SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE STRICKER

Les ralentissements en théorie générale des processus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 364-377
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__364_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

LES RALENTISSEMENTS EN THEORIE GENERALE DES PROCESSUS

par Christophe Stricker

Ce travail s'inspire d'un article de P.A.Meyer [2], qui montre que tout processus de Markov droit peut être transformé par ralentissement en un processus de Hunt, c'est à dire un processus droit dont la famille de tribus naturelle est quasi-continue à gauche. Notre but sera de prouver un résultat analogue en théorie générale des processus, autrement dit de supprimer les temps de discontinuité d'une filtration au moyen d'un ralentissement convenable.

Une première rédaction de ce travail a été considérablement modifiée à la suite de discussions avec P.A.Meyer. C'est en particulier à la suite de ces discussions que nous avons été amenés à séparer les deux étapes d'"enrichissement" et de "ralentissement", qui se présentaient ensemble dans le cas markovien.

Voici le résultat final :

THEOREME. Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet muni d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ satisfaisant aux conditions habituelles. On suppose que $L^1(\underline{\underline{F}}_\infty)$ est séparable, et que $\underline{\underline{F}}$ est assez riche pour qu'il existe une v.a. diffuse indépendante de $\underline{\underline{F}}_\infty$. Il existe alors sur Ω

1) Une filtration $(\underline{\underline{H}}_t)$, satisfaisant aux conditions habituelles et quasi-continue à gauche,

2) Un changement de temps (σ_t) de cette famille tel que $\sigma_0=0$, $\sigma_t-\sigma_s \geqq t-s$ pour $s\leqq t$ (σ est une accélération du temps),

Tels que la famille de tribus $\underline{\underline{G}}_t = \underline{\underline{H}}_{\sigma_t}$ contienne $\underline{\underline{F}}_t$, et que pour toute v.a. $Y\in L^1(\underline{\underline{F}}_\infty)$ on ait $E[Y|\underline{\underline{F}}_t]=E[Y|\underline{\underline{G}}_t]=Z_{\sigma_t}$, où $Z_s=E[Y|\underline{\underline{H}}_s]$.

L'énoncé est présenté ici sous la forme qui semble la plus utile, mais la démonstration ne procède pas dans cet ordre. Elle est assez pénible, bien que le principe en soit très simple : on commence par isoler les temps de discontinuité de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, sous forme d'une suite de temps prévisibles disjoints T_n . En chacun des T_n , on adjoint une variable aléatoire S_n indépendante de $\underline{\underline{F}}_\infty$, les S_n étant en outre indépendantes entre elles. Cette opération étant faite, on a "enrichi" $(\underline{\underline{F}}_t)$, et l'on vérifie que les martingales/$(\underline{\underline{F}}_t)$ sont restées des martingales pour la nouvelle famille. Puis on décide à chacun des instants T_n d'immobiliser le déroulement du temps pour une durée égale à S_n, ce qui a pour effet de faire disparaître la discontinuité prévisible en cet instant ; la famille ainsi "ralentie" est la famille $(\underline{\underline{H}}_t)$ de l'énoncé, et l'accélération σ est le changement de temps inverse du ralentissement. La difficulté consiste à écrire proprement cette "immobilisation du temps" , et en particulier à veiller (l'ensemble des instants T_n pouvant être partout dense) à ce que le temps continue tout de même à s'écouler.

PREMIERE ETAPE . ISOLEMENT DES TEMPS D'ARRET T_n.

L'espace $L^1(\underline{\underline{F}}_\infty)$ étant séparable, nous choisissons une suite de v.a. M^i dense dans cet espace, et nous construisons les martingales continues à droite $M^i_t = E[M^i|\underline{\underline{F}}_t]$. Nous énumérons tous les sauts de la martingale (M^i_t) en une suite de temps d'arrêt U_{ij} .

D'après [D], III.39-41 (p. 57), chaque U_{ij} se décompose en une partie accessible V_{ij} et une partie totalement inaccessible, qui ne nous intéresse pas. Nous pouvons recouvrir le graphe de V_{ij} au moyen d'une suite de graphes de temps d'arrêt prévisibles W_{ijk} . L'ensemble aléatoire prévisible $D=\cup_{ijk}[\![W_{ijk}]\!]$ peut alors se représenter comme réunion dénombrable de graphes prévisibles disjoints $[\![T_n]\!]$. Les T_n constituent la suite cherchée :

LEMME 1. Si S est un temps d'arrêt prévisible dont le graphe ne rencontre pas D, on a $\underline{\underline{F}}_S=\underline{\underline{F}}_{S-}$.

DEMONSTRATION. Il suffit de vérifier que toute martingale $M_t=E[M_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$ est continue à l'instant S. D'après l'inégalité de Doob

$$\lambda P\{ \sup_t |M_t-M^i_t| \geqq \lambda \} \leqq E[|M^i-M_\infty|]$$

et la densité de l'ensemble des M^i dans L^1, il suffit de vérifier que toute martingale (M^i_t) est continue à l'instant S. Or $[\![S]\!]$ ne rencontre pas la réunion des graphes des sauts totalement inaccessibles de M^i, puisque S est prévisible, ni la réunion des graphes des sauts accessibles de M^i, puisque celle-ci est contenue dans D. ▯

SECONDE ETAPE. CONSTRUCTION DE $(\underline{\underline{G}}_t)$ PAR ENRICHISSEMENT DE $(\underline{\underline{F}}_t)$.

Puisque Ω contient une tribu indépendante de $\underline{\underline{F}}_\infty$, et sur laquelle la loi induite par P est sans atomes, Ω contient en fait toute une suite de v.a. S_n , indépendantes entre elles et indépendantes de $\underline{\underline{F}}_\infty$, admettant chacune une loi diffuse. L'enrichissement de la famille consiste à ajouter à ce que l'on sait la connaissance de la valeur $S_n(\omega)$, à partir de l'instant $T_n(\omega)$. La loi de la v.a. S_n importe peu, car le remplacement de S_n par $\varphi\circ S_n$, où φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, ne changerait rien aux tribus ainsi construites.

DEFINITION. <u>La tribu</u> $\underline{\underline{G}}_t^k$ <u>est engendrée par</u> $\underline{\underline{F}}_t$ <u>et par les v.a.</u> $S_n I_{\{T_n\leq s\}}$ <u>pour</u> $0\leq s\leq t$, $n\leq k$. [Voir la Note en dernière page, après la bibliographie].

Ces tribus croissent manifestement avec t et avec k, et contiennent $\underline{\underline{F}}_t$. En particulier, $\underline{\underline{F}}_0$ contenant tous les ensembles P-négligeables, il en est de même de $\underline{\underline{G}}_0^k$.

