Paul Krée

Prodistributions

Séminaire Paul Krée, tome 1 (1974-1975), exp. n^{o} 2, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SPK_1974-1975__1__A3_0>

Séminaire Paul KRÉE
Equations aux dérivées partielles
en dimension infinie
1re année, 1974/75, n° 2, 14 p.

PRODISTRIBUTIONS

par Paul KRÉE

1. Notations.

Soit X un espace localement convexe séparé (e. l. c. s.) réel, et soit X' son dual topologique.

(1.1) Les bonnes familles de sous-espaces de X : Soit $F_u = F_u(X)$ une famille de sous-espaces vectoriels fermés A_i de X indexée dans un ensemble I. On dit que F_u est une bonne famille si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) tous les A_i sont de codimension finie ;

(b) on munit I de la relation d'ordre $i \geqslant j$ si $A_i \subset A_j$. Alors l'ordre sur I est filtrant à droite ; autrement dit, quels que soient i et i', il existe j tel que $j \geqslant i$ et $j \geqslant i'$;

(c) $\bigcap_i A_i = 0$.

Ces propriétés équivalent aux propriétés suivantes de la famille $F_u^\perp$ des $U_i = A_i^\perp$:

(a') tous les U_i sont de dimension finie ;

(b') quels que soient U_i et $U_{i'}$ dans $F_u^\perp$, il existe U_j dans F_u contenant U_i et $U_{i'}$;

(c') les U_i engendrent un sous-espace vectoriel dense de X' faible.

(1.2) Propriétés.

(a) Si $F_u(X) = \{A_i \; ; \; i \in I\}$ et $F_v(X) = \{B_j \; ; \; j \in J\}$ sont deux bonnes familles de sous-espaces des e. l. c. s. X et Y ; alors :

$$F_{u.v} = \{A_i \times B_j \; ; \; (i , j) \in I \times J\}$$

est une bonne famille de sous-espaces de $X \times Y$.

(b) Soit ℓ une application linéaire faiblement continue de l'e. l. c. s. X dans l'e. l. c. s. Y, et soit $F_v(Y)$ une bonne famille sur Y ; alors les images réciproques par ℓ des éléments de F_v forment une bonne famille F_u sur X, notée $\ell^{-1}(F_u)$. D'ailleurs, les éléments de $F_u^\perp$ sont les images par la transposée ℓ' de ℓ des éléments de $F_v^\perp$.

(c) Soit ℓ linéaire faiblement continue injective à image dense de l'e. l. c. s. X dans l'e. l. c. s. Y. On identifie X à un sous-espace vectoriel de Y, et Y' à un sous-espace vectoriel de X', à l'aide de ℓ'. Alors, pour toute bonne famille F_u sur X , la famille des traces $V_i = A_i^\perp \cap Y'$ des éléments de $F_u^\perp$ vérifie les propriétés (a'), (b') et (c'). Donc, les $V_i^\perp$ forment une bonne famille F_v sur Y . Notons que $F_u \neq \ell^{-1}(F_v)$ en général, mais que pourtant, tout A_i de F_u est contenu dans un élément de $\ell^{-1}(F_v)$.

(1.3) Le système projectif d'espaces vectoriels $\pi_u(X) = \{X_i , s_{ij}\}$: A une bonne famille $F_u(X)$ de sous-espaces vectoriels de X , on associe le système projectif $\pi_u(X)$ ainsi construit. Pour tout i , on pose $X_i = X/A_i$. Si $A_i \subset A_j$, on note s_{ij} la surjection canonique de X_i sur X_j . Pour tout i , on note s_i la surjection canonique de X sur X_i .

(1.4) Le système projectif d'ouverts $\pi_u(0) = \{0_i , \bar{s}_{ij}\}$: De même, si 0 est un ouvert non vide de X , on pose $0_i = s_i(0)$. Pour $A_i \subset A_j$, on note $\bar{s}_{ij}$ l'application de 0_i sur 0_j qui coïncide avec S_{ij} sur 0_i . On obtient ainsi un système projectif d'ouverts non vides.

(1.5) Fonction u-cylindrique : Sauf indication contraire, nous considérons des fonctions et des distributions à valeurs complexes. L'espace X est équipé d'une bonne famille $F_u(X)$, et soit 0 un ouvert non vide de X . Une fonction numérique φ définie sur 0 est dite u-cylindrique si elle se factorise à travers un X_i :

$$(1.5.1) \qquad \exists\, i \in I , \quad \exists\, \varphi_i : 0_i \longrightarrow \underset{\sim}{C} ; \quad \varphi = \varphi_i \,\bar{s}_i .$$

On dit alors que X_i est une base de φ . Il faut noter qu'une fonction cylindrique admet plusieurs bases. Dans le cas particulier où F_u est la bonne famille maximale, on dit simplement que φ est cylindrique.

(1.6) Espaces de fonctions u-cylindriques (ou cylindriques) : Soit k un entier positif fixé. On note respectivement :

$$\mathcal{C}^k(0_i) , \mathcal{B}^k(0_i) , \mathcal{L}^k(0_i) = \mathcal{O}_m^k(0_i) , \mathcal{P}(0_i) , \mathcal{A}n(0_i) , \mathcal{TL}(0_i)$$

l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur 0_i , le sous-espace de $\mathcal{C}^k(0_i)$ formé par les fonctions à dérivées bornées jusqu'à l'ordre k , ou par les fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont à croissance lente, les fonctions polynômes, les fonctions analytiques, les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à croissance très lente. Ces définitions se prolongent naturellement si $k = +\infty$; et alors la lettre k est supprimée : ainsi par exemple on écrit $\mathcal{B}(0_i)$ au lieu de $\mathcal{B}^\infty(0_i)$.

