Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

D. Serre

Quelques méthodes d'étude de la propagation d'oscillations hyperboliques non linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. n° 20, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A20_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1990-1991

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

QUELQUES METHODES D'ETUDE DE LA PROPAGATION D'OSCILLATIONS HYPERBOLIQUES NON LINEAIRES

D. SERRE

Exposé n° XX

19 Mars 1991

Quelques méthodes d'étude de la propagation d'oscillations hyperboliques non linéaires

Denis SERRE

UMR CNRS-ENS Lyon, n°C 0128
46, allée d'Italie
69364 Lyon, cedex 07

Résumé : L'exposé a fait le bilan sur les deux méthodes principales. La première, rigoureuse, étudie, via la compacité par compensation, la mesure de Young associée à des suites u^ϵ de solutions d'un système hyperbolique non linéaire $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$. La seconde, formelle, étudie les suites de la forme $u^\epsilon(x,t) = u^0(x,t,\epsilon^{-1}\varphi(x,t)) + \epsilon u^1 + O(\epsilon^2)$. La première méthode, lorsqu'elle est possible, valide la seconde. Celle-ci fait introduire, dans des cas plus généraux, un nouveau concept d'hyperbolicité.

On notera que les oscillations étudiées sont de grande amplitude. Elles indiquent assez souvent que le problème de Cauchy est mal posé dans L^∞ faible-étoile.

I Introduction

On considère dans cet exposé des suites de solutions $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ d'un système hyperbolique de lois de conservation

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0 \quad , x \in I\!R, t > 0. \tag{1.1}$$

Le champ $f : \mathcal{U} \to I\!R^n$ est donné. On notera $\lambda_k(u)$ les valeurs propres de $df(u)$ et $\ell_k(u), r_k(u)$ des champs de vecteurs propres à gauche et à droite associés. On fixe $\ell_k r_k \equiv 1$ et si λ_k est vraiment non linéaire, $d\lambda_k \cdot r_k \equiv 1$.

Les suites de solutions envisagées sont bornées dans $L^\infty(I\!R \times (0,T))$ et satisfont une condition d'entropie à préciser. Celle-ci doit entrainer, lorsqu'on veut appliquer la méthode de compacité par compensation, que pour tout couple entropie-flux (η, q), on ait

$$\partial_t \eta(u^\epsilon) + \partial_x q(u^\epsilon) \in \text{ compact de } H^{-1}_{loc}. \tag{1.2}$$

Ce point a été éclairci par R. Di Perna [3] dans son article fondateur.

Les champs caractéristiques les plus intéressants pour nous sont les champs linéairement dégénérés : $d\lambda \cdot r \equiv 0$. En effet, on va construire dans ce cas une suite de solutions particulières de la forme $u^\epsilon = u^0(\epsilon^{-1}(x - ct))$ qui satisfait de plus

$$\partial_t \eta(u^\epsilon) + \partial_x q(u^\epsilon) = 0, \tag{1.3}$$

pour toute entropie η. Comme $id_{\mathcal{U}}$ est une entropie de flux f, il suffit de vérifier (1.3). Pour construire c et u^0, on considère d'abord *une* courbe intégrale Γ du champ $r(u)$ dans $\mathcal{U}$. La dégénérescence linéaire exprime le fait que $\lambda|_\Gamma$ est une constante ; ce sera la vitesse c de l'onde progressive. On vérifie alors que pour tout couple entropie-flux, $q - c\eta$ est constant le long de Γ. Il suffit donc de choisir pour u^0 n'importe quelle fonction mesurable à valeurs dans Γ.

On remarque, si u^0 est périodique, que $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ converge au sens de Young et que sa mesure de Young est donnée par

$$< \nu, g >= \fint g(u^0(y))dy.$$

Un exemple typique de cette construction concerne la dynamique d'un gaz, d'équations

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, & \text{conservation de la masse,} \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p(\rho, e)) = 0 & \text{conservation de l'impulsion ,} \\ \partial_t(\rho(e + \frac{1}{2}v^2)) + \partial_x(v\rho(e + \frac{1}{2}v^2) + pv) = 0, & \text{conservation de l'énergie .} \end{cases} \tag{1.4}$$

Une courbe Γ a pour équation $(v, p) =$ constante. On a $\lambda = v$. La fonction mesurable ρ^0 est quelconque, tandis que e^0 est déterminé par l'équation $p(\rho^0, e^0) =$ constante.

De telles suites de solutions qui convergent au sens de Young mais pas en général dans L^1_{loc} sont appelées *oscillantes*. Puisque le système n'a pas de coefficient oscillant (contrairement à un système elliptique en homogénéisation), les oscillations sont soit propagées à partir de celles de la donnée de Cauchy ou aux limites, soit créées *ex nihilo* par un effet turbulent. En dimension un, cette seconde éventualité semble hors de cause. Le problème revient donc, en supposant que le problème de Cauchy pour (1.1) soit bien posé dans BV par exemple, à déterminer le comportement de la suite $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ lorsque celui de sa donnée de Cauchy $(u_0^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est connu. Une question essentielle est, par exemple, la nature du problème de Cauchy dans L^∞ faible$-*$: si u_0^ϵ converge (pour $\epsilon \to 0$) vers $\bar{u}_0$, la solution u^ϵ converge-t-elle vers une solution $\bar{u}$? La construction ce dessus ne permet pas de se faire une idée car elle ne donne pas de réponse négative.

