble de $\sum_{k=1}^{m} h_k \bullet M_k$, h_k dM_k-intégrable. Mais, dans $\mathcal{M}^c$, ce résultat ne subsiste plus du tout si les M_k ne sont plus orthogonales ; il y a des M du sous-espace stable engendré qui ne peuvent pas s'écrire $\sum_{k=1}^{m} h_k \bullet M_k$, h_k dM_k-intégrable. Mais nous allons voir, et c'est là l'intérêt principal des martingales formelles, que, si les M_k sont des martingales formelles, orthogonales ou non, le sous-espace stable engendré dans $\mathcal{O}$pt $\mathcal{M}^c$ est l'ensemble des $\sum_{k=1}^{m} h_k \bullet M_k$. Si donc $M \in \mathcal{M}^c$ est dans le sous-espace stable engendré dans $\mathcal{M}^c$ par des $M_k \in \mathcal{M}^c$, on aura bien encore (mais pas de manière unique) $M = \sum_{k=1}^{m} h_k \bullet M_k$, mais h_k ne sera pas en général dM_k-intégrable, $h_k \bullet M_k$ sera seulement une martingale formelle. Ce sera vrai aussi pour des semi-martingales.

Proposition (7.4) : Tout sous-$\mathcal{O}$pt-module de type fini de $\mathcal{V}^c$ est engendré par un seul élément et fermé ; tout sous-$\mathcal{O}$pt-module de type fini de $\mathcal{O}$pt $\mathcal{M}^c$ est fermé. Si $(X_k)_{k=1,2,\ldots,m}$ sont tous des éléments de $\mathcal{O}$pt $\mathcal{V}^c$, ou tous de $\mathcal{O}$pt $\mathcal{M}^c$, le sous-$\mathcal{O}$pt-module stable engendré est l'ensemble des $\sum_{k=1}^{m} h_k \bullet X_k$.

Démonstration : Prenons d'abord le cas de $\mathcal{O}$pt $\mathcal{V}^c$. Si $V_1, V_2, \ldots, V_m \in \mathcal{O}$pt $\mathcal{V}^c$, et si V est le processus croissant formel $W = \sum_{k=1}^{m} |dV_k|$, il existe α_k optionnelle, partout égale à ± 1, telle que $|dV_k| = \alpha_k\, dV_k$, $dV_k = \frac{1}{\alpha_k} |dV_k|$, donc $dV = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\, dV_k$; d'autre part $|dV_k|$ est majorée par dV, donc il existe β_k optionnelle, $|\beta_k| \leq 1$, telle que $dV_k = \beta_k\, dV$. Le sous-$\mathcal{O}$pt-module engendré par les V_k coïncide donc avec le sous-$\mathcal{O}$pt-module engendré par V ; et on sait, par (2.6), que tout sous-$\mathcal{O}$-module de $\mathrm{Mes}(\Omega,\mathcal{O},E)$, engendré par un seul élément, est fermé.

Passons au cas de $\mathcal{M}^c$. C'est évident si les M_k sont orthogonales, puisque, si M est dans le sous-espace stable engendré, (7.3) montre que $M = \sum_k D_k \bullet M_k$, $D_k = \frac{d[M,M_k]}{d[M_k,M_k]}$. Si les M_k sont quelconques, on forme son système orthogonalisé de Schmidt $(N_k)_{k=1,2,\ldots,m}$:

$$N_1 = M_1 \quad , \quad N_2 = M_2 - \frac{d[M_2,N_1]}{d[N_2,N_1]} \bullet N_1 , \ldots\ldots ,$$

$$N_k = M_k - \frac{d[M_k,N_1]}{d[N_1,N_1]} \bullet N_1 - \ldots - \frac{d[M_k,N_{k-1}]}{d[N_{k-1},N_{k-1}]} \bullet N_{k-1} \quad ;$$

donc N_k est dans le sous-$\mathcal{O}$pt-module engendré par $N_1,N_2,\ldots,N_{k-1}$, M_k, donc par récurrence le sous-$\mathcal{O}$pt-module engendré par les M_k contient les N_k ; mais inversement, M_k est dans le sous-$\mathcal{O}$pt-module engendré par les $N_1,N_2,\ldots,N_{k-1},N_k$, donc le sous-$\mathcal{O}$pt-module engendré par les N_k contient les M_k ; ces deux sous-$\mathcal{O}$pt-modules coïncident. Mais les N_k sont orthogonales, le sous-$\mathcal{O}$pt-module qu'elles engendrent est fermé.

