Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Jean-François Perrot

Monoïdes syntactiques et familles de langages rationnels

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 28, n° 1 (1974-1975), exp. n° 11, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1974-1975__28_1_A7_0>

Séminaire P. DUBREIL
(Algèbre)
28e année, 1974/75, n° 11, 9 p.
24 février 1975

MONOÏDES SYNTACTIQUES ET FAMILLES DE LANGAGES RATIONNELS

par Jean-François PERROT

I. Introduction

Le but de cet exposé est de présenter un des aspects de la théorie des monoïdes syntactiques, celui qui traite des classes de langages rationnels que l'on peut définir par des propriétés algébriques de leurs monoïdes syntactiques. Cette branche de la théorie est née d'un théorème de M. P. SCHÜTZENBERGER qui caractérise les langages dont les monoïdes syntactiques sont finis, et ont tous leurs sous-groupes triviaux [9]. La classe de langages ainsi délimitée a fait l'objet d'études approfondies (notamment [4]), dont J. BRZOZOWSKI a donné ici même un exposé d'ensemble ([1], avec bibliographie). A partir de là, S. EILENBERG [2] a édifié une théorie générale des correspondances entre classes de monoïdes finis et classes de langages rationnels, dont nous nous proposons d'esquisser ici quelques traits.

Signalons auparavant que la théorie des monoïdes syntactiques possède d'autres axes de développement : ainsi, l'origine de la théorie se trouve dans les travaux de M. P. SCHÜTZENBERGER sur la théorie algébrique du codage, présentés en 1955 à ce même Séminaire [8] ; cette direction de recherches a donné, et donne encore, de nombreux résultats (cf. [6] et, en dernier lieu, D. PERRIN [5]).

Ces développements concernant essentiellement les monoïdes syntactiques finis, on s'est attaqué récemment à l'étude systématique des monoïdes syntactiques infinis en supposant le langage L algébrique ("context free" dans la terminologie anglo-saxonne) : sur cette approche, voir l'exposé de J. SAKAROVITCH [7] ; les difficultés rencontrées dans cette voie mettent clairement en relief l'importance de l'hypothèse de finitude pour les autres chapitres de la théorie.

Nous terminerons donc cette introduction en rappelant, avec les notations nécessaires, la définition des langages rationnels et le théorème de Kleene.

Langages. - Nous désignons par X un ensemble fini (alphabet, dont les éléments sont des lettres), et par X^* le monoïde libre engendré par X (dont les éléments sont des mots, l'élément neutre étant le mot vide, noté 1). Un langage sur X est une partie quelconque de X^* .

L'ensemble $\mathcal{P}(X^*)$ des langages sur X est muni des opérations ensemblistes d'union et de passage au complémentaire (appelées traditionnellement opérations booléennes), du produit $AB = \{ab \; ; \; a \in A \; , \; b \in B\}$ et de l'opération "étoile", à savoir l'opération unaire qui associe à chaque langage $A \subset X^*$ le sous-monoïde de

X^* , engendré par A , désigné par A^* .

Un langage L est dit rationnel, et on note $L \in \mathrm{Rat}(X^*)$, s'il peut être obtenu à partir des sous-ensembles réduits aux lettres de l'alphabet par un nombre fini d'opérations de réunion, de produit et d'étoile : $\mathrm{Rat}(X^*)$ est la sous-algèbre de $\mathcal{P}(X^*)$, relativement aux opérations susdites, engendrée par $\{\{x\} \ ; \ x \in X\}$.

Monoïdes syntactiques. - La congruence syntactique d'un langage $L \subset X^*$, notée $\sigma(L)$ est la congruence de X^* la plus grossière saturant L . On sait que, pour deux mots quelconques u , $v \in X^*$, on a $u \equiv v \ \ \sigma(L)$ lorsque, pour tout couple $(f , g) \in X^* \times X^*$,

$$fug \in L \iff fvg \in L .$$

Le monoïde syntactique $\mathfrak{M}(L)$ est, par définition, le monoïde-quotient $X^*/\sigma(L)$.

L'homomorphisme canonique $\varphi_L : X^* \longrightarrow \mathfrak{M}(L)$ jouit de la propriété universelle suivante, qui traduit la maximalité de $\sigma(L)$ parmi les congruences de X^* saturant L :

Pour tout homomorphisme surjectif ψ de X^* sur un monoïde M vérifiant $\psi^{-1}\psi(L) = L$, il existe un homomorphisme χ de M sur $\mathfrak{M}(L)$ tel que $\chi \circ \psi = \varphi_L$.