Nous verrons que, selon les propriétés géométriques du système, la réponse peut être oui ou non. Dans ce dernier cas, on se trouve confronté à un problème d'homogénéisation et il faut exhiber un système *effectif*, qui gouverne l'évolution de la mesure de Young $\nu_{x,t}$ attachée à la suite $(u^\epsilon)_\epsilon$ par

$$< \nu_{x,t}, g >= (* - Lim g(u^\epsilon))(x,t), \ \ \forall g \in C^0(\mathcal{U}). \tag{1.5}$$

Dans la troisième partie, où l'on étudie d'un point de vue formel les solutions oscillantes structurées par un développement asymptotique $u^\epsilon(x,t) = u^0(x,t,\epsilon^{-1}\varphi(x,t)) + \epsilon u^1 + O(\epsilon^2)$, le système effectif gouvernera l'évolution du couple $(\varphi(\cdot,t), u^0(\cdot,t,\cdot))$. En dimension d'espace $d = 1$, ce système est découplé, u^0 obéissant à un système d'évolution qui ne fait pas intervenir φ. En dimension $d \geq 2$, lorsque (1.1) est remplacé par $\partial_t u + div(f(u)) = 0$, le système effectif n'est obtenu que si le champ linéairement dégénéré est de multiplicité égale à 1 ; le système effectif est alors couplé.

II Méthode rigoureuse : la compacité par compensation

II.1 Les principes

Il y a deux principes essentiels et complémentaires dans cette méthode. Le premier est dû à L. Tartar [14], comme application de sa théorie de la compacité par compensation (voir aussi Murat [10]). Si une suite $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$, bornée dans L^∞, satisfait (1.2), alors sa mesure de Young $\nu_{x,t}$ satisfait pour presque tout (x,t) et tous couples $(\eta_1,q_1),(\eta_2,q_2)$ d'entropies-flux, l'égalité

$$< \nu, \eta_1 q_2 - \eta_2 q_1 >=< \nu, \eta_1 >< \nu, q_2 > - < \nu, \eta_2 >< \nu, q_1 > . \tag{2.1}$$

Notons $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des couples entropies-flux, qui contient au moins les couples $(u_i, f_i(u))$. La formule (2.1), pour tous $(\eta_i, q_i) \in \mathcal{E}$, est une restriction des degrés de liberté de la mesure de probabilité $\nu_{x,t}$, définie sur un compact donné de $\mathcal{U} \subset I\!\!R^n$. Cette restriction est purement statique, elle exprime une certaine corrélation des oscillations de la suite $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$. Cette corrélation n'intervient que pour $t > 0$ puisque la condition initiale $(u_0^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est librement choisie : c'est donc une propriété de régularité microlocale.

Notons maintenant $\mathcal{C}$ le sous-espace des couples entropies-flux (η, q) qui satisfont, pour toute solution faible entropique, l'égalité

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x q(u) = 0. \tag{2.2}$$

Un passage à la limite trivial fournit le système

$$\partial_t < \nu_{x,t}, \eta > + \partial_x < \nu_{x,t}, q >= 0, \;\; \forall (\eta, q) \in \mathcal{C}. \tag{2.3}$$

Les systèmes qu'on pourra traiter par compacité par compensation sont ceux pour lesquels (2.3) est une équation d'évolution dont l'inconnue est à valeurs dans la "variété" définie par l'équation (2.1). Grosso modo, la condition est que $\mathcal{C}$ sépare les points de cette variété, c'est-à-dire que

$$\left(\begin{array}{l} \nu, \nu' \text{ satisfont (2.1) et} \\ < \nu - \nu', \eta >= 0, \forall (\eta, q) \in \mathcal{C} \end{array} \right) \Rightarrow (\nu = \nu'). \tag{2.4}$$

Notons que $\mathcal{C}$ contient au moins les couples $(u_i, f_i(u)), \;\; 1 \le i \le n$.

II.2 Cas vraiment non linéaire

Supposons que $n = 2$ et que les deux champs caractéristiques soient vraiment non linéaires. Alors Di Perna [3] prouve que les solutions de (2.1) sont les masses de Dirac en des points de $\mathcal{U}$. Si ν et ν' satisfont (2.1), on a donc $\nu = \delta(u = a), \nu' = \delta(u = a')$, de sorte qu'en utilisant $\eta = u_i$, l'hypothèse de (2.4) implique $a_i = a_i'$; ainsi $a = a'$ et $\nu = \nu'$.

Ce cas est non-oscillant puisque la mesure de Young est de la forme $\nu_{x,t} = \delta(u = a(x,t))$, où $a \in L^\infty$, de sorte que $< \nu_{x,t}, f >= f(a(x,t))$ presque partout. Il s'ensuit que, d'une part u^ϵ converge vers a dans L^p fort pour tout p fini, d'autre part a est une solution de (1.1) dont la condition initiale est $\bar{u}_0$.

II.3 Cas linéairement dégénéré

Lorsque tous les champs sont linéairement dégénérés, la notion de solution faible ne dépend pas de la forme conservative choisie. On peut donc fournir le système sous forme quasilinéaire. On considère donc le système (si $n = 2$)

$$\partial_t w + z\partial_x w = 0, \ \ \partial_t z + w\partial_x z = 0. \tag{2.5}$$

Le domaine $K = [a, b] \times [c, d]$ est un domaine d'hyperbolicité si $b < c$, invariant par le flot de (2.5). Les ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$ coïncident (voir la remarque introductive). Les couples entropie-flux sont de la forme

$$\eta = \frac{r(w) + s(z)}{z - w}, q = \frac{zr(w) + ws(z)}{z - w}$$

On en déduit facilement [11] que les solutions de (2.1) sont les probabilités de la forme $\nu = (z - w)^{-1}\sigma \otimes \theta$. Si deux telles mesures sont égales sur $\mathcal{C}$, on a $||\theta||\sigma = ||\theta'||\sigma'$ et $||\sigma||\theta = ||\sigma'||\theta'$, de sorte que ν et ν' sont proportionnelles. De $||\nu|| = ||\nu'||$, on déduit $\nu = \nu'$ et (2.4) est satisfait.