Soit s_{ij} une surjection canonique de X_i sur X_j et $\bar{s}_{ij}$ la surjection correspondante de 0_i sur 0_j . On définit par exemple l'espace $\mathcal{C}^k_{cyl}(0)$ des fonctions u-cylindriques de classe $\mathcal{C}^k$ sur 0 comme l'espace des fonctions u-cylindriques sur 0 admettant une factorisation $\varphi_i \circ s_i$ avec $\varphi_i \in \mathcal{C}^k(0_i)$. Cet espace est aussi la limite inductive du système $(\mathcal{C}^k(0_i) , \alpha_{ij})$ d'espaces vectoriels, α_{ij} appliquant l'élément φ_j de $\mathcal{C}^k(0_j)$ sur $\varphi_j \circ \overline{s_{ij}} \in \mathcal{C}^k(0_i)$. On définit de même les espaces $\mathcal{B}^k_{u-cyl}(0_i)$, ...

(1.7) Le système inductif $\pi'_u = \{X'_i, s'_{ij}; i$ et $j \in I, i \geq j\}$; l'espace Ξ : Soient i et j deux indices de I tels que $i \geq j$. Alors, par transposition des applications surjectives faiblement continues $s_i : X \longrightarrow X_i$ et $s_{ij} : X_i \longrightarrow X_j$, on obtient les injections $s'_{ij} : X'_j \longrightarrow X'_i$ et $s'_i : X'_i \longrightarrow X'$. Le système inductif $\pi' = (X'_i, s'_{ij})$ admet donc une limite inductive Ξ qui s'identifie à un sous-espace vectoriel Ξ de X'. La condition (1.1.c) entraîne que Ξ est un sous-espace vectoriel partout dense (nous dirons dense) de X.

2. Prodistributions (voir [2]).

(2.8) DÉFINITION. - Soit O un ouvert non vide de l'espace localement convexe séparé réel X. Soit $F_u(X) = (A_i)$ une bonne famille de sous-espaces de X, et soit $\pi_u(X) = (O_i, \overline{s}_{ij})$ le système projectif d'ouverts associés à $F_u(X)$ et O. Une u-prodistribution T sur O est une famille (T_i) de distributions T_i sur les O_i, vérifiant la condition de cohérence suivante :

Pour tout couple (i, j) tel que $A_i \subset A_j$, s_{ij} est T_i-propre, et l'on a $\overline{s}_{ij}(T_i) = T_j$.

Si la bonne famille F_u est fixée, on dit aussi pour simplifier que T est une prodistribution. Notons que, vu (3.17) de l'exposé 1, la condition de cohérence entraîne que pour tout triplet (i, j, k),, tel que $A_i \subset A_j \subset A_k$, on a :

$$\overline{s}_{ik}(T_i) = \overline{s}_{jk}(\overline{s}_{ij}\, T_i) = \overline{s}_{jk}(T_j) .$$

L'ensemble des u-prodistributions sur X est noté $\mathcal{D}'_{u-cyl}(X)$, ou simplement $\mathcal{D}'_{cyl}(X)$ si F_u est fixée une fois pour toutes. Dans le cas où la bonne famille fixée est la bonne famille maximale, on dit simplement que T est une prodistribution.

(2.9) Cas particuliers : Soit $T \in \mathcal{D}'_{u-cyl}(X)$. Si, pour tout i, T_i est une distribution bornée (resp. une distribution bornée d'ordre au plus k), on dit que T est une u-prodistribution bornée (resp. une u-prodistribution bornée d'ordre au plus k). Lorsque, pour tout i, T_i est une mesure (resp. une probabilité), on dit que T est une u-promesure (resp. une promesure de probabilité). Notons que si le système projectif $\pi_u(X)$ contient un espace de dimension zéro, alors forcément T est une u-prodistribution bornée.

(2.10) Restriction à un ouvert plus petit : Soit T une u-prodistribution sur O, et soit O' un ouvert non vide contenu dans O. On pose $O'_i = s_i(O')$, et l'on suppose que, pour toute surjection s_{ij}, $O'_i = s_{ij}^{-1}(O'_j) \cap O_i$. Soit T'_i la restriction de T_i à O'_i. La collection des T'_i définit une u-prodistribution sur O', appelée restriction de T à O'.

(2.11) Notion de supporteur : Soit T une u-prodistribution sur l'e. l. c. s. X, et soit K une partie de X. On dit que K est un supporteur de $T = (T_i)_I$

si, pour tout i, $s_i(T)$ est portée par l'adhérence de $s_i(K)$.

(2.11.1) $$\forall\, i \in I\,,\quad \mathrm{Supp}(s_i\, T) \subseteq \overline{s_i(K)}\ .$$

En particulier, on dit que T admet un supporteur de dimension finie si T admet comme supporteur un sous-espace de dimension finie de X. La notion de supporteur est une notion plus faible que la notion de support. Le problème de l'existence de supporteur est abordé dans l'exposé suivant.

(2.12) Changement de bonne famille : Soient $F_u = \{A_i\ ;\ i \in I\}$ et $F_w = \{B_j\ ;\ j \in J\}$ deux bonnes familles de sous-espaces de X. Soit T une u-prodistribution sur X. On dit que T admet le changement de bonne famille $F_u \dashrightarrow F_w$ si :

- pour tout $j \in J$, l'ensemble I' des i de I tels que $A_i \subset B_j$ est non vide,
- et pour tout i de I', la surjection canonique $\sigma_{ij} : X/A_i \dashrightarrow X/B_j$ est T_i-propre.

Si on pose alors $U_j = \sigma_{ij}(T_i)$, il résulte de la propriété (3.17) de l'exposé 1, que cette définition de U_j ne dépend pas de $i \in I'$. De même, les U_j vérifient la condition de cohérence. On a ainsi défini à partir de T une w-prodistribution $U = (U_j)$.

La construction précédente permet dans certains cas, étant donnée une u-prodistribution T, de changer ou d'étendre la bonne famille F_u qui a servi à définir T. Signalons que le résultat (3.18) ci-dessous peut aussi être utilisé pour étendre la bonne famille F_u.