Nous commençons par étudier le pas élémentaire, c'est à dire la formation de $\underline{\underline{G}}_t^0$ par adjonction de S_0 à l'instant T_0 . Ensuite, on procèdera par récurrence, $\underline{\underline{G}}_t^k$ remplaçant $\underline{\underline{F}}_t$ et $\underline{\underline{G}}_t^{k+1}$ remplaçant $\underline{\underline{G}}_t^0$. Nous écrivons S,T au lieu de S_0,T_0 et $\underline{\underline{G}}_t$ au lieu de $\underline{\underline{G}}_t^0$ (ne pas confondre ces notations abrégées avec les tribus définitives $\underline{\underline{G}}_t$, qui seront introduites plus loin).

LEMME 2. <u>Une v.a.</u> Y <u>est mesurable/</u>$\underline{\underline{G}}_t$ <u>si et seulement si elle peut s'écrire</u> $UI_{\{t<T\}}+VI_{\{t\geq T\}}$, <u>où</u> U <u>est mesurable/</u>$\underline{\underline{F}}_t$ <u>et</u> V <u>mesurable/</u>$\underline{\underline{T}}(S)\vee\underline{\underline{F}}_t$.

DEMONSTRATION. Les v.a. de la forme indiquée sont manifestement les fonctions mesurables par rapport à une tribu $\underline{\underline{G}}_t^o$, qui contient $\underline{\underline{F}}_t$ (prendre U=V $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable). Montrons que $\underline{\underline{G}}_t^o\subset\underline{\underline{G}}_t$. Si U est mes/$\underline{\underline{F}}_t$, $UI_{\{t<T\}}$ l'est aussi, et donc est mes/$\underline{\underline{G}}_t$. Pour vérifier que $VI_{\{t\geq T\}}$ est mes/$\underline{\underline{G}}_t$ lorsque V est mes/$\underline{\underline{T}}(S)\vee\underline{\underline{F}}_t$, il suffit de considérer séparément le cas où V est mes/$\underline{\underline{F}}_t$, qui se traite comme celui de $UI_{\{t<T\}}$ ci-dessus, et le cas où V=a(S), a étant borélienne sur $\mathbb{R}$. Or T est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{G}}_t)$, S est $\underline{\underline{G}}_T$-mesurable (c'est le saut en T du processus adapté $SI_{\{s\geq T\}}$) donc $a(S)I_{\{T\leq t\}}$ est mes/$\underline{\underline{G}}_t$.

Pour montrer qu'on a inversement $\underline{\underline{G}}_t\subset\underline{\underline{G}}_t^o$, il suffit de vérifier que pour tout $s\leq t$ la v.a. $SI_{\{s\geq T\}}$ est mes/$\underline{\underline{G}}_t^o$. Ou encore, comme elle s'écrit $VI_{\{t\geq T\}}$ avec $V=SI_{\{s\geq T\}}$, que $SI_{\{s\geq T\}}$ est mes/$\underline{\underline{T}}(S)\vee\underline{\underline{F}}_t$. Or c'est évident, car S est mes/$\underline{\underline{T}}(S)$ et $I_{\{s\geq T\}}$ est mes/$\underline{\underline{F}}_s$. ▯

LEMME 3. <u>Soit</u> $Y\in L^1(\underline{\underline{F}}_\infty)$, <u>et soit</u> Y_t <u>la martingale continue à droite</u> $E[Y|\underline{\underline{F}}_t]$. <u>Soit</u> c <u>une fonction borélienne bornée sur</u> $\mathbb{R}$ <u>et soit</u> $\gamma=E[c(S)]$. <u>Alors on a</u>

$$E[c(S)Y|\underline{\underline{G}}_t] = \gamma Y_t I_{\{t<T\}} + c(S)Y_t I_{\{t\geq T\}} \text{ .}$$

(S et $\underline{\underline{F}}_\infty$ étant indépendantes, il suffit en fait que c(S) soit intégrable)

DEMONSTRATION. Notons Z_t le second membre, qui est mes/$\underline{\underline{G}}_t$. Il nous suffit de vérifier que si U est une v.a. bornée mes/$\underline{\underline{F}}_t$, si V est une v.a. bornée mes/$\underline{\underline{T}}(S)\vee\underline{\underline{F}}_t$, on a

$$E[c(S)YUI_{\{t<T\}}] = E[\gamma Y_t UI_{\{t<T\}}] ,$$
$$E[c(S)YVI_{\{t\geq T\}}] = E[c(S)Y_t VI_{\{t\geq T\}}]$$

La première égalité est conséquence de l'indépendance de S et de $\underline{\underline{F}}_\infty$, qui permet de remplacer c(S) par γ du côté gauche. Pour la seconde, il suffit de traiter le cas où V est de la forme a(S)W, avec W mes/$\underline{\underline{F}}_t$, et c'est alors le même raisonnement. $\square$

COROLLAIRE. <u>La famille de tribus</u> ($\underline{\underline{G}}_t$) <u>est continue à droite</u>.

DEMONSTRATION. La martingale Z_t ci-dessus est continue à droite, donc on a aussi $Z_t=E[c(S)Y|\underline{\underline{G}}_{t+}]$. Par un raisonnement de classes monotones, on en déduit que l'ensemble des v.a. $Z\in L^1(\underline{\underline{G}}_\infty)$ telles que $E[Z|\underline{\underline{G}}_t] = E[Z_t|\underline{\underline{G}}_{t+}]$ p.s. est $L^1(\underline{\underline{G}}_\infty)$ tout entier. Mais alors, prenant Z mes/$\underline{\underline{G}}_{t+}$, on voit que tout élément de $\underline{\underline{G}}_{t+}$ est égal p.s. à un élément de $\underline{\underline{G}}_t$. Comme $\underline{\underline{G}}_t$ contient tous les ensembles P-négligeables, on a $\underline{\underline{G}}_t=\underline{\underline{G}}_{t+}$. $\square$

LEMME 4. a) <u>Toute martingale</u>/($\underline{\underline{F}}_t$) <u>est encore une martingale</u>/($\underline{\underline{G}}_t$).
b) <u>Tout temps d'arrêt</u> R <u>de</u> ($\underline{\underline{F}}_t$), <u>totalement inaccessible</u>/($\underline{\underline{F}}_t$), <u>est encore totalement inaccessible</u>/($\underline{\underline{G}}_t$).
c) <u>Soit</u> (M_t) <u>une martingale uniformément intégrable</u>/($\underline{\underline{G}}_t$), <u>et soit</u> R <u>un temps d'arrêt de</u> ($\underline{\underline{G}}_t$), <u>accessible et</u> >0, <u>tel que</u> $M_R \neq M_{R-}$ <u>p.s. sur</u> $\{R<\infty\}$. <u>Alors on a</u> $[\![R]\!] \subset D = \bigcup_n [\![T_n]\!]$ (autrement dit, D contient encore tous les temps de discontinuité pour la famille ($\underline{\underline{G}}_t$)).