La description des oscillations a été faite dans [11]. Un moyen très lisible de présenter les résultats, et aussi très utile pour une mise en oeuvre de simulation numérique, est d'introduire les fonctions de répartition $W(x, t; \cdot)$ et $Z(x, t; \cdot)$ de $\sigma_{x,t}$ et $\theta_{x,t}$. Le système (2.3) s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} (\partial_t + \int_0^1 Z(y)dy\ \partial_x)W = 0, \\ (\partial_t + \int_0^1 W(y)dy\ \partial_x)Z = 0. \end{array} \right. \tag{2.6}$$

La condition initiale associée est fournie par les égalités, pour tout $r, s \in C^0(\mathbb{R})$,

$$\begin{array}{l} Tr_{t=0} \int_0^1 \frac{r(W(x,t,y))}{(W-Z)(x,t,y)} dy = (* - Lim \frac{r(w_0^\epsilon)}{w_0^\epsilon - z_0^\epsilon})(x, t), \\ Tr_{t=0} \int_0^1 \frac{s(Z(x,t,y))}{(W-Z)(x,t,y)} dy = (* - Lim \frac{s(w_0^\epsilon)}{w_0^\epsilon - z_0^\epsilon})(x, t). \end{array}$$

Lorsqu'on remplace (2.5) par les équations avec source

$$\partial_t w + z\partial_x w = g(w, z), \partial_t z + w\partial_x z = h(w, z), \tag{2.7}$$

la structure des mesures d'Young n'est pas changée, ni les conditions initiales, mais le système d'évolution (2.6) devient

$$\begin{array}{l} (\partial_t + \int_0^1 Zdy'\partial_x)W(x, t, y) = \int_0^1 g(W(y), Z(p))dp \\ +\partial_y W\{y \int_0^1 \int_0^1 k(W(q), Z(p))dqdp - \int_0^y \int_0^1 kdqdp\}, \end{array}$$

etc..., avec $k = (h - g)(w - z)$.

II.4 Systèmes de Temple

On observe que (2.6) est découplé. En effet, $(\int_0^1 W dy, \int_0^1 Z dy)$ est une solution de (2.5), qui, une fois connue, permet de considérer (2.6) comme une liste d'équations de transport découplées. Cette propriété disparait lorsqu'on ajoute des termes sources.

On peut se demander pour quels systèmes les solutions oscillantes sont transparentes aux mesures, c'est-à-dire que toute limite $\bar{u}$ de solution oscillante $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ est encore une solution de (2.1)? Hormis le cas linéaire, il existe une classe de systèmes possédant cette propriété (Heibig [8]). Cette classe, introduite par Temple [15], est caractérisée par le fait que chaque champ de vecteurs propres à gauche est normal à un feuilletage en hyperplans affines. Ces hyperplans ont la double propriété d'être caractéristiques et d'être les ensembles d'annulation d'entropies : ces entropies sont triviales puisqu'affines. Il s'ensuit que la valeur absolue d'une telle entropie particulière est aussi une entropie, disons $|e(u) - \alpha|$ où e est une forme linéaire et α une constante. Le flux associé est $(e(f(u)) - \beta) sgn(e(u) - \alpha)$, où β est la valeur (constante !) de $e \circ f$ sur l'hyperplan d'équation $e(u) = \alpha$.

Une analyse, analogue à celle menée par Tartar [14] dans le cas scalaire, montre que $< \nu_{x,t}, f >= f(\bar{u}(x,t))$, sans qu'on fasse d'hypothèse de non linéarité ni de dégénérescence linéaire : les oscillations sont possibles, mais il n'est pas nécessaire de connaître leur structure interne pour décrire l'évolution de leur moyenne.

II.5 Le cas de Bonnefille [2]

On considère le système de 2 équations

$$\partial_t u + \partial_x(\phi(u)u) = 0, \tag{2.8}$$

où $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. On utilise les coordonnées polaires $u = \rho e^{i\theta}$. Alors $\lambda_1 = \phi, \lambda_2 = \partial_\rho(\rho\phi)$. On suppose que $\partial_\rho \phi > 0$ (hyperbolicité stricte) et $\partial_\rho^2(\rho\phi) > 0$ pour $\rho > 0$. Le second champ est alors vraiment non linéaire et le calcul de Di Perna entraine que l'invariant de Riemann correspondant (ici, c'est ϕ) n'est pas oscillant :

$$\phi(u^\epsilon) \to < \nu_{x,t}, \phi > \text{ dans } L^1 \text{ fort .} \tag{2.9}$$

Une autre manière d'exprimer (2.9) est d'écrire que ϕ est constant sur $supp\ \nu_{x,t}$, pour presque tout x, t. On notera $\bar{\phi}(x,t)$ cette valeur. En fait, quand on utilise comme variables les invariants de Riemann ϕ et θ, les solutions de (2.1) sont exactement les produits tensoriels $\delta(\phi = \bar{\phi}) \otimes \sigma$, où σ est une probabilité quelconque sur $I\!R/_{2\pi Z\!\!Z}$.

En considérant que les solutions admissibles doivent être limites des solutions approchées obtenues par le schéma de Glimm, le calcul de $\mathcal{C}$ revient à chercher les couples entropie-flux (η, q) pour lesquels $[q] - s[\eta] = 0$ pour toute discontinuité (choc ou contact) admissible. Si on se restreint à des données dans le convexe invariant $u_1 > 0$, on trouve que $\mathcal{C}$ se compose des couples $(\rho g(\theta), \rho\phi g(\theta)), g$ quelconque sur $[-\pi, \pi]$. Sans cette restriction, on résoudra le problème de Riemann de manière unique en évitant les chocs anormaux $(\theta^+ = \pi + \theta^-, \phi^+ \neq \phi^-)$, suivant Liu [9] et Freistühler [6]. On retrouve alors la même description de $\mathcal{C}$, avec g 2π-périodique.