(2.13) Exemples de systèmes projectifs π_u.

(a) Soit $F_c(X)$ la famille de tous les sous-espaces vectoriels fermés de codimension finie de X. Le système projectif correspondant $\pi_c(X)$ est le système projectif intervenant dans la théorie des probabilités cylindriques. Une famille cohérente de distributions relativement à $\pi_c(X)$ est une prodistribution.

(b) Le système $\pi_v(\ell^2)$: Munissons $\ell^2 = \{x = \sum_{n=1} x_n\, e_n\ ;\ \Sigma x_n^2 < \infty\}$ de la topologie faible. Pour tout $n \geqslant 0$, X^n désigne le sous-espace fermé de ℓ^2 engendré par e_{n+1}, e_{n+2} ... Alors ℓ^2/X^n est isomorphe au sous-espace X_n engendré par $e_1 \dots e_n$ pour $n \geqslant 1$, et au sous-espace nul X_0 pour $n = 0$. Pour $p \geqslant q$, on a une surjection canonique s_{pq} de X_p sur X_q. A la famille $F_v(\ell^2)$, formée par les X_n, correspond le système projectif

$$\pi_v(\ell^2) = \{X_p\ ,\ s_{pq}\ ,\ p \text{ et } q \geqslant 0\}\ ,$$

utilisé par M. VIŠIK dans sa théorie des opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces de Hilbert.

(c) Le système $\pi_t(R \times \ell^2)$: Soit $X = \underset{\sim}{R} \times \ell^2$ muni de la topologie faible associée à la structure hilbertienne canonique. Soit $(B_j)_{j\in J} = F_c(\ell^2)$. Prenons $F_t(X) = \{0 \times B_j \; ; \; j \in J\}$. On obtient ainsi le système projectif $\pi_t(X)$, qui est bien adpaté à l'étude d'équations aux dérivées partielles d'évolution. En effet, considérons par exemple deux entiers n' , $n'' \geq 1$, $n = n' + n''$. La solution élémentaire usuelle de la chaleur sur $R \times X_n$ est une mesure positive de masse infinie :

$$E^n(t\,,\,x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp(-\,(x_1^2 + \ldots + x_n^2)/4t)\; dt\; dx_1 \ldots dx_n \;.$$

L'image de cette mesure par la deuxième projection canonique

$$(t\,,\,x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n) \longrightarrow (x_1 \ldots x_n)$$

donne une mesure de masse infinie, ce qui laisse penser que le système $\pi_c(X)$ n'est pas adapté à l'étude de l'équation de la chaleur sur $\underset{\sim}{R} \times \ell^2$.

Au contraire, la surjection canonique $s_{nn'}$: $(t\,,\,x_1 \ldots x_n) \longrightarrow (t\,,\,x_1 \ldots x_{n'})$ est E^n-propre.

(d) Le système $\pi_{tv}(R\,,\,\ell^2)$: C'est celui obtenu en prenant

$$F_{tv}(R \times \ell^2) = \{0 \times X^n \; ; \; n \geq 0\} \;.$$

3. Transformation de Fourier (T. F.).

(3.14) On rappelle d'abord comment la définition de la T. F. d'une distribution dépend du choix d'une mesure de Haar. Soit Y un espace réel de dimension finie k . Pour $\varphi \in \mathcal{D}(Y)$, $\hat{\varphi}$ est la fonction suivante sur Y' :

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int \varphi(x) \exp(-\,i(\xi\,,\,x))\; dx \;.$$

L'application $\varphi \longrightarrow \hat{\varphi}$ réalise un isomorphisme de $\mathcal{D}(Y)$ sur un certain espace $\mathcal{Z}(Y')$ de fonctions analytiques. Pour toute distribution θ sur Y , on pose :

(3.14.1) $$\forall\, \varphi \in \mathcal{Z}(Y') \;,\quad (\hat{\theta}\,,\,\varphi) = (\theta\,,\,\hat{\varphi}) \;.$$

Remplaçons dx par λdx , où λ est un scalaire positif. Alors la mesure duale $d\xi$ sur Y' est remplacée par $\lambda^{-1}\, d\xi$. La formule (3.15.1) montre que $\hat{\theta}$ est remplacé par $\lambda^{-1}\,\hat{\theta}$. Par conséquent, la T. F. d'une distribution dépend du choix initial d'une mesure de Haar sur Y .

Cependant, si $\hat{\theta}$ est définie par une fonction localement intégrable Φ sur Y , alors cette fonction Φ est indépendante de dx . En effet, on peut écrire :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{Z}(Y') \;,\quad \int \varphi(\xi)\, \Phi(\xi)\, d\xi = (\theta\,,\,\hat{\varphi}) \;,$$

et si l'on remplace dx par λdx (et $d\xi$ par la mesure duale de $\lambda^{-1}\,dx$), on obtient :

$$\int \varphi(\xi)\, \Phi(\xi)\, \frac{d\xi}{\lambda} = (\theta\,;\,\frac{\hat{\varphi}}{\lambda}) = \lambda^{-1}(\theta\,,\,\hat{\varphi}) \;.$$

Nous pouvons donc poser la définition suivante :

(3.15) DÉFINITION. - Soit F_u une bonne famille de sous-espace de X , et soit T une u-prodistribution sur X .

Supposons que, pour tout i , $\hat{T}_i$ soit définie par une fonction localement intégrable Φ_i sur $X_i^!$. On définit alors $\hat{T}$ comme étant la collection $(\Phi_i)_i$ de ces fonctions.

(3.16) Cas particuliers : Si T est une promesure de probabilité, $\hat{T}_i$ est bornée continue pour tout i .

(3.17) LEMME. - Soient Y et Z deux espaces vectoriels réels de dimension finie. Soit s une application linéaire surjective de Y sur Z . La transposée s' de s identifie Z' à un sous-espace de Y' .