DEMONSTRATION. a) résulte aussitôt du lemme 3. Pour b), nous posons $A_t= I_{\{t\geq R\}}$, processus croissant intégrable dont le compensateur prévisible (B_t) par rapport à ($\underline{\underline{F}}_t$) est continu (puisque R est totalement inaccessible). Le processus A-B est une martingale/($\underline{\underline{F}}_t$), donc une martingale /($\underline{\underline{G}}_t$), donc B est aussi le compensateur prévisible de A pour ($\underline{\underline{G}}_t$). Comme B est continu, R est totalement inaccessible/($\underline{\underline{G}}_t$).

Passons à c). Avec les notations du lemme 3, supposons d'abord que (M_t) soit de la forme $E[Yc(S)|\underline{\underline{G}}_t]$. Alors les sauts de ($M_t$) sont T et les sauts de (Y_t). Nous pouvons donc les énumérer en une suite U_i de temps d'arrêt de ($\underline{\underline{F}}_t$), que nous décomposons par rapport à ($\underline{\underline{F}}_t$) en leurs parties accessibles V_i et totalement inaccessibles W_i . D'après b), les W_i

sont encore totalement inaccessibles $/(\underline{\underline{G}}_t)$, et l'on a donc $[\![R]\!] \subset \bigcup_i [\![V_i]\!]$, ensemble contenu dans D puisque la réunion des graphes de sauts accessibles de (Y_t) l'est, et que $[\![T]\!] \subset D$.

c) s'étend alors à une combinaison linéaire de martingales du type précédent. Pour passer au cas général, nous approchons (M_t) par de telles combinaisons linéaires (M_t^n), de telle sorte que $E[|M_\infty - M_\infty^n|] \leq 2^{-n}$. D'après l'inégalité de Doob, les trajectoires $M_\cdot^n(\omega)$ convergent p.s. vers $M_\cdot(\omega)$, uniformément sur $[0,\infty]$. On applique alors le résultat précédent à R_A , où $A \in \underline{\underline{G}}_R$ est l'ensemble $\{M_R^n \neq M_{R-}^n\}$, et on fait tendre n vers l'infini. $\square$

Après ce pas élémentaire, nous revenons aux vraies notations : S_0, T_0 , $\underline{\underline{G}}_t^0$, et nous raisonnons par récurrence, comme nous l'avons dit au début. Nous posons $\underline{\underline{G}}_t = \bigvee_k \underline{\underline{G}}_t^k$. Le lemme 4 nous donne aussitôt les résultats suivants :

- Toute martingale$/(\underline{\underline{G}}_t^k)$ est une martingale$/(\underline{\underline{G}}_t^{k+1})$, donc aussi une martingale$/(\underline{\underline{G}}_t^{k+m})$ pour tout m, et finalement une martingale$/(\underline{\underline{G}}_t)$. En particulier, <u>toute martingale</u>$/(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>est une martingale</u>$/(\underline{\underline{G}}_t)$.
- La famille $(\underline{\underline{G}}_t^k)$ est continue à droite. Donc si H appartient à $L^1(\underline{\underline{G}}_\infty^k)$, et si (H_t) désigne une version continue à droite de $E[H|\underline{\underline{G}}_t^k]$, (H_t) est aussi une martingale$/(\underline{\underline{G}}_t)$. Mais alors, comme dans le corollaire du lemme 3, on voit que <u>la famille</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$ <u>est continue à droite</u>.
- Comme dans le lemme 4, on voit que <u>si R est un temps d'arrêt de</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>totalement inaccessible</u>$/(\underline{\underline{F}}_t)$, R <u>est totalement inaccessible</u>$/(\underline{\underline{G}}_t)$.
- Enfin, le lemme 4 c) s'étend sans modification à la grande famille $(\underline{\underline{G}}_t)$. Il suffit dans la démonstration de remplacer la v.a. Yc(S) par une v.a. de la forme $Yc_0(S_0)\ldots c_k(S_k)$ avec $Y \in L^1(\underline{\underline{F}}_\infty)$ et des c_i boréliennes bornées sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que $D = \bigcup_n [\![T_n]\!]$ <u>contient encore tous les graphes des sauts accessibles des martingales</u>$/(\underline{\underline{G}}_t)$.

TROISIEME ETAPE : CONSTRUCTION DE $(\underline{\underline{H}}_t)$ PAR RALENTISSEMENT DE $(\underline{\underline{G}}_t)$

Nous supposons maintenant, pour fixer les idées, que les v.a. S_n sont positives et admettent une même loi exponentielle de paramètre 1 . Nous considérons le processus croissant adapté à $(\underline{\underline{G}}_t)$

(1) $$\sigma_t = t + \Sigma_n f_n S_n I_{\{T_n \leq t\}} \qquad (\text{ on posera } f_n S_n = R_n)$$

où f_n est, pour chaque n, une v.a. $\underline{\underline{F}}_{T_n}$-mesurable strictement positive, et le choix des f_n est fait de telle sorte que $\sigma_t < +\infty$ p.s. pour t fini. Dans la situation où nous sommes, on a $E[S_n]=1$ pour tout n, et il suffit de prendre $f_n=2^{-n}$. Dans la situation "markovienne" du travail de Meyer [2], f_n est de la forme $g \circ X_{T_n -}$, où g est une fonction convenablement choisie sur l'espace d'états du processus de Markov X. Comme (σ_t) est un processus fini et strictement croissant ($\sigma_t - \sigma_s \geqq t-s$ pour $s \leqq t$), nul pour t=0, tendant vers $+\infty$ avec t, le processus

(2) $$\tau_t = \inf \{ s : \sigma_s > t \}$$

est continu, fini, nul en 0 .

Etant donné un processus (X_t), càdlàg. et adapté à $(\underline{\underline{G}}_t)$, nous définissons son <u>ralenti</u> (X_t^*) de la manière suivante. Nous regardons d'abord le processus càdlàg. $Y_t = X_{\tau_t}$. Celui ci est constant sur chacun des intervalles de constance de τ , $I_n = [\sigma_{T_n -}, \sigma_{T_n}]$, avec la valeur X_{T_n} , et la limite à gauche $X_{T_n -}$ au point $\sigma_{T_n -}$: le saut de Y a donc lieu à l'extrémité <u>gauche</u> de I_n . Pour construire le vrai processus ralenti X^*, nous modifions Y en lui donnant la valeur $X_{T_n -}$ sur tout l'intervalle

$[\sigma_{T_n -}, \sigma_{T_n}[$, de sorte que le saut est transporté à l'extrémité <u>droite</u> de l'intervalle. C'est là le point essentiel, car nous prouverons que l'extrémité gauche de l'intervalle est un temps accessible, tandis que l'extrémité droite est un temps totalement inaccessible, et nous ferons disparaître ainsi les discontinuités accessibles des martingales.