Montrons que la propriété (2.4) a lieu. Par hypothèse, il existe une fonction R telle que $\rho = R(\varphi, \theta)$ équivale à $\varphi = \phi(u)$. On a $\partial_\varphi R > 0$. Soient ν_1 et ν_2 deux probabilités satisfaisant (2.1) et $< \nu_1 - \nu_2, \eta >= 0$ pour tout $(\eta, q) \in \mathcal{C}$. Notons ϕ_1, ϕ_2 les valeurs de ϕ sur *supp* ν_1, *supp* ν_2. On a donc

$$\forall g \in \mathcal{C}(\pi), < \sigma_1, R(\phi_1, \cdot)g >=< \sigma_2, R(\phi_2, \cdot)g > \qquad (2.10)$$

On se place pour simplifier dans le cas où les données u_0^ϵ sont à valeurs dans un domaine invariant $\{u; \alpha \leq \phi(u) \leq \beta\}$ avec $\alpha > \phi(0)$, de sorte que $\phi_1, \phi_2 \geq \alpha$ et donc $R(\phi_i, \theta) > 0$. En prenant $g = 1/R(\phi_1, \cdot)$, il vient

$$< \sigma_2, \frac{R(\phi_2, \cdot)}{R(\phi_1, \cdot)} - 1 >= 0.$$

Comme R est strictement croissant par rapport à φ, il s'ensuit que $\phi_2 = \phi_1$. Alors $< \sigma_1 - \sigma_2, h >= 0$ pour tout $h : \sigma_1 = \sigma_2$.

Lorsque $\partial_\theta \phi$ n'est pas identiquement nul, la limite $\bar{u}$ d'une suite de solutions oscillantes n'est généralement pas une solution de (2.8). La description des oscillations se fait par la variable $\bar{\phi}(x,t)$ et la fonction de répartition $T(x,t,y)$ de la probabilité $\mu_{x,t}$ définie par

$$< \mu_{x,t}, g >=< \sigma_{x,t}, R(\bar{\phi}(x,t), \theta)g(\theta) >< \sigma_{x,t}, R(\bar{\phi}(x,t), \theta) >^{-1} .$$

Le système effectif rigoureux est

$$\forall g \in \mathcal{C}(\pi), \partial_t(p \int_0^1 g(T)dy) + \partial_x(p\bar{\phi} \int_0^1 g(T)dy) = 0, \qquad (2.11)$$

où $p(x,t)$ est défini par

$$p(x,t) = \{\int_0^1 R(\bar{\phi}(x,t),T)^{-1}dy\}^{-1}. \tag{2.12}$$

Sous forme moins rigoureuse mais plus aisément applicable à des simulations numériques, on écrira (2.11) ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t p + \partial_x(p\bar{\phi}) = 0, \\ (\partial_t + \bar{\phi}\partial_x)T = 0. \end{array} \right. \tag{2.13}$$

Dans ce cas, on préférera considérer (2.12) comme une définition implicite de $\bar{\phi}(x,t)$ en fonction de $p(x,t)$ et $T(x,t,\cdot)$.

II.6 Le cas général

Pour un système général, et modulo les constantes, $\mathcal{E}$ est réduit à l'espace vectoriel engendré par les couples (u_i, f_i) et par (η, q) où η est une entropie convexe fournie par la physique. Puisque $\mathcal{E}$ est de dimension finie, (2.1) défini une variété de dimension infinie, dont les points ne peuvent être séparés par $\mathcal{C}$. La méthode décrite précédemment n'a donc pas de portée générale.

II.7 Un exemple à n équations

L'exemple décrit en II.3 se généralise à un plus grand nombre d'équations. Considérons le système quasilinéaire

$$(\partial_t + \sigma_r(\hat{w}_i)\partial_x)w_i = 0, \ \ 1 \leq i \leq n. \tag{2.14}$$

Le nombre r, compris entre 1 et $n-1$, est fixé ; σ_r désigne le polynôme symétrique élémentaire de degré r en $n-1$ variables. Enfin, $\hat{w}_i = \{w_j; 1 \leq j \leq n, j \neq i\}$. Les champs caractéristiques de (2.14) sont tous linéairement dégénérés, de sorte qu'une forme conservative n'est pas essentielle pour définir les solutions faibles. En particulier, $\mathcal{E} = \mathcal{C}$, mais de plus, $\mathcal{E}$ est assez gros. Cet espace est engendré par les fonctions $N_i(w)g(w_i)$, où $g \in \mathcal{C}(I\!R)$ est quelconque et

$$N_i(w) = \prod_{j \neq i}(w_i - w_j)^{-1}.$$

Pour conserver l'hyperbolicité, on se donnera des conditions initiales $w^{0\epsilon}$ dans le domaine invariant $\prod_i [a_i, b_i]$, avec $b_i < a_{i+1}$.

On démontre alors que les variables $u_{ip}(x,t) =:< \nu_{x,t}, N_i(w)(w_i)^p >$ pour $1 \leq i \leq n, 0 \leq p \leq n-1$ sont solutions d'un système de lois de conservation sur la variété affine de dimension $n(n-1)$ définie par $\sum_i u_{ip} = 0, 0 \leq p \leq n-1$. Pour $n = 2$, on retrouve les résultats du II.3, mais pour $n \geq 3$, le nouveau système contient strictement plus de variables que (2.14), et on ne peut pas trouver un système strictement plus petit qui gouvernerait l'évolution de certaines variables $< \nu_{x,t}, \eta >$. On peut considérer que ce système de taille $n(n-1)$ est le système effectif associé à (2.14), même si les u_{ip} ne permettent de calculer que les $< \nu, \eta >$ et $< \nu, q >$ pour $(\eta, q) \in \mathcal{E}$, et non pas pour η quelconque. Ce système est en fait dans la classe de B. Temple et ses champs caractéristiques sont de multiplicité $n-1$. Les solutions de (2.14) permettent d'en construire des solutions très particulières, mais les solutions oscillantes de (2.14) permettent par passage à la limite d'obtenir toutes les solutions.