Soit T une distribution sur Y , telle que s soit T-propre. On suppose que $\hat{T}$ est continue sauf au plus en un nombre fini de points au voisinage desquels elle est localement intégrable, ainsi que la restriction de $\hat{T}$ à Z' .

Soit $U \in \mathcal{D}'(Z)$. Alors pour que l'on ait $s(T) = U$, il faut et il suffit que $\hat{U}$ soit la restriction de $\hat{T}$ à Z' .

Preuve : Comme la T. F. est bijective, il suffit de montrer que la condition de l'énoncé est nécessaire. En utilisant la factorisation canonique de s , on se ramène au cas où s est la projection canonique de $R^n = R^{n'} \times R^{n''}$ sur $R^{n'}$.

On pose, pour tout x de R^n , $x = (x' , x'')$, x' $R^{n'}$, $x'' \in R^{n''}$.

Comme la relation à démontrer est évidente si T est bornée, on se ramène à ce cas par troncature. Plus précidément, soit $\zeta \in \mathcal{D}(R^{n'})$ égale à 1 dans un voisinage de l'origine. On pose $\zeta_k(x') = \zeta(x'/k)$, $\tilde{\zeta}_k(x) = \zeta_k(sx)$. Comme $sT = U$, on a $s(\tilde{\zeta}_k T) = \zeta_k U$.

$$\widehat{\tilde{\zeta}_k T} = (2\pi)^{-n'} (\hat{\zeta}_k(\xi') \otimes \delta_0(\xi'')) * \hat{T}$$

$$\widehat{\zeta_k U} = (2\pi)^{-n'} \hat{\zeta}_k * \hat{U} .$$

Les fonctions continues $\widehat{\tilde{\zeta}_k T}$ et $\widehat{\zeta_k U}$ sont donc telles que :

$$\text{Trace sur } Z' \text{ de } [(2\pi)^{-n'}[\hat{\zeta}_k(\xi') \otimes \delta_0(\xi'')] * \hat{T}] = (2\pi)^{-n'} \hat{U} * \hat{\zeta}_k .$$

Posant $\rho(\xi') = \hat{\zeta}(\xi').(2\pi)^{-n'}$, $\rho_k = (2\pi)^{-n'} \hat{\zeta}_k$, $\rho_k(\xi') \longrightarrow \delta_0(\xi')$,

$$[(\rho_k \otimes \delta_0(\xi')) * \hat{T}](\xi' , 0) = (\hat{U} * \rho_k)(\xi') .$$

Lorsque k tend vers l'infini, le premier membre tend vers $\hat{T}\lceil Z'$ dans $\mathcal{Z}'$, tandis que le second membre tend vers $\hat{U}$ dans $\mathcal{Z}'$. D'où $\hat{U} = \hat{T}\lceil Z'$.

(3.18) Utilisation du lemme pour la construction de prodistributions : Soit Φ une fonction définie sur $\Xi = \bigcup X_i^!$, telle que :

(a) pour tout i , la restriction Φ_i de Φ à $X_i^!$ est continue sauf au plus en un nombre fini de points au voisinage desquels elle est localement intégrable.

(b) toute surjection $s_{ij} : X_i \longrightarrow X_j$ est T_i-propre avec $T_i = \bar{\mathcal{F}}\Phi_i$.

Alors, Φ est la T. F. d'une prodistribution relative au système projectif des X_i .

(3.19) Exemple.

(a) Supposons que $\Phi(0) = 1$, et que la restriction de Φ à tout X_i' est une fonction continue de type positif. Alors Φ est la T. F. d'une probabilité cylindrique. Par exemple, on peut prendre

$$\pi_u = \pi_c \quad \text{et} \quad \Phi(\xi) = \exp(-\tfrac{1}{2}(A\xi , \xi)) ,$$

où A est un noyau positif de X' vers X , c'est-à-dire un opérateur symétrique positif de X' dans X . Dans le cas où $X = \ell^2 = \{\sum_1 x_n e_n ; \sum x_n^2 < \infty\}$, X étant identifié à son dual, alors la fonction $\Phi(x) = \prod_1^\infty (1 - ix_n)^{-1}$, définie sur la réunion des $X_N = \{\sum_1^N x_n e_n ; x_n$ réels$\}$ est la T. F. d'une v-promesure de probabilité sur ℓ^2 . On notera toujours ν la promesure normale canonique sur un espace de Hilbert séparable X ; on a

$$\hat{\nu}(\xi) = \exp(-\tfrac{1}{2}\|\xi\|)^2 .$$

Plus généralement, si $\lambda > 0$, on définit $\nu_\lambda = \nu(\lambda)$ par $\hat{\nu}_\lambda(\xi) = \exp(-\frac{1}{2}\lambda\|\xi\|^2)$.

(b) Soit X un espace hilbertien réel identifié à son dual. Soit $\lambda > 0$. Cécile B. DeWitt [1] avait défini la pseudo-mesure de Feymann w_λ sur X comme la collection des distributions $w_{\lambda,i}$ sur les sous-espaces X_i de dimension finie de X , $w_{\lambda,i}$ ayant pour transformée de Fourier la restriction à X_i de la fonction

$$(3.19.1) \qquad \begin{aligned} &X \longrightarrow \underset{\sim}{C} \\ &x \longrightarrow \hat{w}_\lambda(x) = \exp(-(\lambda\sqrt{-1}\,\|x\|^2)/2 . \end{aligned}$$

(c) Soit s un réel quelconque. La prodistribution de Bessel G_s sur un espace de Hilbert réel H est la prodistribution de T. F. $\Phi(\xi) = (1 + \|\xi\|^2)^{-s/2}$.

Vu le lemme (3.17) et vu le lemme ci-dessous, on peut affirmer que w_λ est une prodistribution, et même une prodistribution à décroissance rapide.

(3.20) LEMME. - Pour tout $\lambda > 0$ et pour tout i , $w_{\lambda,i}$ est une distribution à décroissance rapide.