<u>Remarque</u> : Il n'est pas inutile de voir en détail ce qui se passe pour $m = 2$, M_1, M_2, $M \in \mathcal{M}^c$. Alors $N_1 = M_1$, $N_2 = M_2 - D \bullet M_1$, $D = \frac{d[M_2,M_1]}{d[M_1,M_1]}$, D est dM_1-intégrable. Ensuite $M = H_1 \bullet N_1 + H_2 \bullet N_2$, H_1 dN_1-intégrable, H_2 dN_2-intégrable, donc $M = (H_1 - DH_2) \bullet M_1 + H_2 \bullet M_2$; $H_1 - DH_2$ n'est pas nécessairement dM_1-intégrable, H_2 n'est pas nécessairement dM_2-intégrable.

Le résultat suivant est plus délicat :

<u>Proposition (7.5)</u> : <u>Tout sous-$\mathcal{O}$pt-module de type fini de $\mathcal{S}\mathcal{M}^c$ est fermé. Le sous-$\mathcal{O}$pt-module stable engendré par $(X_k)_{k=1,2,\ldots,m}$ est l'ensemble des intégrales stochastiques $\sum_{k=1}^{m} h_k \bullet X_k$, h_k optionnelles.</u>

Ce résultat est dû à Memin (34) (dans le cas très semblable de semi-martingales non nécessairement continues, avec des intégrales stochastiques de fonctions prévisibles). La démonstration que nous donnons ici est calquée sur celle de S [1], proposition (6.4), page 74.

<u>Démonstration</u> : Soient $Y_n = \sum_{k=1}^{m} h_{k,n} \bullet X_k$ des semi-martingales formelles convergeant vers Y dans $\mathcal{O}$pt $\mathcal{S}\mathcal{M}^c$. Posons $X_k = V_k + M_k$, $V_k \in \mathcal{O}$pt $\mathcal{V}^c$, $M_k \in \mathcal{O}$pt $\mathcal{M}^c$.

Comme $\mathcal{O}pt\ \mathcal{M}^c = \mathcal{O}pt\ \mathcal{V}^c \oplus \mathcal{O}pt\ \mathcal{M}^c$, somme directe topologique, $Y = W + N$, les $\sum_{k=1}^{m} h_{k,n} \bullet V_k$ convergent vers W dans $\mathcal{O}pt\ \mathcal{V}^c$, les $\sum_{k=1}^{m} h_{k,n} \bullet M_k$ convergent vers N dans $\mathcal{O}pt\ \mathcal{M}^c$.

Soit $dV = \sum_{k=1}^{m} |dV_k|$, $dV = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\, dV_k$, $dV_k = \beta_k\, dV$ (voir démonstration de (7.4)). D'après (7.4), dW est dans le sous-module engendré par les V_k, $W = \rho \bullet V$; en outre, par (2.5), quitte à extraire une suite partielle, on peut supposer que $\sum_{k=1}^{m} h_{k,n}\, \beta_k$ converge dV-pp. vers ρ pour $n \to +\infty$; quitte à remplacer β_k et ρ par 0 sur un ensemble optionnel dV-négligeable, on peut supposer qu'il y a convergence partout. Ensuite, d'après (7.4) encore, N est dans le sous-$\mathcal{O}pt$-module engendré par les M_k ; si $(M'_k)_{k=1,2,\dots,m}$ est l'orthogonalisé de Schmidt de $(M_k)_{k=1,2,\dots,m}$, $M_k = \sum_{\ell=1}^{m} \beta_{k,\ell} \bullet M'_\ell$, $M'_k = \sum_{\ell=1}^{m} \alpha_{k,\ell} \bullet M_\ell$; $\sum_{k=1}^{m} h_{k,n} \bullet M_k = \sum_{k,\ell=1}^{m} h_{k,n}\, \beta_{k,\ell} \bullet M'_\ell$ converge vers $N = \sum_{k=1}^{m} \sigma_\ell \bullet M'_\ell$ pour $n \to +\infty$.
Mais si $\sum_{\ell=1}^{m} \theta_{\ell,n} \circ M'_\ell$ converge vers 0 dans $\mathcal{O}pt\ \mathcal{M}^c$ pour $n \to +\infty$, $\sum_{\ell=1}^{m} \theta^2_{\ell,n} \bullet [M'_\ell, M'_\ell]$ converge vers 0 dans $\mathcal{O}pt\ \mathcal{V}^c$, donc chaque $\theta^2_{\ell,n}[M'_\ell, M'_\ell]$ aussi, et réciproquement ; quitte à extraire une suite partielle (2.5), on peut supposer que, pour tout ℓ, $\theta_{\ell,n}$ converge dM_ℓ-pp. vers 0. Donc $\sum_{k=1}^{m} h_{k,n}\, \beta_{k,\ell}$ converge dM'_ℓ-pp. vers σ_ℓ pour tout $\ell = 1,2,\dots,m$; quitte à remplacer $\beta_{k,\ell}$ et σ_ℓ par 0 sur un ensemble DM'_ℓ-négligeable, on peut supposer que c'est partout. Nous voulons montrer l'existence de $(h_k)_{k=1,2,\dots,m}$ optionnelles, telles que