III La méthode des développements asymptotiques ($d = 1$).

Dans le cas linéaire, l'un des buts de l'optique géométrique est l'étude des solutions u^ϵ qui admettent un développement asymptotique de la forme

$$u^\epsilon(x,t) = u^0(x,t,\epsilon^{-1}\varphi(x,t)) + \epsilon u^1 + \epsilon^2 u^2 + \cdots \tag{3.1}$$

ou de la forme

$$u^\epsilon(x,t) = \epsilon u^0(x,t,\epsilon^{-1}\varphi(x,t)) + \epsilon^2 u^1 + \cdots. \tag{3.2}$$

La linéarité fait que le choix de (3.1) ou (3.2) n'influe pas sur les résultats. Il n'en est plus de même dans le cas quasilinéaire. Le développement (3.2) a été traité sur un plan formel depuis quelques décennies, sous le nom d'optique géométrique faiblement non-linéaire. Sa validité semble s'étendre sur un intervalle de temps de longueur $0(\epsilon^{-1})$. Le terme dominant u^0 obéit alors à un système linéaire. En revanche, le développement (3.1) correspond à nos suites oscillantes. La première étude (voir la section II.3) date de 1985 [11], via la compacité par compensation, tandis que le premier système effectif pour un problème hyperbolique général date de fin 1989 [12]. En 1990, Weinan E [4] l'a obtenu dans le cas particulier de la dynamique des gaz.

III.1 Champs linéairement dégénérés

On suppose que la phase φ est scalaire. Cette restriction est essentielle pour l'étude qui suit. Elle semble justifiée si le système (1.1) ne possède qu'un seul champ linéairement dégénéré. S'il en possède plusieurs, la méthode nécessite des idées nouvelles qui ne sont pas encore connues.

Les éléments $u^0, u^1, u^2, \cdots$ du développement (3.1) sont supposés bornés mesurables. On suppose aussi que, dans L^∞, on ait

$$u^\epsilon(x,t) = \sum_{k=0}^{m-1} \epsilon^k u^k + O(\epsilon^m).$$

On a alors

$$f(u^\epsilon) = f(u^0) + \epsilon A(u^0)u^1 + O(\epsilon^2),$$

où $A = df$. Ainsi, en notant y la variable rapide dans $u^0, \partial_y(\varphi_t u^0 + \varphi_x f(u^0)) = O(\epsilon)$ dans $W^{-1,\infty}$. On a donc

$$\partial_y(\varphi_t u^0 + \varphi_x f(u^0)) = 0. \tag{3.3}$$

De même, si $(\eta, q) \in \mathcal{E}, \eta$ étant convexe, on utilise la restriction $\partial_t \eta(u^\epsilon) + \partial_x q(u^\epsilon) \leq 0$ pour obtenir

$$\partial_y(\varphi_t \eta(u^0) + \varphi_x q(u^0)) \leq 0. \tag{3.4}$$

On ne cherche en fait, parmi les solutions oscillantes de la forme (3.1), que celles pour lesquelles u^0, u^1 sont périodiques ou presque- périodiques par rapport à y. L'inégalité (3.4) signifie qu'une fonction presque-périodique est décroissante. Elle est donc constante :

$$\partial_y(\varphi_t \eta(u^0) + \varphi_x q(u^0)) = 0. \tag{3.5}$$

Il y a deux cas à éliminer pour cause de trivialité : φ constant ou $u^0(x,t,\cdot)$ constant. En un point (x,t) où $\nabla\varphi$ n'est pas nul et $u^0(x,t,\cdot)$ n'est pas constant, la condition $\varphi_x = 0$ est absurde en raison de (3.3). On peut donc poser $c(x,t) = -\varphi_t/\varphi_x$. Fixant (x,t), on voit que l'application

$$y \mapsto \begin{pmatrix} f(u^0) - cu^0 \\ q(u^0) - c\eta(u^0) \end{pmatrix}$$

est constante.

Pour un système générique, l'application

$$a \mapsto \begin{pmatrix} f(a) - ca \\ q(a) - c\eta(a) \end{pmatrix} = H(a)$$
$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$$

est essentiellement injective : pour presque tout $a, H(b) = H(a)$ entraine $b = a$. Ceci n'est pas propice à la construction de solutions formelles de (1.1) sous la forme (3.1). En particulier, si les champs caractéristiques de (1. 1) sont vraiment non linéaires, alors a est une solution isolée de l'équation $H(b) = H(a)$. Il en est de même si $c \notin Sp(df(a))$. En revanche, si $c = \lambda(a)$, où λ est une valeur propre linéairement dégénérée ($d\lambda \cdot r \equiv 0$) de $df(a)$, alors $\{b; H(b) = H(a)\}$ est localement la courbe intégrale de r issue de a.

Pour simplifier la situation, on va donc supposer que le système a un seul champ linéairement dégénéré, que les autres sont vraiment non linéaires, et que les ensembles de niveau non vides de H sont les courbes intégrales de r. On a alors : pour presque tout y, y', les états $u^0(x,t,y)$ et $u^0(x,t,y')$ sont liés par une discontinuité de contact de vitesse $c(x,t) = \lambda(u^0(x,t,y)) = \lambda(u^0(x,t,y'))$. En particulier,

$$y \mapsto \lambda(u^0(x,t,y))$$

est constant et on a

$$\varphi_t + \lambda(u^0)\varphi_x = 0. \tag{3.6}$$

III.2 Changement de variables

Les résultats du paragraphe précédent suggèrent d'introduire un changement de variables $u \to (v(u), w(u))$ de sorte que dans les nouvelles variables, les courbes intégrales de r soient les droites d'équation $v =$ constante. Les fonctions $v_1, \cdots, v_{n-1}$ sont donc $n-1$ solutions indépendantes de $r \cdot \nabla_u V = 0$. Les nouvelles variables n'étant pas des entropies du système, celui-ci perd sa structure conservative en s'écrivant sous la forme triangulaire par bloc