Principe de la démonstration : Par prolongement holomorphe en λ à partir de la demi-droite où λ est réel positif, on obtient

$$w_{\lambda,i} = (2\pi\lambda\sqrt{-1})^{-(n/2)} \exp(-(\|x\|^2)/(2\lambda\sqrt{-1}))\, dx ,$$

où n désigne la dimension de X_i . Le lemme est démontré dans le cas particulier où $n = 1$, dans la théorie des distributions de L. SCHWARTZ. Dans le cas où n est quelconque, on note que $w_{\lambda,i}$ est une distribution radiale. Autrement dit, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\underset{\sim}{R})$, si $\tilde{\varphi}$ est la radialisée de $\underset{\sim}{R}$, on a

$$\langle w_{\lambda,i} , \varphi\rangle = \langle w_{\lambda,i} , \tilde{\varphi}\rangle = a_n(2\pi\lambda\sqrt{-1})^{-(n/2)} \int_0^\infty r^{n-1} \exp((r^2\sqrt{-1})/2\lambda)\, \tilde{\varphi}(r)\, dr ,$$

où a_n est l'aire de la sphère unité de X_i . Il suffit alors de faire un nombre suffisant d'intégrations par parties.

(3.21) Prodistribution $P(D)\delta_0$: On rappelle qu'une fonction polynôme $p_m(\xi)$, homogène de degré m sur Ξ , est du type :

$$\Xi \longrightarrow \underset{\sim}{C}$$

$$\xi \longmapsto f(\xi , \ldots , \xi)$$

où f est une application multilinéaire symétrique de Ξ^n dans $\underset{\sim}{C}$. L'identité suivante (dite de polarisation)

$$f(\xi_1 , \ldots , \xi_n) = \frac{1}{n!\ 2^n} \sum_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n\ p(\varepsilon_1 \xi_1 + \ldots + \varepsilon_n \xi_n)$$

montre qu'un polynôme homogène est défini par une seule forme multilinéaire symétrique.

Une fonction polynôme sur Ξ s'écrit

$$p(\xi) = p_0(\xi) + \ldots + p_m(\xi) ,$$

où p_j est une fonction polynôme homogène de degré j .

La u-prodistribution $P(D)\delta_0$ est par définition la u-prodistribution de T. F. $p(\xi)$, définie sur $\Xi = \bigcup_i X_i'$.

(3.22) Exemple.

(a) Soit H un espace de Hilbert réel identifié à son dual. On note $-\Delta\delta_0$ la prodistribution de transformée de Fourier $\xi \longrightarrow \|\xi\|^2$.

(b) Mais quels que soient les coefficients a_{ij} , i et $j \geqslant 1$, la fonction

$$\bigcup_N X_N \longrightarrow \underset{\sim}{C}$$

$$(x_i)_i \longmapsto \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i\, x_j$$

est la T. F. d'une v-prodistribution sur ℓ^2 .

(c) Sur $R_t \times H$, on note respectivement $\delta_t - \Delta$ et $\square$ les prodistributions de T. F.

$$(z , \xi) \longmapsto i\tau + \|\xi\|^2 \quad \text{et} \quad (\tau , \xi) \longrightarrow -\tau^2 + \|\xi\|^2 .$$

4. Autres opérations.

(4.23) Image d'une prodistribution par une application linéaire : Soient X et Y deux espaces localement convexes séparés munis chacun de bonnes familles $F_u(X)$ et $F_w(Y) = \{B_j ; j \in J\}$.

On note t_j la surjection canonique de Y sur $Y_j = Y/B_j$ et t_{jk} les surjections canoniques $Y_j \longrightarrow Y_k$. Soit ℓ une application linéaire continue de X dans Y , telle que, pour tout j dans J , $\ell^{-1}(B_j) \in F_u(X)$. Etant donnée une u-prodistribution $T = (T_i)$ sur X , on veut définir son image U par ℓ comme w-prodistribution sur Y . Or, posant pour tout j : $A_j = \mathrm{Ker}\, t_j \ell$, on a une application linéaire injective ℓ_j qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\ell} & Y \\ s_j \big\downarrow & & \big\downarrow t_j \\ X/A_j & \xrightarrow{j} & Y_j = Y/B_j \end{array} \tag{4.23.1}$$

Il suffit de poser $U_j = \ell_j(T_j)$, et de vérifier que les U_j vérifient la condition de cohérence.

(4.24) Signalons quelques propriétés de cette notion d'image.

(a) Transitivité : Soient trois espaces X , Y et Z munis respectivement de bonnes familles $F_u(X)$, $F_w(Y)$, $F_q(Z) = \{C_k \; ; \; k \in K\}$. Soient deux applications linéaires continues $\ell : X \longrightarrow Y$ et $m : Y \longrightarrow Z$ telles que :

$$\forall\, k \in K \; ; \qquad m^{-1}(C_k) \in F_w(Y)$$

$$\forall\, j \in J \; ; \qquad \ell^{-1}(B_j) \in F_u(X) \; .$$

Si T est une u-prodistribution sur X , alors $m(\ell T) = (m \circ \ell)(T)$, ℓT et $m \circ \ell(T)$ étant des u-prodistributions relatives à F_w et à F_q respectivement.

(b) Relation entre transformée de Fourier : On prend les notations correspondant à (4.23.1). Comme l'application ℓ_j est injective, on a, pour toute $\varphi \in \mathcal{Z}(Y_j')$:

$$(\hat{U}_j \; , \varphi) = (\widehat{\ell_j(T_j)} \; , \varphi) = (\ell_j(T_j) \; , \hat{\varphi}) = (T_j \; , \hat{\varphi} \circ \ell_j) \; ,$$

ce qui donne une relation entre $\hat{T}_j$ et $\hat{U}_j$. Dans le cas particulier où T est telle que sa restriction à chaque espace X_i' est une fonction continue, alors $\hat{U}$ est une fonction continue sur $\bigcup Y_i'$ telle que

$$\forall\, \eta \in \bigcup_j Y_j' \; , \qquad \hat{U}(\eta) = \hat{T}(\ell' \eta) \; . \tag{4.24.1}$$

(c) Relation entre supporteurs : Si K est supporteur de T , alors $\overline{\ell(K)}$ est supporteur de $\ell(T)$.