Au lieu de passer directement de X_t à X_t^* , nous construirons par récurrence une suite de processus ralentis intermédiaires. Il nous faut pour cela quelques notations. Nous posons

(3) $$\sigma_t^i = t + \Sigma_{n \leq i} R_n I_{\{T_n \leq t\}}$$

et nous désignons par τ_t^i l'inverse continu de σ_t^i (cf. (2)), par Y_t^i le processus $X_{\tau_t^i}$ et par X_t^i le ralenti correspondant. On a $\sigma_t^i \uparrow \sigma_t$, $\tau_t^i \downarrow \tau_t$, donc $Y_t^i \to Y_t$. Pour X_t^i c'est un peu plus délicat, et nous l'énonçons sous forme de lemme.

LEMME 5 . On a $\lim_{i\to\infty} X_t^i = X_t^*$.

DEMONSTRATION. Si t n'est pas un point de croissance à droite de $\tau_.$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $t\in[\sigma_{T_n-},\sigma_{T_n}[$. Soit $\alpha = \sigma_{T_n}-t$; comme $\sigma_{T_n}^i$ tend en croissant vers σ_{T_n} , il existe i_0 tel que pour tout $i\geqq i_0$ on ait $\sigma_{T_n}^i > t+\frac{\alpha}{2}$, donc $T_n = \tau^i_{\sigma^i_{T_n}} \geqq \tau^i_{t+\alpha/2} \geqq \tau_{t+\alpha/2} \geqq \tau_t = T_n$. Donc t n'est pas un point de croissance à droite de $\tau^i_.$, et l'intervalle de constance de τ^i contenant t est $[\sigma^i_{T_n-},\sigma^i_{T_n}]$, donc $X_t^i = X_{T_n-} = X_t^*$ pour $i\geqq i_0$.

Si t est un point de croissance à droite de $\tau_.$ nous avons $X_t^*=Y_t=X_{\tau_t}$. D'autre part nous avons $X_t^i = X_u$ ou X_{u-} , où u est un point de l'intervalle $[\tau_t,\tau_t^i]$. Il en résulte que $X_t^i \to X_t$. ▯

Comment passe t'on à présent de X^i à X^{i+1} ? Par ralentissement de X^i en un seul instant $\sigma^i_{T_{i+1}}$, la longueur du ralentissement étant R_{i+1}.

LEMME 6 . Posons

(4) $\hat{X}_t^i = X_t^i I_{\{t<\sigma^i_{T_{i+1}}\}} + X_{T_{i+1}-} I_{\{\sigma^i_{T_{i+1}}\leq t<\sigma^i_{T_{i+1}}+R_{i+1}\}} + X^i_{t-\sigma^i_{T_{i+1}}} I_{\{t\geqq\sigma^i_{T_{i+1}}+R_{i+1}\}}$

alors $\hat{X}^i=X^{i+1}$.

DEMONSTRATION. Sur l'ensemble $\{t<\sigma^i_{T_{i+1}}\}$, nous avons $\tau_t^i<T_{i+1}$ (σ^i étant continu au point T_{i+1} , le contraire entraînerait $t\leqq\sigma^i_{\tau^i_{t}-} < \sigma^i_{T_{i+1}-}=\sigma^i_{T_{i+1}}$, la fonction σ^i_{u-} étant strictement croissante). Mais on a

$\sigma_u^{i+1}=\sigma_u^i+ R_{i+1}I_{\{T_{i+1}\leqq u\}}$, donc les deux processus τ_u^{i+1}, τ_u^i sont égaux sur l'intervalle $[0,\sigma^i_{T_{i+1}}[=[0,\sigma^{i+1}_{T_{i+1}-}[$, et les deux processus ralentis X_t^i et X_t^{i+1} sont égaux sur cet intervalle.

Ils ont aussi la même limite à gauche $X_{T_{i+1}-}$ au point $\sigma^i_{T_{i+1}}=\sigma^{i+1}_{T_{i+1}-}$, et l'égalité de X^{i+1} et de $\hat{X}^i$ se prolonge à l'intervalle de constance $[\sigma^i_{T_{i+1}},\sigma^i_{T_{i+1}}+R_i[$.

Enfin, si $u\geqq \sigma^i_{T_{i+1}}+R_{i+1}$, on a $\tau_u^{i+1}\geqq T_{i+1}$ et $\tau_u^{i+1}= \tau^i_{u-R_{i+1}}$, donc $X_{\tau^i_{u-R_{i+1}}} = X_{\tau_u^{i+1}}$. Après modification sur les intervalles de constance, on voit que la trajectoire $X^{i+1}_.$ à partir de $\sigma^i_{T_{i+1}}+R_{i+1} =\sigma^{i+1}_{T_{i+1}}$ s'obtient par décalage de la trajectoire $X^i_.$ à partir de $\sigma^i_{T_{i+1}}$, et c'est bien l'égalité $X^{i+1} = \hat{X}^i$ sur le dernier ensemble.

On peut en fait dire un peu mieux : introduisons les processus croissants

(5) $\hat{\sigma}^k_t = t + \Sigma_{i>k} R_i I_{\{\sigma^k_{T_i} \leq t\}}$

alors on a $\sigma_u = \hat{\sigma}^k_{(\sigma^k_u)}$ et $X^k_u = X^*_{\hat{\sigma}^k_u}$, de sorte que le processus X^k (qui est un "ralenti" de X) apparaît comme un "accéléré" de X^*. Plus généralement, si $k<\ell$ le ralenti X^k de X apparaît aussi comme un accéléré de X^ℓ :

(6) $X^k_u = X^{\ell}_{\hat{\sigma}^{k\ell}_u}$ avec $\hat{\sigma}^{k\ell}_t = t + \Sigma_{\ell \geq i>k} R_i I_{\{\sigma^k_{T_i} \leq t\}}$

Nous n'insisterons pas sur ces propriétés purement algébriques des ralentissements et accélérations. Nous retenons que le passage de X_t à X^*_t peut se ramener à une suite de ralentissements successifs : d'abord en T_0 de R_0 , puis en $\sigma^0_{T_1}$ de R_1 , puis en $\sigma^1_{T_2}$ de R_2 ... Nous allons étudier en détail le premier ralentissement, et ensuite nous aurons une récurrence facile compte tenu des lemmes 5 et 6.