$$\begin{cases} \partial_t v + B(v,w)\partial_x v = 0, \\ \partial_t w +^t \eta(v,w)\partial_x v + \mu(v)\partial_x w = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Les deux remarques essentielles concernant (3.7) concernent la valeur propre $\mu(v) = \lambda(u)$. Elle ne dépend que de v à cause de la dégénérescence linéaire. Ensuite μ n'est pas valeur propre de B. Ou plutot, si λ est de multiplicité supérieure ou égale à 2, les résultats de Boillat [1], Guès [7] et Freistühler [6] affirment que d'une part λ est linéairement dégénérée et d'autre part le champ d'espaces affines $u + Ker(A(u) - \lambda(u))$ est tangent à un feuilletage par des variétés de même dimension (il est "intégrable"). On reprend dans ce cas le paragraphe précédent et les courbes intégrales sont remplacées par les variétés ci-dessus. Le changement de variable est alors celui qui redresse ces variétés selon les niveaux de $v = (v_1, \cdots, v_{n-p})$. Ici, p est la multiplicité de λ. Le champ Ker $(A(u) - \lambda(u))$ étant une algèbre de Lie, il y a bien $n-p$ solutions indépendantes de l'équation $r \cdot \nabla_u V = 0$. La matrice $\begin{pmatrix} B & 0 \\ {}^t\eta & \mu I_p \end{pmatrix}$ étant semblable à $A(u)$, il s'ensuit que $B - \mu$ est inversible.

On reprend maintenant le développement (3.1) dans les variables (v, w) :

$$\begin{cases} v^\epsilon(x,t) = v^0(x,t) + \epsilon v^1(x,t,\epsilon^{-1}\varphi) + \cdots, \\ w^\epsilon(x,t) = w^0(x,t,\epsilon^{-1}\varphi) + \epsilon w^1 + \cdots. \end{cases} \tag{3.8}$$

Le fait que v^0 ne dépende plus de la variable rapide traduit le résultat de III.1. Bien entendu, (3.6) devient

$$\varphi_t + \mu(v^0)\varphi_x = 0. \tag{3.9}$$

III.3 Le système effectif

On introduit le développement (3.8) dans le système (3.7). On obtient à l'ordre zéro, en notant g_0 la quantité $g(v^0, w^0)$,

$$\partial_t v^0 + B_0 \partial_x v^0 + \varphi_x (B_0 - \mu_0) \partial_y v^1 = 0, \tag{3.10}$$

$$\partial_t w^0 +^t \eta_0 \partial_x v^0 + \mu_0 \partial_x w^0 + \varphi_x \, {}^t\eta_0 \partial_y v^1 + \varphi_x (d\mu_0 \cdot v^1) \partial_y w^0 = 0. \tag{3.11}$$

Considérons d'abord (3.10). On élimine v^1 en prenant la moyenne en y, au sens des fonctions presque-périodiques, de $(B_0 - \mu_0)^{-1}(\partial_t v^0 + B_0 \partial_x v^0) + \varphi_x \partial_y v^1 = 0$. Comme v^0 ne dépend pas de y, on obtient

$$m((B_0 - \mu_0)^{-1}) \partial_t v^0 + m((B_0 - \mu_0)^{-1} B_0) \partial_x v^0 = 0,$$

ou

$$\partial_t v^0 + \mathcal{B}_0 \partial_x v^0 = 0, \tag{3.12}$$

avec

$$\mathcal{B}_0 = \mu_0 + (m((B_0 - \mu_0)^{-1}))^{-1}. \tag{3.13}$$

On a noté m l'opérateur de moyenne :

$$m(g(v_0, w_0)) = \lim_{Y \to +\infty} \frac{1}{2Y} \int_{-Y}^{Y} g(v_0, w_0(y))dy.$$

On tire alors $\partial_y v^1$ de (3.8) et (3.11) :

$$\varphi_x \partial_y v^1 = (B_0 - \mu_0)^{-1}(\mathcal{B}_0 - B_0)\partial_x v^0.$$

Pour reporter cette expression dans (3.9), on commence par écrire, pour une fonction arbitraire d'une variable h :

$$\begin{array}{l} \partial_t h(w^0) + h'(w^0)^t \eta_0 \partial_x v^0 + \mu_0 \partial_x h(w^0) \\ +h'(w^0)^t \eta_0 (\varphi_x \partial_y v^1) + (d\mu_0 \cdot \varphi_x v^1)\partial_y h(w^0) = 0. \end{array}$$

On prend la moyenne de cette formule, en notant que

$$\begin{array}{rcl} m((d\mu_0 \cdot \varphi_x v^1)\partial_y h_0) & = & -m(h_0 \partial_y (d\mu_0 \cdot \varphi_x v^1)) \\ & = & -m(h_0 d\mu_0 \cdot (\varphi_x \partial_y v^1)). \end{array}$$

Il vient

$$\begin{array}{rcl} \partial_t m(h(w^0)) & + & \mu_0 \partial_x m(h(w^0)) \\ & + & m(h'(w^0)^t \eta_0 (B_0 - \mu_0)^{-1})(\mathcal{B}_0 - \mu_0)\partial_x v^0 \\ & - & d\mu_0 \cdot m(h(w^0)(B_0 - \mu_0)^{-1}(\mathcal{B}_0 - B_0))\partial_x v^0 = 0 \end{array} \tag{3.14}$$