$$\rho \bullet V + \sum_{\ell=1}^{m} \sigma_\ell \bullet M'_\ell = W + N = Y = \sum_{k=1}^{m} h_k \bullet V_k + \sum_{k=1}^{m} h_k \bullet M_k$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{m} h_k\, \beta_k\Big) \bullet V + \sum_{\ell=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{m} h_k\, \beta_{k,\ell}\Big) \bullet M'_\ell \quad ,$$

c-à-d. telles que $\sum_{k=1}^{m} \beta_k\, h_k = \rho$ dV-pp., $\sum_{k=1}^{m} \beta_{k,\ell}\, h_k = \sigma_\ell$ dM'_ℓ-pp., $\ell = 1,2,\dots,m$. Nous le montrerons partout.

Considérons l'application $(\xi_k)_{k=1,2,\dots,m} \mapsto (\eta, (\eta_\ell)_{\eta=1,2,\dots,m})$ de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$, définie par $\eta = \sum_{k=1}^{m} \beta_k(t,\omega)\xi_k$, $\eta_\ell = \sum_{k=1}^{m} \beta_{k,\ell}(t,\omega)\xi_k$. Son image est fermée (espace de dimension finie !). Pour tout n, $(\eta_n, (\eta_{\ell,n})_{\ell=1,2,\dots,m})$, où

$\eta_n = \sum_{k=1}^{m} \beta_k(t,\omega)h_{k,n}(t,\omega)$, $\eta_{\ell,n} = \sum_{k=1}^{m} \beta_{k,\ell}(t,\omega)h_{k,n}(t,\omega)$ est dans l'image, donc aussi sa limite pour $n \to \infty$, $(\rho(t,\omega),(\sigma_\ell(t,\omega))_{\ell=1,2,\dots,m})$. En outre, la recherche, pour $(\eta,(\eta_\ell)_{\ell=1,2,\dots,m})$, de $(\xi_k)_{k=1,2,\dots,m}$, est la résolution d'un système de m+1 équations linéaires à m inconnues ; quand il a une solution, elle peut s'exprimer par des quotients de déterminants, elle peut donc s'exprimer comme une fonction borélienne des données (voir S [1] , page 78) ; ρ, σ_ℓ sont optionnelles, donc on peut choisir les h_k optionnelles, cqfd.

<u>Définition (7.6)</u> : <u>Un espace stable et crochet-stable</u> $\mathfrak{N}$ <u>de semi-martingales (formelles) est un espace stable</u>, <u>tel que</u> $X \in \mathfrak{N}$, $Y \in \mathfrak{N}$, <u>implique</u> $[X,Y] \in \mathfrak{N}$.

<u>Remarque</u> : Si $(X_k)_{k)1,2,\dots,m}$ sont de vraies semi-martingales, le sous-$\mathcal{O}$pt-module stable et crochet-stable engendré est donc le sous-$\mathcal{O}$pt-module engendré par les X_k, et les $[X_i,X_j]$; ou aussi par les X_k et les X_iX_j, par Itô, $X_iX_j = X_i \bullet X_j + X_j \bullet X_i + [X_i,X_j]$. Il contient alors aussi toutes les $\varphi(X_1,X_2,\dots,X_m) - \varphi(X_{1,o},\dots,X_{m,o})$ par Itô, φ de classe C^2.