<u>Notations simplifiées pour l'étape élémentaire</u> . Nous écrivons T pour T_0 , S pour S_0, R pour $R_0 = f_0 S_0$; rappelons que S est $\underline{\underline{G}}_T$-mesurable, donc R possède la même propriété. Nous posons au lieu de σ^0_t , τ^0_t

(7) $\sigma_t = t + RI_{\{t \geq T\}}$, $\tau_t = tI_{\{t<T\}} + TI_{\{T \leq t \leq T+R\}} + (t-R)I_{\{t \geq T+R\}}$

Si (X_t) est un processus càdlàg., nous notons son ralenti $(\overline{X}_t)$ (au lieu de (X^0_t)), soit

(8) $\overline{X}_t = X_t I_{\{t<T\}} + X_{T-} I_{\{T \leq t<T+R\}} + X_{t-R} I_{\{t \geq T+R\}}$

Si U est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{G}}_t)$, nous notons $\overline{U}$ la v.a.

(9) $\overline{U} = \sigma_U = UI_{\{U<T\}} + (U+R)I_{\{U \geq T\}}$

(le processus $I_{[\![\overline{U},\infty[\![}$ est le ralenti de $I_{[\![U,\infty[\![}$).

Enfin, une définition importante : nous désignons par $\underline{\underline{H}}_t$ (vraie notation $\underline{\underline{H}}^0_t$) la tribu engendrée par les variables aléatoires de l'une des formes suivantes

(10) $LI_{\{t<T\}}$ (L mes/$\underline{\underline{G}}_t$) , $MI_{\{T \leq t<T+R\}}$ (M mes/$\underline{\underline{G}}_{T-}$)

$NI_{\{T+R \leq t\}}$ (N mes/$\underline{\underline{G}}_{T \vee (t-R)}$)

Il faut rappeler ici que $T \vee (t-R) = T+(t-R-T)^+$ est une v.a. $\underline{\underline{G}}_T$-mesurable et $\geq T$, donc un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{G}}_t)$.

LEMME 7. <u>La famille</u> $(\underline{\underline{H}}_t)$ <u>est croissante</u>. <u>On a</u> $\underline{\underline{H}}_t \subset \underline{\underline{G}}_{\tau_t} \subset \underline{\underline{G}}_t$.

<u>Pour tout processus</u> (X_s), <u>càdlàg. et adapté à</u> $(\underline{\underline{G}}_s)$, <u>le ralenti</u> $(\overline{X}_s)$

<u>est adapté à</u> $(\underline{\underline{H}}_s)$, <u>et la tribu</u> $\underline{\underline{H}}_t$ <u>est engendrée par les v.a.</u> $\bar{X}_t$ <u>ainsi obtenues</u>.

DEMONSTRATION. Nous commençons par la seconde partie de l'énoncé. Il est évident sur (8) et la définition (10) de $\underline{\underline{H}}_t$ que $\bar{X}_t$ est $\underline{\underline{H}}_t$-mesurable. D'autre part, si l'on prend $X_s=LI_{\{s\geq t\}}$ avec L mes/$\underline{\underline{F}}_t$, on a $\bar{X}_t=LI_{\{t<T\}}$. Si l'on prend $X_s=NI_{\{s\geq T\vee(t-R)\}}$ avec N mes/$\underline{\underline{G}}_{T\vee(t-R)}$, on a $\bar{X}_t=NI_{\{t\geq T+R\}}$. Enfin soit (T_n) une suite annonçant le temps d'arrêt T (prévisible/$(\underline{\underline{G}}_s)$ et >0) et soit M mes/$\underline{\underline{G}}_{T_k}$. Pour n>k, soit $X^n_s = MI_{]\!]T_n,T[\![}(s)$. Alors $\bar{X}^n_t = MI_{\{T_n<t<T\}}+MI_{\{T\leq t<T+R\}}$, qui converge lorsque $n\to\infty$ vers $MI_{\{T\leq t<T+R\}}$. On en déduit que la tribu engendrée par toutes les v.a. $\bar{X}_t$ associées aux processus adaptés X contient $\underline{\underline{H}}_t$ et, vu le début, qu'elle est égale à $\underline{\underline{H}}_t$.

Soit X un processus càdlàg. adapté à $(\underline{\underline{G}}_u)$, et soit Y le processus

$$\left.\begin{array}{l} Y_u = X_u \text{ si } u<\tau_s \quad , \quad Y_u=X_{\tau_s} \text{ si } u\geq\tau_s \ , \ \tau_s\neq T \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad Y_u=X_{\tau_s-} \text{ si } u\geq\tau_s \ , \ \tau_s=T \end{array}\right| \text{ où } s<t \text{ est fixé}$$

τ_s est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{G}}_u)$, et il est facile de voir que Y est càdlàg. adapté à $(\underline{\underline{G}}_u)$, que $\bar{Y}_s=\bar{X}_s$, et que le processus $\bar{Y}$ est arrêté à s. On a par conséquent $\bar{Y}_s=\bar{Y}_t$, et $\bar{Y}_s$ est mes/$\underline{\underline{H}}_t$. Mais par ailleurs $\bar{Y}_s=\bar{X}_s$, et les v.a. de la forme $\bar{X}_s$ engendrent $\underline{\underline{H}}_s$, d'où l'inclusion $\underline{\underline{H}}_s\subset\underline{\underline{H}}_t$.

L'inclusion $\underline{\underline{G}}_{\tau_t}\subset\underline{\underline{G}}_t$ vient de ce que τ_t est un temps d'arrêt $\leq t$. D'autre part, si X est un processus càdlàg. adapté à $(\underline{\underline{G}}_u)$, on a

$$\bar{X}_t = X_{\tau_t}I_{\{\tau_t\neq T\}} + X_{\tau_t-}I_{\{\tau_t=T\}}$$

donc $\bar{X}_t$ est mes/$\underline{\underline{G}}_{\tau_t}$, ce qui prouve que $\underline{\underline{H}}_t\subset\underline{\underline{G}}_{\tau_t}$. ▯

Avant d'énoncer le lemme 8 (qui est le résultat principal sur les martingales) , nous remarquons que $\underline{\underline{G}}_\infty$ peut s'écrire $\underline{\underline{A}}_0\vee\underline{\underline{B}}_0$ où $\underline{\underline{A}}_0$ et $\underline{\underline{B}}_0$ sont deux tribus indépendantes, la première engendrée par $\underline{\underline{F}}_\infty$ et toutes les S_i sauf S_0 , et la seconde engendrée par $S_0=S$.