Par ailleurs, l'image du langage L dans son monoïde syntactique est une partie disjonctive de $\mathfrak{M}(L)$, i. e. la congruence de $\mathfrak{M}(L)$ la plus grossière saturant $\varphi_L(L)$ se réduit à l'égalité. Réciproquement, étant donné un monoïde M et une partie disjonctive $P \subset M$, pour tout homomorphisme φ d'un monoïde libre X^* sur M , l'image inverse $\varphi^{-1}(P)$ est un langage sur X dont le monoïde syntactique est isomorphe à M .

Le résultat suivant, dont la version originale [3] se référait à un contexte assez différent, a joué un rôle fondamental dans le développement de la théorie des langages :

THÉORÈME de Kleene. - Un langage est rationnel si, et seulement si, son monoïde syntactique est fini.

Exemple 1. - Soit G un groupe finiment engendré, e son élément neutre : pour tout homomorphisme φ d'un monoïde libre X^* sur G , le langage $\varphi^{-1}(e)$ admet G comme monoïde syntactique, il est donc rationnel si, et seulement si, G est fini. Fixons $X = \{x , y\}$; en prenant pour G le groupe additif $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et $\varphi(x) = 1$, $\varphi(y) = -1$, on obtient le langage de Dyck :

$$\{w \in \{x,y\}^* \ ; \ w \text{ contient autant d'occurrences de } x \text{ que d'occurrences de } y\}$$

qui n'est pas rationnel ; en prenant $G = \mathbb{Z}/k$, $\varphi(x) = \varphi(y) = 1$, le langage obtenu est formé de tous les mots de longueur multiple de k , qui s'écrit rationnellement $(\{x , y\}^k)^*$, avec le même groupe $\mathbb{Z}/k$, en prenant $\varphi(x) = 1$ et $\varphi(y) = 0$, le langage rationnel obtenu est formé de tous les mots contenant un nombre d'occurrences de x multiple de k , il s'écrit

$$[\{y\} \cup (\{x\}\{y\}^*)^{k-1} \{x\}]^* .$$

Exemple 2. - Toujours sur $X = \{x , y\}$, le langage formé de tous les mots qui se terminent par y , soit $\{x , y\}^* y$, a un monoïde syntactique constitué des trois éléments e (élément neutre), $\bar{x}$ et $\bar{y}$ (images respectives de x et de y) avec pour multiplication $\bar{x} = \bar{x}^2 = \overline{yx}$, $\bar{y} = \bar{y}^2 = \overline{xy}$.

Exemple 3. - Soit R_n le monoïde formé d'un élément neutre et de n éléments $r_1 , r_2 , \ldots , r_n$, avec la multiplication $r_i r_j = r_j$ $(i , j = 1 , 2 , \ldots , n)$. R_0 , réduit à son élément neutre, est isomorphe au monoïde syntactique de X^* tout entier (quel que soit X), R_1 à celui de X'^* avec $X' \subsetneq X$, R_2 à celui de $X^* X'$ (cf. exemple 2 ci-dessus), mais pour $n \geq 3$, R_n ne contient aucune partie disjonctive et n'est donc monoïde syntactique d'aucun langage.

II. Variétés. Théorème d'Eilenberg

1. Approche inductive.

Etant donné un monoïde fini M , nous cherchons à décrire la classe $\Omega(M)$ des langages rationnels dont le monoïde syntactique est isomorphe à M . A cette fin, notons, pour une partie P de M :

$$\Omega(M , P) = \{L ; \ \exists \varphi : X^* \longrightarrow M \ (\text{surjectif}), \ L = \varphi^{-1}(P)\} .$$

On a alors

$$\Omega(M) = \bigcup \{\Omega(M , P) ; \ P \text{ partie disjonctive de } M\} .$$

Cette formulation conduit aux deux observations suivantes, dont on trouvera une discussion en [7].

REMARQUE 1. - Soit P une partie disjonctive de M , et choisissons un langage $L \subset X^*$ dans $\Omega(M , P)$. Pour tout langage $L' \subset X'^*$, on a $L' \in \Omega(M , P)$ si, et seulement si, il existe deux homomorphismes ζ et θ respectivement de X'^* dans X^* et de X^* dans X'^* , vérifiant $L' = \zeta^{-1}(L)$ et $L = \theta^{-1}(L')$.

A une transformation près par homomorphisme inverse entre deux monoïdes libres, nous pouvons donc nous borner à décrire les langages sur un alphabet X fixé qui sont de la forme $\varphi^{-1}(P)$, l'homomorphisme φ de X^* sur M étant également fixé, pour les différentes parties disjonctives P de M . Un tel langage s'écrivant $L = \bigcup \{\varphi^{-1}(m) ; \ m \in P\}$, nous nous tournons vers la détermination des langages de la forme $\varphi^{-1}(m)$ (bien que leurs monoïdes syntactiques soient en général des images homomorphes de M et non M lui-même).