<u>Proposition (7.7)</u> : <u>Si</u> $\mathfrak{N}$ <u>est stable et crochet-stable</u>, $X \in \mathfrak{N}$ <u>implique</u> $X^c \in \mathfrak{N}$, $\tilde{X} \in \mathfrak{N}$; <u>donc</u> $\mathfrak{N} = (\mathfrak{N} \cap \mathcal{O}pt\, \mathcal{V}^c) \oplus (\mathfrak{N} \cap \mathcal{O}pt\, \mathcal{M}^c)$, <u>somme directe topologique</u>.

<u>Démonstration</u> : On peut écrire $V = D \bullet [M,M] + V'$, D optionnelle d[M,M]-intégrable, dV' et d[M,M] portées par des ensembles optionnels (et même prévisibles) disjoints. Mais $[X,X] = [M,M] \in \mathfrak{N}$, donc $D \bullet [M,M] \in \mathfrak{N}$. Soit α la fonction caractéristique d'un ensemble optionnel d[M,M]-négligeable, donc dM-négligeable, et portant dV'. Alors $\alpha \bullet X \in \mathfrak{N}$, mais $\alpha \bullet X = V'$ donc $V' \in \mathfrak{N}$, donc $V \in \mathfrak{N}$ et par suite $M \in \mathfrak{N}$.

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
<u>91128 PALAISEAU CEDEX</u>

N O T E S

(1) page 3. On trouvera une étude de ces mesures, pour E Banach, dans Dunford-Schwartz [1],

Bien que Erik Thomas [1], [2], n'ait étudié que des mesures de Radon, il l'a fait dans [2] pour E arbitraire, et certains de ses résultats, que nous citerons plus loin, sont nouveaux et importants, aussi pour des mesures abstraites. Récemment, K. Bichteler [1] a étudié les mesures abstraites à valeurs dans E non localement convexe, par exemple $E = L^0$, exactement pour les appliquer aux semi-martingales.

(2) page 5. Il semble que, pour E métrisable non localement convexe, tous les auteurs antérieurs aient utilisé la métrique plutôt que les jauges. Comme je le signale, c'est désavantageux, parce que la distance à l'origine n'est pas positivement homogène, $d(0,Rx) \neq |R|\, d(0,x)$, et qu'elle est souvent bornée. Par exemple, pour un espace $E = L^0(\Omega,\mathcal{O},\lambda)$, λ probabilité, la distance usuelle $d(0,f) = \mathbb{E}(|f| \wedge 1)$ est bornée par 1.

(3) page 10. Voir Erik Thomas [1], théorème (1.22), page 74, et [2], théorème (1.9), page 14.

(4) page 10. Voir Lindenstrauss-Tzafriri, [1], proposition 2.e.4, page 98.

(5) page 11. Voir Erik Thomas [1], théorème (4.7), page 125, et [2], corollaire (2.1), page 27.

(6) page 11. L. Schwartz [2].

(7) page 24. La présente étude est aussi celle qu'a faite K. Bichteler [1].

(8) page 25. M[1], théorème 33, page 311, et Note (*), page 313 ; cité dans S[1], Note (4), page 9.

(9) page 27. L'un des résultats entraîne l'autre. Soit $T_n = \operatorname{Inf}\{t \in \overline{\mathbb{R}}_+ ; |\varphi_n(t)| \geq \varepsilon\}$.

Alors $\lambda\{\operatorname{Sup}_t |(\varphi_n \cdot X)_t| > \varepsilon\} \leq \lambda\{|(\varphi_n \cdot X)_{T_n}| \geq \varepsilon\} = \lambda\{|(\varphi_n 1_{]0,T_n]} \cdot X)_\infty| \geq \varepsilon\}$.

Mais $\varphi_n 1_{]0,T_n]}$ converge vers 0 en restant bornée en module par 1, donc la dernière quantité tend vers 0, donc aussi la première.

(10) page 27. Voir S[1], proposition (3.2), page 17.

(11) page 27. Voir J. Jacod [1], théorème (7.24), page 224.

(12) page 27. Voir P.A. Meyer [2]. Article de P.A. Meyer : Caractérisation des semi-martingales, d'après Dellacherie, pages (620-623).