LEMME 8 . <u>Soit une v.a. de la forme</u> Yc(S), <u>où</u> Y <u>est</u> $\underline{\underline{A}}_0$<u>-mesurable bornée</u>, <u>et</u> c <u>est borélienne bornée sur</u> $\mathbb{R}$. <u>Soit</u> $Y_t=E[Y|\underline{\underline{G}}_t]$ <u>et soit</u> $\gamma=E[c(S)]$. <u>On a</u> (<u>en rappelant que</u> R=fS)

$$(11)\quad E[Yc(S)|\underline{\underline{H}}_t] = Y_t\gamma I_{\{t<T\}} + Y_{t-R}c(S)I_{\{t\geq T+R\}} + $$
$$+ Y_{T-}I_{\{T\leq t<T+R\}} \int_{\frac{t-T}{f}}^{\infty} c(x)e^{-x}dx \Big/ \int_{\frac{t-T}{f}}^{\infty} e^{-x}dx$$

DEMONSTRATION. On remarque que le second membre de (11) est adapté à $(\underline{\underline{H}}_u)$ puisque T est prévisible/$(\underline{\underline{G}}_u)$. En notant que $\underline{\underline{G}}_\infty$ est engendrée par les tribus indépendantes $\underline{\underline{A}}_0$ et $\underline{\underline{B}}_0$, on vérifie alors (11) sur les générateurs (10) de $\underline{\underline{H}}_t$. ▯

COROLLAIRE A. La famille $(\underline{\underline{H}}_t)$ est continue à droite.

DEMONSTRATION. Voir le corollaire analogue suivant le lemme 3.

Le corollaire suivant est placé ici, parce qu'il est plus facile à penser après le corollaire A, sachant que $(\underline{\underline{H}}_t)$ satisfait aux conditions habituelles, qu'on n'a plus à distinguer entre temps d'arrêt stricts et larges, etc.

COROLLAIRE B. Si U est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{G}}_t)$, $\overline{U}$ (cf. (9)) est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{H}}_t)$.

DEMONSTRATION. C'est un cas particulier du lemme 7 : $I_{[\![U,\infty[\![}$ étant cadlàg. adapté à $(\underline{\underline{G}}_t)$, son ralenti $I_{[\![\overline{U},\infty[\![}$ est adapté à $(\underline{\underline{H}}_t)$.

Noter que si U est prévisible/$(\underline{\underline{G}}_t)$, annoncé par une suite (U_n), et si $[\![U]\!]$ et $[\![T]\!]$ sont disjoints , alors $\overline{U}$ est annoncé par $(\overline{U}_n)$, et donc prévisible/$(\underline{\underline{H}}_t)$.

Noter aussi que T est un temps prévisible/$(\underline{\underline{H}}_t)$: si des U_n annoncent T par rapport à $(\underline{\underline{G}}_t)$, on a $\overline{U}_n=U_n$ et ces t.a. annoncent T par rapport à $(\underline{\underline{H}}_t)$. En revanche :

COROLLAIRE C. T+R est un temps d'arrêt totalement inaccessible $(\underline{\underline{H}}_t)$.

DEMONSTRATION. Nous appliquons (11) au calcul de la martingale $M_t=E[S|\underline{\underline{H}}_t]$

$$M_t = I_{\{t<T\}} + (1+\frac{t-T}{f})I_{\{T\leq t<T+R\}} + SI_{\{t\geq T+R\}}$$

Donc M est continue sauf à l'instant T+R, où le saut de M est égal à -1. Cela entraîne que T+R est totalement inaccessible.

COROLLAIRE D. Si (Y_t) est une martingale uniformément intégrable/ $(\underline{\underline{F}}_t)$, ou plus généralement si $Y_t=E[Y|\underline{\underline{G}}_t]$ où Y est mes/$\underline{\underline{A}}_0$, le processus ralenti $(\overline{Y}_t)$ est une martingale/$(\underline{\underline{H}}_t)$.

DEMONSTRATION. C'est (11) lorsque c=1. Rappelons que $E[Y|\underline{\underline{G}}_t]=E[Y|\underline{\underline{F}}_t]$ si Y est mes/$\underline{\underline{F}}_\infty$.

COROLLAIRE E. Soit U un temps d'arrêt totalement inaccessible/$(\underline{\underline{F}}_t)$. Alors $\overline{U}$ est totalement inaccessible/$(\underline{\underline{H}}_t)$.

DEMONSTRATION. Soit $A_t=I_{\{t\geq U\}}$, et soit (B_t) son compensateur prévisible /$(\underline{\underline{F}}_t)$, qui est continu ; A-B est une martingale/$(\underline{\underline{F}}_t)$, donc $\overline{A}-\overline{B}$ est une martingale /$(\underline{\underline{H}}_t)$: le compensateur de $\overline{A}_t=I_{\{t\geq\overline{U}\}}$ est donc $\overline{B}$, qui est continu, et $\overline{U}$ est totalement inaccessible.

COROLLAIRE F . Pour toute martingale $M_t=E[Z|\underline{\underline{H}}_t]$, avec $Z\in L^1(\underline{\underline{G}}_\infty)$, le processus (M_{σ_t}) est une version de la martingale $\mathbb{E}[Z|\underline{\underline{G}}_t]$.

DEMONSTRATION. Par un argument de classes monotones, on se ramène au cas où $Z=Yc(S)$, Y étant $\underline{\underline{A}}_0$-mesurable et bornée, c borélienne bornée sur $\mathbb{R}$. La martingale (M_t) nous est alors donnée par (11). D'autre part on a $\sigma_t=t$ pour $\sigma_t<T$, $\sigma_t=t+R$ pour $\sigma_t\geq T+R$, et on n'a $T\leq\sigma_t<T+R$ pour aucun t. Par conséquent

$$M_{\sigma_t} = \gamma Y_t I_{\{t<T\}} + Y_t c(S) I_{\{t\geq T\}}$$

et l'on retrouve l'expression du lemme 3, qui doit être interprétée en vraie notation comme $E[Yc(S)|\underline{\underline{G}}_t^0]$, mais qui vaut aussi $E[Yc(S)|\underline{\underline{G}}_t]$ d'après le lemme 4, et la fin de la première construction. ▯

RALENTISSEMENT FINAL

Nous revenons aux notations autour des lemmes 5 et 6 : étant donné un processus càdlàg. X adapté à $(\underline{\underline{G}}_t)$, il admet des ralentis X^i (ralentissement associé à (σ_t^i), formule (3)) et X^* (ralentissement associé à (σ_t), formule (1)). Nous noterons aussi $Y\longmapsto Y^{*k}$ le ralentissement associé à $(\hat{\sigma}_t^k)$, formule (5)), qui permet de passer de X^k à X^*.