Le système (3.9)-(3.12)-(3.14) est le système effectif cherché. Il s'écrit sous la forme

$$X'(t) = \mathcal{P}(X(t)),$$

où X désigne la liste infinie de variables $\{\varphi, v^0, m(h(w^0)) | \forall h\}$. Le fait que le problème de Cauchy soit bien posé n'est pas encore clair. On peut toutefois faire deux remarques. Tout d'abord, il n'est pas évident que $m((B_0 - \mu_0)^{-1})$, qui est bien défini puisque μ n'est jamais valeur propre de B, soit inversible. Si pour certaines valeurs de $(v^0, w^0)(\cdot)$, cette matrice est singulière, le système effectif n'est pas d'évolution et les solutions oscillantes risquent d'être très instables. Ensuite le système (3.12)-(3.14) possède des solutions particulières de la forme $v^0 =$ constante, $w^0 = w^0(y \text{ seul})$, qui correspondent aux solutions explicites déjà construites. Dans ce cas $v^1, w^1, \cdots$ sont nuls. Si on linéarise (3-12) - (3.14) au voisinage d'une telle solution, ce qui revient à étudier au premier ordre les perturbations de ces solutions particulières, on obtient un système découplé, dont la première partie est

$$\partial_t V + \mathcal{B}_0 \partial_x V = 0. \tag{3.15}$$

Le problème de Cauchy pour (3.12)-(3.14) ne sera bien posé que si (3.15) est hyperbolique, c'est-à-dire si au moins $m((B_0 - \mu_0)^{-1})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Comme v^0 et $w^0(\cdot)$ sont arbitraires, on est amené à faire l'hypothèse d' "hyperbolicité globale" suivante : (HGL) "Pour tout $v \in \mathbb{R}^{n-p}$, l'enveloppe convexe de l'ensemble des matrices $(B(v,w) - \mu(v))^{-1}$, lorsque w parcourt $\mathbb{R}^p$, est constitué de matrices inversibles et diagonalisables sur $\mathbb{R}$."

Tous les exemples physiques déjà étudiés par cette méthode satisfont (HGL). Il n'est pas exclu que cette hypothèse soit une conséquence du caractère physique, c'est-à-dire que si le système est de la forme (1.1) (conservatif) et possède une entropie η convexe (au sens où $D^2\eta > 0$), alors (HGL) ait lieu. Bien entendu, la convexité de η n'a de sens que si le domaine $\mathcal{U}$ dans lequel u prend ses valeurs est aussi convexe et invariant par le système. B. Sévennec [13] a en fait construit un contre-exemple en laissant tomber la convexité de $\mathcal{U}$. Des progrès sont en cours concernant cette conjecture (A. Heibig et B. Sévennec).

III.4 Validité du développement asymptotique

Lorsque (HGL) est satisfaite, on peut chercher une solution u^ϵ sous la forme (3.1) à condition que la condition initiale u_0^ϵ soit régulière et compatible avec (3.8), c'est-à- dire que le terme $v_0^0 = v(u_0^0)$ ne dépende pas d'une variable rapide. Si tel est le cas, on a une condition initiale (v_0^0, w_0^0) pour (3.12)-(3.14). Si ce système possède une solution régulière locale sur $Q = \mathbb{R} \times (0,T)$, on construit sans peine les termes ultérieurs du développement, comme solutions de problèmes linéaires bien posés. On espère donc que (1.1) possède une solution régulière dans Q, de la forme (3.1).

Ce résultat a été obtenu par W. E [4] dans le cas particulier de la dynamique des gaz. Des progrès sont en cours dans le cas général (Heibig). Un cas simple pour lequel le résultat a lieu est aussi celui des systèmes riches ; dans ce cas, B est diagonale et $\eta = 0$. Chaque dérivée $\partial_x v_i$ satisfait une équation du type de Ricatti qui permet d'obtenir l'estimation a priori de $\partial_x u$ sur Q.

III.5 Un exemple : la dynamique des gaz

Considérons les équations d'Euler d'un fluide compressible de densité $\rho(x,t)$, de vitesse z, de pression p et d'énergie interne par unité de masse e. Il y a trois lois de conservation pour la masse, la quantité de mouvement et l'énergie ainsi qu'une loi d'état $p = p(\rho, e)$ qui dépend de la nature du fluide :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t\rho + \partial_x(\rho z) = 0, \\ \partial_t(\rho z) + \partial_x(\rho z^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho(e + \frac{1}{2}z^2)) + \partial_x(\rho z(e + \frac{1}{2}z^2) + pz) = 0. \end{array}\right. \tag{3.16}$$

L'analyse des champs caractéristiques est plus simple quand on écrit (3.16) sous la forme quasilinéaire classique

$$\left\{\begin{array}{l} (\partial_t + z\partial_x)\rho + \rho\partial_x z = 0, \\ (\partial_t + z\partial_x)z + \rho^{-1}\partial_x p = 0, \\ (\partial_t + z\partial_x)e + \rho^{-1}p\partial_x z = 0. \end{array}\right. \tag{3.17}$$

Les trois vitesses caractéristiques sont $\lambda_2 = z, \lambda_1 = z - c(\rho, e), \lambda_3 = z + c$ où $c^2 = \partial_\rho p + \rho^{-2}p\partial_e p$. Pour un gaz réaliste, λ_1 et λ_3 sont vraiment non linéaires. En revanche, λ_2 est linéairement dégénéré. Les discontinuités de contact sont les triplets $((\rho_+, z_+, e_+), (\rho_-, z_-, e_-), \sigma)$ pour lesquels $\sigma = z_+ = z_-$ et $p(\rho_+, e_+) = p(\rho_-, e_-)$. Les variables (v, w) appropriées pour redresser les courbes de contact sont donc $v_1 = z, v_2 = p$ et, par exemple, $w = S(\rho, e)$, l'entropie physique, définie par l'existence d'un T non nul tel que $TdS = de + pd(\rho^{-1})$. La forme quasilinéaire triangulaire par bloc est alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} (\partial_t + z\partial_x)z + \rho^{-1}\partial_x p & = & 0, \\ (\partial_t + z\partial_x)p + \rho c^2\partial_x z & = & 0, \\ (\partial_t + z\partial_x)S & = & 0. \end{array}\right. \tag{3.18}$$