(13) page 28. J. Pellaumail [1].

(14) page 28. C'est précisément ce que fait K. Bichteler [1].

(15) page 29. Voir J. Jacod [1], chapitre IX.

(16) page 29. J. Jacod [1], théorème (7.42), page 235.

(17) page 31. Voir Dunford-Schwartz [1], IV, 10.5, page 321.

(18) page 31. Théorème dû à Maurey [1].

(19) page 33. Pour tout ce qui concerne la topologie d'Emery sur $\mathcal{S}\mathcal{M}$, voir Emery [1].

(20) page 38. On peut écrire toute semi-martingale X comme somme d'un processus de sauts, épuisant tous les sauts de module ≤ 1, et d'une semi-martingale à sauts bornés en module par 1, donc spéciale.

(21) page 38. C'est aussi Emery [1] qui a introduit les espaces H^p de semi-martingales.

(22) page 38. Voir Emery [1], proposition 4.

(23) page 38. Voir Marc Yor [1].

(24) page 45. Pour les espaces H^p de semi-martingales, voir Emery [1].

(25) page 47. Voir S[1], (3.7), page 24.

(26) page 48. Cet exemple est étudié dans C. Dellacherie [1], ch. IV, 52, page 63, et ch. V, 55, page 122.

(27) page 50. Dans S[1], la décomposition canonique d'une semi-martingale est écrite $X = X^d + X^c$, X^c partie martingale locale continue ou compensée, X^d

compensateur, que j'ai eu tort d'appeler "partie purement discontinue", puisqu'elle peut être un processus à variation finie continu. L'écriture généralement adoptée semble être $X = \tilde{X} + X^c$.

(28) page 55. C'est une propriété générale : si $A \subset \Omega$, si f est une fonction sur A à valeurs dans F lusinien, mesurable pour $\mathcal{O} \cap A$, elle est prolongeable en $\overline{f}$ sur Ω, $\mathcal{O}$-mesurable. C'est en effet évident si $F = \mathbb{N}$, car $f^{-1}\{n\} = A_n = A \cap \Omega_n$, $\Omega_n \in \mathcal{O}$, et on peut supposer les Ω_n deux à deux disjointes ; on prend $\overline{f} = n$ sur Ω_n , $= 0$ sur $\complement \bigcup_n \Omega_n$. Soit ensuite $F = [0,1]$. On sait alors que f est limite d'une suite croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions sur A, $A \cap \mathcal{O}$-mesurables, chacune ne prenant qu'un nombre fini de valeurs ; f_n admet un prolongement $\overline{f}_n$ $\mathcal{O}$-mesurable sur Ω, et on prend $\overline{f} = \operatorname{Sup}_n \overline{f}_n$. Enfin F lusinien arbitraire est toujours, en tant qu'ensemble muni d'une tribu, isomorphe à une partie borélienne F de $[0,1]$; on peut prolonger f en $\overline{\overline{f}}$, $\mathcal{O}$-mesurable, à valeurs dans $[0,1]$; on prend $\overline{f} = \overline{\overline{f}}$ sur $\overline{\overline{f}}^{-1}(F) \in \mathcal{O}$, $= a \in F$ sur $\overline{\overline{f}}^{-1}(\complement F)$.

(29) page 55. Cette définition est due à P.A. Meyer [3].

(30) page 55. (6.5 bis) est dû à P.A. Meyer et moi, (6.5 ter) à Stricker. Voir S[1], Note (5), page 10, et P.A. Meyer [3] "Sur un résultat de L. Schwartz", pages 102-103, et Stricker [1].

(31) page 57. S[1], lemme (2.1), page 8.

(32) page 58. Théorème dû à P.A.Meyer, à paraître dans Advances in Math.

(33) page 64. Ces résultats se trouvent un peu partout dans le cas des semi-martingales vraies. Voir S[1], § 6, et J. Jacod [1], chapitre IV.

(34) page 66. Memin [1], théorème (V.4), page 36.

(35) page 37. Voir P.A. Meyer [1].