Le lemme 6 nous dit que l'on passe de X^i à X^{i+1} par une étape élémentaire de ralentissement de R_{i+1} à l'instant $\sigma^i_{T_{i+1}}$. Définissons $\underline{\underline{H}}_t^{i+1}$ comme la tribu engendrée par les v.a. X_t^{i+1}, X parcourant l'ensemble des processus càdlàg. adaptés à $(\underline{\underline{G}}_t)$; le lemme 7 et une récurrence immédiate nous disent que

$$\underline{\underline{G}}_t \supset \underline{\underline{H}}_t^0 \supset \underline{\underline{H}}_t^1 \ldots \quad \text{et nous poserons} \quad \underline{\underline{H}}_t = \bigcap_i \underline{\underline{H}}_t^i$$

Toutes les familles $(\underline{\underline{H}}_t^i)$ satisfaisant aux conditions habituelles, il en est de même de $(\underline{\underline{H}}_t)$.

LEMME 9. Si X est càdlàg. adapté à $(\underline{\underline{G}}_t)$, X^* est adapté à $(\underline{\underline{H}}_t)$.

DEMONSTRATION. Pour tout i, X^i est adapté à $(\underline{\underline{H}}_t^i)$ (récurrence sur le lemme 7), donc X^{i+k} est adapté à $(\underline{\underline{H}}_t^i)$ puisque les filtrations décroissent, donc (lemme 6) X^* est adapté à $(\underline{\underline{H}}_t^i)$ pour tout i, et finalement à $(\underline{\underline{H}}_t)$. ▯

Si U est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{G}}_t)$, nous notons U^* le temps d'arrêt de $(\underline{\underline{H}}_t)$ tel que $I_{[\![U^*,\infty[\![}$ soit le ralenti de $I_{[\![U,\infty[\![}$ ($U^*=\sigma_U$ si U T_i pour tout i ; $U^*=\sigma_U+R_i$ si $U=T_i$)

Nous allons maintenant nous servir du lemme 8 pour calculer des martingales de la forme $E[Z|\underline{\underline{H}}_t]$ où

(12) $\quad Z = Yc_0(S_0)\ldots c_k(S_k)$ (Y $\underline{\underline{F}}_\infty$-mes. bornée, $c_0,..,c_k$ bornées sur $\mathbb{R}$)

notre but est de démontrer :

LEMME 10. 1) <u>Les sauts de la martingale</u> $Z_t = E[Z|\underline{\underline{H}}_t]$ <u>sont totalement inaccessibles</u>/$(\underline{\underline{H}}_t)$.

2) <u>Si</u> $c_0 = \ldots = c_k = 1$, <u>i.e. si</u> $Z=Y$ $\underline{\underline{F}}_\infty$-<u>mesurable, et si</u> $Y_t = E[Y|\underline{\underline{F}}_t]$, <u>la martingale</u> (Z_t) <u>est le processus ralenti</u> (Y_t^*).

3) <u>Dans tous les cas, le processus</u> (Z_{σ_t}) <u>est une version de la martingale</u> $E[Z|\underline{\underline{G}}_t]$.

DEMONSTRATION. Plutôt que de travailler avec des notations compliquées, nous allons traiter le cas particulier où $k=1$, $Z = Yc_0(S_0)c_1(S_1)$.

Nous introduisons d'abord la martingale $Y_t = E[Y|\underline{\underline{F}}_t] = E[Y|\underline{\underline{G}}_t]$ (lemme 4, et conclusions de l'étape des ralentissements). Nous savons que les sauts de Y_t sont de deux sortes : 1) des sauts totalement inaccessibles /$(\underline{\underline{G}}_t)$, 2) des sauts portés par les graphes $[\![T_i]\!]$.

Nous ralentissons maintenant pour passer de $(\underline{\underline{G}}_t)$ à $(\underline{\underline{H}}_t^0)$, et nous calculons au moyen du lemme (8) la martingale

$$Y_t' = E[Yc_0(S_0)|\underline{\underline{H}}_t^0]$$

Si $c_0=1$, Y_t' est simplement le processus ralenti Y_t^0 associé à Y_t (corollaire D).

Les sauts de Y' sont de trois types : 1) Ceux qui proviennent des sauts totalement inaccessibles de (Y_t) ; ils sont restés totalement inaccessibles par rapport à $(\underline{\underline{H}}_t^0)$ (corollaire E). 2) Le saut à l'instant T_0+R_0 , provenant à la fois du saut de Y en T_0 et du terme $c_0(S_0)$. Il est totalement inaccessible/$(\underline{\underline{H}}_t^0)$ (corollaire C). 3) Les sauts aux instants $\sigma_{T_i}^0$, $i\neq 0$, provenant des sauts de (Y_t) aux instants T_i, $i\neq 0$.

Nouveau ralentissement pour passer de $(\underline{\underline{H}}_t^0)$ à $(\underline{\underline{H}}_t^1)$, et cette fois nous voulons calculer

$$Y_t'' = E[Yc_0(S_0)c_1(S_1)|\underline{\underline{H}}_t^1]$$

Si $c_1=1$, Y_t'' est simplement le ralenti associé à Y_t' , et si $c_0=c_1=1$, Y_t'' est le ralenti Y_t^1 associé à Y_t .

Nous appliquons le lemme 8, $(\underline{\underline{H}}_t^0)$ jouant le rôle précédemment dévolu à $(\underline{\underline{G}}_t)$, et $Yc_0(S_0)$ le rôle de Y, (Y_t') celui de (Y_t). Nous voyons que les sauts de Y'' sont de trois types : 1) ceux qui proviennent des sauts totalement inaccessibles de (Y_t'), y compris le saut du type 2) de l'étape précédente ; ils sont totalement inaccessibles/$(\underline{\underline{H}}_t^1)$. 2) Le saut à l'instant $\sigma_{T_1}^0+R_1$, provenant à la fois du saut de Y en T_1 et du terme $c_1(S_1)$. Il est totalement inaccessible /$(\underline{\underline{H}}_t^1)$ (corollaire C). 3) Les sauts aux instants $\sigma_{T_i}^1$, $i\neq 0,1$, provenant des sauts de (Y_t) aux instants $T_i, i\neq 0,1$.

Nouveau ralentissement pour passer de $(\underline{\underline{H}}_t^1)$ à $(\underline{\underline{H}}_t^2)$, cette fois sans facteur $c_2(S_2)$, de sorte que la nouvelle martingale vaut simplement

$$Y_t''' = E[Z|\underline{\underline{H}}_t^1]$$

et s'obtient par ralentissement de Y_t'' . Il en sera désormais de même à chaque ralentissement. Les sauts de cette martingale sont de trois sortes 1) Ceux qui proviennent des sauts totalement inaccessibles de l'étape précédente, et ils le restent. 2) Le saut à l'instant $\sigma^1_{T_2}+R_2$, qui est totalement inaccessible $/(\underline{\underline{H}}_t^2)$ (corollaire C). 3) Les sauts aux instants $\sigma^2_{T_i}$, $i\neq 0,1,2$.