(4.25) Translation par un vecteur a de X : Soit $T = (T_i)$ une u-prodistribution sur X . Pour tout i , on note U_i la translatée de T_i par $a_i = s_i(a)$. Alors les U_i sont cohérentes, et définissent une u-prodistribution U appelée translatée de T par le vecteur a .

On a $\hat{U}(u) = \hat{T}(u) \exp(-\, i(a \, , u))$. Si T admet un supporteur K , alors U admet $a + K$ comme supporteur.

(4.26) Produit tensoriel de prodistributions : Soient X et Y deux e. l. c.s. réels munis respectivement de bonnes familles

$$F_u(X) = \{A_i \; ; \; i \in I\} \quad \text{et} \quad F_v(Y) = \{B_j \; ; \; j \in J\} \; .$$

Soient O un ouvert de X , O' un ouvert de Y . Soient $T \in \mathcal{D}'_{u\text{-cyl}}(O)$ et $U \in \mathcal{D}'_{v\text{-cyl}}(O')$.

On a deux systèmes projectifs d'ouverts $(O_i , \overline{s}_{ii'})$ et $(O'_j , \overline{t}_{jj'})$ avec $O_i = s_i(O)$ et $O'_j = t_j(O')$. On a un système projectif d'ouverts

$$(O_i \times O_j , \overline{s}_{ii'} \times \overline{t}_{jj'}) .$$

On pose

$$V_{ij} = T_i \otimes U_j \in \mathcal{D}'(O_i \times O'_j) .$$

On constate que les applications $s_{ii'} \times t_{jj'}$ sont V_{ij}-propres et que les distributions V_{ij} vérifient la condition de cohérence ; elles définissent donc une $u \times v$ – prodistribution sur $O \times O'$, notée $T \otimes U$. Le produit tensoriel est associatif ; la T. F. du produit tensoriel est le produit tensoriel des T. F. Si T et U admettent respectivement des supporteurs K et K' , alors $T \otimes U$ admet $K \times K'$ comme supporteur.

(4.27) <u>Convolution de prodistributions</u> : Soit $F_u(X)$ une bonne famille de sous-espaces, et soient T , U deux u-prodistributions sur X . Soit σ l'opération somme : $X \times X \longrightarrow X$, et soit $F_\sigma(X)$ la bonne famille formée par les images inverses des éléments de $F_u(X)$. On suppose que $T \otimes U$ admet le changement de bonne famille $F_u \longrightarrow F_\sigma$. Alors, on définit $T * U$ comme l'image de $T \otimes U$ par σ .

Donnons deux exemples de cas où $T \otimes U$ admet un changement de famille $F_u \rightarrow F_\sigma$: si T et U sont bornées, $T \otimes U$ s'étend en une prodistribution bornée ; si T et U sont quelconques et si l'une d'elles admet un supporteur borné, alors $T \otimes U$ définit une prodistribution $\widehat{T * U} = \hat{T} . \hat{U}$; si K_1 et K_2 sont des supporteurs de T et U , $\overline{K_1 + K_2}$ est un supporteur de $T * U$. On a associativité du produit de convolution de prodistributions si toutes, sauf une au plus, admettent un supporteur borné.

(4.28) <u>Voici quelques applications</u> :

(a) Soit X un espace de Hilbert réel. Soit F_δ la bonne famille formée par les sous-espaces fermés de codimension $\geqslant 3$. En utilisant (3.18), on montrera que l'opérateur différentiel Δ admet une solution élémentaire dans l'espace des δ-prodistributions.

(b) L'espace $X = \underset{\sim}{R} \oplus \ell^2 = \{\xi_1 , \xi') ; \xi_1$ réel, $\xi' \in \ell^2\}$ est identifié à son dual ; soit $N = (1 , 0)$. Soit P un polynôme sur X dont la restriction à tout sous-espace de dimension finie contenant N est hyperbolique par rapport à N . On montrera que $P(D)$ admet une solution élémentaire dans l'espace des t-prodistributions.

(c) Tout opérateur différentiel à coefficients constants sur ℓ^2 admet-il une solution élémentaire dans l'espace des prodistributions ?

(4.29) <u>Hypothèse restrictive et notations</u>. – Vu les applications visées (étude d'espaces du type Sobolev, mise en oeuvre des méthodes d'énergie, ...), on fait une hypothèse simplificatrice sur les prodistributions considérées. On se fixe un nombre entier $\ell \geqslant 0$, égal éventuellement à $+\infty$. L'hypothèse a deux formulations différentes, suivant que l'adhérence Z du sous-espace, engendré par les éléments de la bonne famille $F_u(X)$, diffère ou non de X.

Cas 1 : Si $Z = X$, on suppose que $0 = X$ et que l'on ne considère que des prodistributions $T = (T_i)$ sur X telles que $T_i \in \mathcal{B}'^{\ell}(X_i)$ pour tout i.

Cas 2 : Si $Z \neq X$, on suppose que 0 est le produit de Z et d'un ouvert $0'$ d'un supplémentaire Y de Z :

$$X = Y \oplus Z$$

$$0 = 0' \oplus Z$$

On suppose aussi que la frontière de $0'$ est orientable, et $\mathcal{C}^{\infty}$ la structure de variété est définie, par convention, seulement par des atlas finis. On a donc, pour tout i,

$$X_i = X/A_i = (Y \oplus Z)/(0 \oplus A_i) = Y \oplus (Z/A_i) .$$

Si $A_i \subset A_j$, l'application canonique $s_{ij} : X_i \longrightarrow X_j$ est du type $\mathrm{Id}(Y_u)\times\sigma_{ij}$, où σ_{ij} est la surjection canonique de $Z_i = Z/A_i$ sur $Z_j = Z/A_j$.