(36) page 43. Voici un contre-exemple très simple, dû à Stricker. Soit $(M_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ une martingale à temps discret, indexée par $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Si on pose $X_t = M_n$ pour $n \leq t < n+1$, $n \in \mathbb{N}$, on obtient une martingale X sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$, accessible, purement discontinue ($X^c = 0$). Si l'on a $X = V + M$, V à varia-

tion finie, M martingale locale continue, on a nécessairement $\sum_s |\Delta X_s| = \sum_s |\Delta V_s| < +\infty$; or c'est $\sum_{n \in \overline{\mathbb{N}}} |\Delta M_n|$; il n'est pas en général fini, c'est seulement $\sum_{n \in \overline{\mathbb{N}}} |\Delta M_n|^2$ qui est fini. La décomposition en somme directe est ici $X = X + 0 \in \mathcal{P}\text{ré}\ \mathcal{V}^{acc} \oplus \mathcal{P}\text{ré}\ \mathcal{M}^c$, parce que $\Sigma\ |\Delta M_n|$ est formellement fini. C'est aussi une semi-martingale spéciale, avec la décomposition $X = 0 + X \in \mathcal{V}^{\text{pré}} \oplus \mathcal{M}$.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

K. BICHTELER

[1] "Stochastic integration and L^p-theory of semi-martingales", Technical report, Septembre 1979, Dept. of Math., the University of Texas at Austin, No 78712.

N. DUNFORD - J.T. SCHWARTZ

[1] "Linear operators", part I, Interscience Publishers, New York, 1958.

M. EMERY

[1] "Une topologie sur l'espace des semi-martingales", Séminaire de Probabilités XIII, 1979, Springer Lecture Notes in Math. 721, p. 260-280.

J. JACOD

[1] "Calcul stochastique et problèmes de martingales", Lecture Notes in Math. 714, Springer 1979.

KÜSSMAUL

[1] "Stochastic integration and generalized martingales", Research Notes in Mathematics, collection π, Pitman pub., London 1977.

J. LINDENSTRAUSS, L. TZAFRIRI

[1] "Classical Banach spaces", Ergebnisse der Mathematik 92, Springer 1977.

B. MAUREY

[1] in Séminaire Maurey-Schwartz 1972-73, exposé No XII, Ecole Polytechnique, Paris ;

et : "Théorèmes de factorisation pour des opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L^p", Astérisque No 11, S.M.F. 1974.

J. MEMIN

[1] "Espaces de semi-martingales et changements de probabilité", Zeitschrift für W. 52, Springer 1980, p. 9-39.

74

M. METIVIER, J. PELLAUMAIL

[1] "Mesures stochastiques à valeurs dans des espaces L_o", Z. fur Wahrscheinlichkeits theorie und verwante Gebiete 40 (1977) 101-114.

P. A. MEYER

[1] indiqué comme M[1], "Un cours sur les intégrales stochastiques", Séminaire de Probabilités X, Strasbourg 1974-75, Lecture Notes in Math. 511, Springer 1976, p. 245-400.

[2] "Caractérisation des semi-martingales", par Dellacherie, Séminaire de Probabilités XIII, Strasbourg 1977-78, Lecture Notes in Math. 721, Springer 1979.

[3] Séminaire de Probabilités XIV, Strasbourg 1978-79, Lecture Notes in Math. 784, Springer 1980.

J. PELLAUMAIL

[1] "Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer", Astérisque No 9, S.M.F. 1973.

L. SCHWARTZ

[1] "Semi-martingales sur des variétés, et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes", Lecture Notes in Math. 780, Springer 1980.

[2] "Un théorème de convergence dans les L^p, $0 \leq p < +\infty$", Note aux Compte-Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. 268, 31 Mars 1969, p. 704-706.

STRICKER

[1] Article à paraître dans Advances in Math. (1981).

E. THOMAS

[1] "L'intégration par rapport à une mesure de Radon vectorielle", Annales Institut Fourier, t. XX, fasc. 2, 1970.

[2] "On Radon maps with values in arbitrary topological vector spaces, and their integral extensions", Preprint, Dept. of Mathematics, Yale University.

M. YOR

[1] Séminaire de Théorie du Potentiel, Lecture Notes in Mathematics 713, p. 264-281, Springer 1979.

INDEX TERMINOLOGIQUE

et

INDEX DES NOTATIONS

TABLE DES MATIERES

Ce texte a été dactylographié au Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, Laboratoire Associé au C.N.R.S. No 169, par Marie-José Lécuyer.