Et nous poursuivons : les martingales $E[Z|\underline{\underline{H}}_t^k]$ se construisent par ralentissement successif, et à chaque étape un saut accessible devient totalement inaccessible par ralentissement. D'après la théorie des martingales, $E[Z|\underline{\underline{H}}_t^k]$ converge p.s. vers $E[Z|\underline{\underline{H}}_t]$. D'après le lemme 5, $E[Z|\underline{\underline{H}}_t^{1+k}]$ étant le k-ième ralenti de Y", il y a convergence p.s. vers $(Y'')^{*1}$, le ralenti final de Y". En particulier, si tous les c_i sont égaux à 1, ce ralenti est égal à (Y_t^*), et nous avons montré l'assertion 2) du lemme 10.

Nous venons d'écrire que la martingale $Z_t=E[Z|\underline{\underline{H}}_t]$ est le ralenti $(Y'')^{*1}$ associé à Y". Pour calculer le processus accéléré Z_{σ_t} , nous pouvons procéder en deux étapes : former $Z_{\hat{\sigma}^1_t}$, ce qui (accélération d'un ralenti) nous donne à nouveau Y" . Puis former $Y''_{\sigma^1_t}$, et le corollaire F nous montre que nous retombons alors sur $E[Y''_\infty|\underline{\underline{G}}_t] = E[Z|\underline{\underline{G}}_t]$. Nous avons montré l'assertion 3) du lemme 10.

Reste l'assertion 1). Il s'agit de montrer que l'inaccessibilité totale obtenue aux étapes partielles est préservée dans le ralentissement final.

1) Si U est un temps totalement inaccessible$/(\underline{\underline{F}}_t)$, le temps d'arrêt U^* qui lui correspond dans la famille $(\underline{\underline{H}}_t)$ est totalement inaccessible. En effet, il existe une martingale $Y_t=E[Y|\underline{\underline{F}}_t]=E[Y|\underline{\underline{G}}_t]$ continue partout, à l'exception d'un saut unité à l'instant U ; la martingale ralentie Y_t^* possède la même propriété relativement à U^*.

2) De même, le temps d'arrêt $V=T_0+R_0$ de la famille $(\underline{\underline{H}}_t^0)$ était totalement inaccessible, et le temps d'arrêt V^{*0} qui lui correspond dans le ralentissement final l'est aussi. En effet (corollaire C) la martingale $Y'_t=E[S_0|\underline{\underline{H}}_t^0]$ est continue partout, à l'exception d'un saut unité à l'instant V ; nous avons vu que la martingale $E[S_0|\underline{\underline{H}}_t]$ s'obtient par ralentissement de Y'_t , elle possède donc la même propriété relativement à V^{*1}. Et on procède de même pour les temps d'arrêt $\sigma^i_{T_{i+1}}+R_{i+1}$ de (H_t^{i+1}).

Reprenant alors la construction de Z_t donnée ci-dessus, on voit que (Z_{τ}) ne possède plus de sauts accessibles. $\square$

Nous pouvons enfin démontrer l'énoncé de la page 1 :

LEMME 11. 1) La famille de tribus $(\underline{\underline{H}}_t)$ est quasi-continue à gauche.
2) σ_t est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{H}}_t)$ et on a $\underline{\underline{G}}_t=\underline{\underline{H}}_{\sigma_t}$.

DEMONSTRATION. Les martingales (Z_t) du lemme 10 n'ont pas de sauts accessibles. Par un raisonnement de classes monotones (cf. la démonstration du lemme 4, c)), il en est de même pour toutes les martingales $E[Z|\underline{\underline{H}}_t]$, $Z\in L^1(\underline{\underline{G}}_\infty)$, et la filtration $(\underline{\underline{H}}_t)$ est donc quasi-continue à gauche.

Le processus croissant (τ_t) est le processus ralenti du processus càdlàg. adapté à $(\underline{\underline{G}}_t)$ $X_t=t$. D'après le lemme 9, (τ_t) est un processus croissant adapté à $(\underline{\underline{H}}_t)$, donc (σ_t) est un changement de temps de $(\underline{\underline{H}}_t)$.

Nous avons vu que les martingales (Z_t) du lemme 10 satisfont à la relation $E[Z|\underline{\underline{G}}_t]=Z_{\sigma_t}$. Cela s'étend par classes monotones à toutes les martingales $Z_t=E[Z|\underline{\underline{H}}_t]$, $Z\in L^1(\underline{\underline{G}}_\infty)$. D'autre part, sachant que σ_t est un temps d'arrêt, nous pouvons écrire cela $E[Z|\underline{\underline{G}}_t]=E[Z|\underline{\underline{H}}_{\sigma_t}]$. Ces deux tribus contenant les ensembles de mesure nulle, elles sont alors égales. ▯

REMARQUE. La partie 2 du lemme 10 donne un renseignement important, qui ne figure pas dans l'énoncé du théorème, p.1 . Si Y appartient à $L^1(\underline{\underline{F}}_\infty)$, considérons les deux martingales

$$Y_t = E[Y|\underline{\underline{F}}_t] = E[Y|\underline{\underline{G}}_t] \quad \text{et} \quad Z_t = E[Y|\underline{\underline{H}}_t]$$

Le théorème nous dit que $Y_t=Z_{\sigma_t}$, permettant de construire (Y_t) à partir de (Z_t). Mais nous savons en fait que $Z_t=Y^*_t$, qui nous donne la construction inverse, par ralentissement.

REFERENCES

[D] DELLACHERIE, C. Capacités et processus stochastiques. Springer-Verlag, Heidelberg 1972.

[1] DELLACHERIE, C. et STRICKER, C. : Changements de temps et intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités XI, Université de Strasbourg. Springer-Verlag 1977.

[2] MEYER, P.A. : Renaissances, recollements, mélanges, ralentissements de processus de Markov. Ann. Inst. Fourier 25, 465-498 (1975).

NOTE. C. DELLACHERIE nous a signalé une légère erreur dans les démonstrations précédentes : revenant à la définition des $\underline{\underline{G}}^k_t$, on constate que ces tribus ne contiennent pas les variables $S_n I_{\{T_n=\infty\}}$ $(n\leq k)$. Il faut donc, ou décider que $\underline{\underline{G}}^k_\infty$ est engendrée par $\underline{\underline{G}}^k_{\infty-}$ et ces v.a., d'où quelques détails à modifier, ou se ramener au cas où les T_n sont finis (au prix de ralentissements inutiles). Nous remercions DELLACHERIE pour cette correction.