Pour tout i, on a $0_i = 0' \times Z_i$. En ce qui concerne les prodistributions $T = (T_i)$ sur 0, on suppose toujours que, pour tout i et tout ouvert d'adhérence compacte de Y, la restriction de T_i à $(\omega \cap 0') \times Z_i$ est une distribution bornée d'ordre au plus ℓ. Notons qu'alors la forme linéaire sur $\mathcal{D}(0_i)$, définie par T_i, se prolonge canoniquement à l'espace $\mathcal{D}\mathcal{B}^{\ell}(0_i)$ des φ de $\mathcal{B}^{\ell}(0_i)$ nulles en dehors de $K \times Z_i$, où K est compact de $0'$. On note $\mathcal{D}\mathcal{B}^{\ell}_{cyl}(0)$ l'espace vectoriel des fonctions cylindriques sur 0 du type $\varphi \circ s_i$, i décrivant I, et φ décrivant $\mathcal{D}\mathcal{B}^{\ell}(0_i)$. On a ainsi une forme bilinéaire de dualité :

$$\mathcal{D}\mathcal{B}^{\ell}_{cyl}(0) \times \mathcal{D}\mathcal{B}'^{\ell}_{cyl}(0) \longrightarrow \underset{\sim}{C}$$

$$\varphi \circ s_i \,,\quad T = (T_i) \longmapsto T_i(\varphi)$$

qui se prolonge aux espaces

$$\mathcal{D}\mathcal{B}_{cyl}(0) = \bigcap_{\ell=0}^{\infty} \mathcal{D}\mathcal{B}^{\ell}_{cyl}(0) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}\mathcal{B}'_{cyl}(0) = \bigcup_{\ell} \mathcal{D}\mathcal{B}'^{\ell}_{cyl}(0) .$$

Suivant les cas, on limite la présentation au cas 1 ou au cas 2, la transposition des définitions ou des raisonnements au cas non présenté étant naturelle.

(4.30) Topologies sur des espaces de prodistributions : Soient 0 un ouvert de l'e. l. c. s. X, et F_u une bonne famille sur X. La topologie naturelle sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}'_{cyl}(0)$ est celle pour laquelle une famille filtrée $(T^j)_j$, contenue dans $\mathcal{D}'_{cyl}(0)$, converge vers la prodistribution T sur 0 si, et seulement si, pour tout $i \in I$, $(T^j_i)_j$ converge vers T_i dans $\mathcal{D}'(0_i)$:

$$(T^j)_j \longrightarrow T \iff \forall\, i \,,\quad (T^j_i)_j \longrightarrow T_i \ \text{dans}\ \mathcal{D}'(0_i) .$$

Cependant, ce n'est pas cette topologie qui intervient dans la théorie classique des promesures, puisqu'on utilise surtout la topologie cylindrique :

$$(T^j)_j \longrightarrow T \text{ cylindriquement} \iff \forall\ \varphi \in \mathcal{B}^0_{cyl}(X)\ ,\quad (T^j\ ,\ \varphi) \longrightarrow (T\ ,\ \varphi)\ .$$

Plus généralement, lorsqu'on veut mettre une topologie sur un certain sous-espace $\mathcal{E}$ de $\mathcal{D}'_{cyl}(O)$, on met en dualité séparante ce sous-espace $\mathcal{E}$ avec un espace $\mathcal{T}$ bien adapté de fonctions cylindriques, et l'on munit $\mathcal{E}$ de la topologie faible associée à cette dualité. Cette topologie est appelée topologie cylindrique :

$$(T^j)_j \longrightarrow 0 \text{ cylindriquement} \iff \forall\ \tilde{\varphi} \in \mathcal{T}\ ,\quad (T^j\ ,\ \tilde{\varphi}) \longrightarrow 0\ .$$

Explicitons ceci dans les deux cas considérés dans (4.28).

<u>Cas</u> 1 : Si $\mathcal{E} = \mathcal{B}'^{\ell}_{cyl}(X)$, on prend $\mathcal{T} = \mathcal{B}^{\ell}_{cyl}(X)$, et l'on a

$$(T^j)_j \longrightarrow 0 \text{ cylindriquement} \iff \forall\ \tilde{\varphi} \in \mathcal{B}^{\ell}_{cyl}(X)\ ,\quad (T^j\ ,\ \tilde{\varphi}) \longrightarrow 0\ .$$

Définissons l'espace $\mathcal{L}'_{cyl}(X)$ comme l'espace des prodistributions $T = (T_i)_i$ sur X, telles que, pour tout i, $T_i \in \mathcal{O}'_c(X_i) = \mathcal{L}'(X_i)$, espace des distributions à décroissance rapide sur X_i. Alors on peut définir la topologie cylindrique sur $\mathcal{E} = \mathcal{L}'_{cyl}(X)$ en prenant pour $\mathcal{T}$ la limite inductive des espaces

$$\mathcal{L}(X_i) = \mathcal{O}_c(X_i)\ .$$

L'espace $\mathcal{T}$ est noté $\mathcal{L}_{cyl}(X)$.

<u>Cas</u> 2 : Si $\mathcal{E} = \mathcal{D}\mathcal{B}'^{\ell}_{cyl}(O)$, on prend pour $\mathcal{T}$ la limite inductive $\mathcal{D}\mathcal{B}^{\ell}_{cyl}(O)$ des espaces $\mathcal{D}\mathcal{B}^{\ell}(O_i)$.