Avec les notations de (3.7), on a donc $\eta = 0, \mu = z, B = \begin{pmatrix} z & \rho^{-1} \\ \rho c^2 & z \end{pmatrix}$.
A partir d'ici, ρ et c doivent être considérés comme des fonctions de p, S. Le changement de variables $(\rho, e) \mapsto (p, S)$ est valide car son Jacobien est $T^{-1}c^2 > 0$ et parce que c'est une application propre de $(\mathbb{R}^+)^2$ dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ pour les gaz réalistes. On notera $\rho = R(p,S), c = K(p,S)$ les fonctions correspondantes. Alors

$$(\mathcal{B} - z)^{-1} = m((B - z)^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & m(R^{-1}K^{-2}) \\ m(R) & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici, $m(R) = \lim_{Y\to\infty} \frac{1}{2Y} \int_{-\infty}^{+\infty} R(p, S(y))dy$, et caetera. Finalement,

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} z & m(R)^{-1} \\ m(R^{-1}K^{-2})^{-1} & z \end{pmatrix}.$$

Le système effectif (ou "homogénéisé) est donc

$$\begin{cases} (\partial_t + z\partial_x)z + m(R)^{-1}\partial_x p = 0 \\ (\partial_t + z\partial_x)p + m(R^{-1}K^{-2})^{-1}\partial_x z = 0 \\ (\partial_t + z\partial_x)m(h\circ S) + \{m(h\circ S) - m(R^{-1}K^{-2})^{-1} \\ m(h\circ SR^{-1}K^{-2})\}\partial_x z = 0, \forall h \end{cases} \tag{3.19}$$

La dynamique des gaz satisfait l'hypothèse d'hyperbolicité globale. Les valeurs propres de $\mathcal{B}$ sont $z\pm\sigma$, où $\sigma^{-2} = m(R)m(R^{-1}K^{-2})$. Naturellement, en l'absence d'oscillations de grande amplitude (pas de dépendance en y), on retrouve $\sigma = c$. Sinon, z et $z \pm \sigma$ sont les vitesses des perturbations de petite amplitude qui se superposent aux solutions oscillantes. Par exemple, si on considère la suite explicite de solutions oscillantes $(z^\epsilon, p^\epsilon) =$ constantes, $S^\epsilon(x,t) = S_0(\frac{x-z_0t}{\epsilon})$, et si on perturbe la condition initiale $(z_0, p_0, S_0(x/\epsilon))$, alors la perturbation initiale se sépare en trois composantes, qui se propagent sans interagir à vitesse constante, plus un reste d'ordre inférieur. L'une des composantes, $(\frac{m(R)}{m(R^{-1}K^{-2})})^{1/2}\delta z + \delta p$, se propage à la vitesse $z_0 + \sigma$, etc ....

Notons enfin qu'on peut donner une forme équivalente à (3.19) en remplaçant sa dernière ligne par les lois de conservation

$$\partial_t m(Rg(S)) + \partial_x(zm(Rg(S))) = 0, \quad \forall g. \tag{3.20}$$

Mais cette écriture peut être une source d'erreur en laissant croire que l'analyse asymptotique serait valide quelquesoit la régularité de (z, p, S), moyennant quelque condition de Rankine-Hugoniot. Il n'en est rien puisque même en l'abscence d'oscillations, (3.18) ne serait pas vraie à travers les chocs.

Bibliographie

[1] G. BOILLAT, *Chocs caractéristiques.* Comptes Rendus Acad. Sc., **274** (1972), p 1018-1021.

[2] M. BONNEFILLE, *Propagation des oscillations dans deux classes de systèmes hyperboliques* (2×2 *et* 3×3). Comm. in PDEs, **13** (1988), p 905-925.

[3] R. DI PERNA, *Convergence of approximate solutions to conservation laws.* Arch. Rat. Mech. Anal., **82** (1983), p 27-70.

[4] WEINAN E. *Propagation of oscillations in the solutions of* $1-d$ *compressible fluids equations.* Preprint, Courant Institute (1990).

[5] H. FREISTÜHLER, *Linear degeneracy and shock waves.* Preprint, Aachen (1990).

[6] H. FREISTÜHLER, *Anomale Schocks, strukturell labile Lösungen und die Geometrie der Rankine-Hugoniot-Bedingungen.* Thèse, Aachen (1987).

[7] O. GUÈS, *Solutions oscillantes de systèmes hyperboliques non linéaires.* Journées EDP, St Jean de Monts, (1989), p 547-569.

[8] A. HEIBIG, *Existence et unicité des solutions pour certains systèmes de lois de conservation.* Prépublications de l'ENS Lyon **32** (1990).

[9] TAI PING LIU,

[10] F. MURAT, *Compacité par compensation.* Ann. Scuola Norm. Pisa, cl. di Sc. serie IV, **5** (1978), p 489-507.

[11] D. SERRE, *Un système hyperbolique non linéaire avec des données oscillantes.* Comptes Rendus Acad. Sc. **302** (1986), p 115-168.

[12] D. SERRE, *Oscillations non-linéaires de haute fréquence ; dim* = 1. Collège de France Seminar **XI.** J. - L. Lions et H. Brézis éds. Longman, à paraître.

[13] B. SÉVENNEC, Thèse en préparation. Ecole Normale Supérieure de Lyon (1991).

[14] L. TARTAR, *Compensated compactness and applications to PDEs. Nonlinear analysis and mechanics.* Herriot-Watt symposium 1979. Pitman, RNM n 39.

[15] B. TEMPLE, *Systems of conservation laws with invariant submanifolds.* Trans. AMS, **280** (1983), p 781-795.

Ecole Normale Supérieure
46, allée d'Italie
69364 LYON CEDEX 07