Définissons l'espace $\mathcal{D}\mathcal{L}'_{cyl}(O)$ comme l'espace des prodistributions $T = (T_i)$ sur O, telles que, pour tout i et pour tout ouvert $\omega \subset Y$, la restriction de T_i à $(\omega \cap O') \times Z_i$ soit une distribution à décroissance rapide. Alors, la forme linéaire sur $\mathcal{D}\mathcal{B}(O_i)$, définie par T_i, se prolonge canoniquement à l'espace $\mathcal{D}\mathcal{L}(O_i)$ des φ de $\mathcal{L}(O_i)$ qui sont nulles en dehors de $K \times Z_i$, où K est un compact quelconque de O_i. Vu la cohérence des T_i, la forme linéaire sur $\mathcal{D}\mathcal{B}(O)$, définie par T, se prolonge en une forme linéaire sur la limite inductive $\mathcal{D}\mathcal{L}_{cyl}(O)$ des $\mathcal{D}\mathcal{L}(O_i)$. D'où la topologie cylindrique sur $\mathcal{D}\mathcal{L}'_{cyl}(O)$

$$(T^j) \longrightarrow 0 \iff \forall\ \tilde{\varphi} \in \mathcal{D}\mathcal{L}_{cyl}(O)\ ,\quad (T^j\ ,\ \varphi) \longrightarrow 0\ .$$

5. Coefficients d'une prodistribution à décroissance ultra-rapide.

Définissons d'abord ces coefficients dans le cas 1. On dit qu'une distribution sur R^n est à décroissance ultra-rapide si elle est à décroissance rapide et si sa transformée de Fourier est analytique. L'espace de ces distributions est noté $\tilde{\mathcal{L}}'(R^n)$. Notons que l'on a une dualité séparante entre $\mathcal{L}(R^n)$ et $\tilde{\mathcal{L}}'(R^n)$ et que l'ensemble des polynômes à n variables est dense dans $\mathcal{L}(R^n)$ pour la topologie associée à cette dualité. En effet, si $T \in \tilde{\mathcal{L}}'(R^n)$ est orthogonale aux polynômes, toutes les dérivées de $\hat{T}$ sont nulles à l'origine et, par conséquent, T est nulle. Supposons que la bonne famille $F_u(X)$ soit dénombrable et décroissante : ses éléments sont notés A_1, A_2, ... Les objets correspondants de $\pi_u(X)$ sont notés $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ On se donne, pour tout n, une suite (φ_k) de fonctions de $\mathcal{E}(X_n)$, où $k = (k_1 \ldots k_n)$ décrit la famille des multi-indices d'ordre n.

(5.31) On suppose :

(a) $\dim X_n = n$ pour tout n ;

(b) Pour tout n, les φ_k sont linéairement indépendants, et forment un système total de $\mathcal{E}(X_n)$ pour la topologie faible associée à la dualité avec $\tilde{\mathcal{E}}'(X_n)$;

(c) Pour tout n et pour tout $k = (k_1 \ldots k_n)$, on a :

$$\varphi_k \circ s_{n+1,n} = \varphi_{k_1,\ldots,k_n,0} = \varphi_{k,0} .$$

Soit alors $T = (T_n)$ une prodistribution à décroissance ultra-rapide sur X, c'est-à-dire que tous les T_n sont à décroissance ultra-rapide.

L'espace de ces prodistributions est noté $\tilde{\mathcal{E}}'_{cyl}(X)$. Alors, on définit la famille des coefficients $a_k(T)$ de T par rapport aux $\tilde{\varphi}_k = \varphi_k \circ s_n$, n et k étant variables, en posant :

(5.32.1) $$a_k(T) = T(\tilde{\varphi}_k) = T_n(\varphi_k) = (T_n , \varphi_k) .$$

La famille des coefficients $a_k(T)$ caractérise T car, pour tout n, toute distribution U_n à décroissance ultra-rapide sur X_n est caractérisée par les nombres :

$$\alpha_k = U(\varphi_k) \; ; \quad k = (k_1 \ldots k_n) .$$

De même, $V \in \tilde{\mathcal{E}}'(X_{n+1})$ est caractérisée par les nombres :

$$\beta_\ell = V(\varphi_\ell) \; ; \quad \ell = (\ell_1 \ldots \ell_{n+1}) .$$

(5.32) Remarques.

(a) $U = s_{n+1,n}(V)$, $\forall\, k = (k_1 \ldots k_n)$; $\alpha_{k_1 \ldots k_n} = \beta_{k_1 \ldots k_n 0}$.

En effet, pour toute combinaison linéaire finie Ψ des φ_k, on a :

$$U(\Psi) = V(\Psi \circ s_{n+1,n}) .$$

Il en résulte, par prolongement continu, que cette relation est vraie pour toute Ψ de $\mathcal{E}(X_n)$.

(b) Si donc on se donne pour tout n, $T_n \in \tilde{\mathcal{E}}'(X_n)$ de coefficients a_k, alors les T_n sont cohérentes si, et seulement si,

(5.32.1) $$\forall\, n , \; \forall\, k = (k_1 \ldots k_n) , \quad a_{k_1 \ldots k_n} = a_{k_1 \ldots k_n 0} .$$

Cette caractérisation très simple est utile pour effectuer des calculs sur les prodistributions ou pour en construire. Ces définitions et ces remarques s'étendent naturellement au cas 2 (prodistributions sur un ouvert cylindrique de X).

BIBLIOGRAPHIE

[1] DeWITT (Cécile B.). - Feynman's path integral. Definition without limiting procedure, Comm. math. Phys., Berlin, t. 28, 1972, p. 47-67.

[2] KRÉE (P.). - Courants et courants cylindriques sur des variétés de dimension infinie, "Linear operators and approximation, Proceedings of the conference held at the Mathematical Research Institute at Oberwolfach, 1971", p. 159-174. - Basel und Stuttgart, Birkhäuser-Verlag, 1972 (International Series of numerical Mathematics, 20).

Paul KRÉE
Tour Mexico, B. P. 1325
65 rue du Javelot
75645 PARIS CEDEX 13