Dans ce but, nous noterons, pour une partie A d'un monoïde quelconque Q et un élément $q \in Q$:

$$q \,.\!\!^{\cdot}\, A = \{r \in Q ; \ qr \in A\} \quad \text{et} \quad A \,^{\cdot}\!\!. \, q = \{s \in Q ; \ sq \in A\} .$$

On a alors les règles de calcul suivantes :

$q' \therefore (q'' \therefore A) = (q' q'') \therefore A$, et $(A \because q') \because q'' = A \because (q' q'')$;

$q' \therefore (A \because q'') = (q' \therefore A) \because q'' = \{m \in Q \; ; \; q' m q'' \in A\}$,

que nous noterons $q' \therefore A \because q''$;

pour φ homomorphisme d'un autre monoïde Q' sur Q ,

$$\varphi^{-1}(q \therefore A) = u \therefore \varphi^{-1}(A) \quad \text{pour tout} \quad u \in \varphi^{-1}(q) \text{ , etc.}$$

Rappelons qu'une partie P de M est disjonctive si, et seulement si, pour m' , $m'' \in M$, le fait que $pm' q \in P \iff pm'' q \in P$ pour tout couple $(p,q) \in M{\times}M$ entraîne $m' = m''$. Cette propriété de P se traduit, avec les notations ci-dessus, par le "lemme d'atomisation" [7] :

REMARQUE 2. - Une partie P du monoïde M est disjonctive si, et seulement si, on a pour tout $m \in M$ l'égalité

$$\{m\} = [\bigcap \{p \therefore P \because q \; ; \; p,q \in M \text{ , } pmq \in P\}] \cap [\bigcap \{p \therefore \overline{P} \because q \; ; \; p,q \in M \text{ , } pmq \in \overline{P}\}]$$

où $\overline{P}$ désigne le complémentaire de P dans M .

Il suit de là que si $L \subset X^*$ admet M comme monoïde syntactique, en appelant φ l'homomorphisme canonique de X^* sur M , et en appliquant les règles de calcul ci-dessus à la partie disjonctive $P = \varphi(L)$, tout langage $L' \subset X^*$ tel que $\varphi^{-1}\varphi(L') = L'$ est obtenu comme union finie d'intersections finies de parties de X^* de la forme $u \therefore L \because v$ ou $u \therefore \overline{L} \because v$ avec $u , v \in X^*$.

Nous trouvons donc finalement que tout langage rationnel dont le monoïde syntactique est isomorphe à celui d'un langage L donné appartient à la plus petite famille de langages contenant L et fermée par les opérations suivantes :

- homomorphisme inverse entre monoïdes libres ;

- opérations booléennes (réunion, intersection, passage au complémentaire) entre parties d'un même monoïde libre ;

- passage du langage $A \subset X^*$ à $x \therefore A$ et à $A \because x$ avec $x \in X$.

Soulignons que la famille de langages ainsi décrite contient des langages dont le monoïde syntactique n'est pas isomorphe à M ; la question suivante se pose alors : Quels sont les caractères communs à tous ces langages, et à leurs monoïdes syntactiques ? C'est à cette question que répond le théorème d'Eilenberg que voici.

2. Variétés de langages.

Définition (EILENBERG [2]). - On appelle variété de langages rationnels, et on désigne par $\mathcal{L}$ la donnée, pour chaque alphabet X , d'une famille $\mathcal{L}(X^*)$ de parties rationnelles de X^* jouissant des trois propriétés suivantes :

- la famille $\mathcal{L}(X^*)$ est fermée par les opérations booléennes dans $\mathcal{P}(X^*)$;

- $L \in \mathcal{L}(X^*)$ et $x \in X$ entraînent $x \,.\!\!\cdot\, L \in \mathcal{L}(X^*)$ et $L \,\cdot\!\!.\, x \in \mathcal{L}(X^*)$;
- pour tout homomorphisme η de Y^* dans X^*, $L \in \mathcal{L}(X^*)$ entraîne

$$\eta^{-1}(L) \in \mathcal{L}(Y^*) .$$

Exemple 1. – La plus petite variété de langages est donnée par $\mathcal{L}(X^*) = \{X^* , \emptyset\}$: c'est la variété triviale.

Exemple 2. – On démontre que $\mathcal{L}(X^*) = \mathrm{Rat}(X^*)$, la famille de tous les langages rationnels sur X, définit une variété.

Exemple 3. – Le résultat du paragraphe précédent peut s'énoncer ainsi : La famille des langages, dont le monoïde syntactique est isomorphe à celui d'un langage rationnel donné L, est contenue dans la plus petite variété de langages rationnels à laquelle appartient L.

3. (Pseudo-)variété de monoïdes finis.

On sait que, pour pouvoir prétendre au titre de variété et, selon le théorème de Birkhoff, se laisser définir par un système d'équations, une classe d'algèbres doit être fermée par homomorphisme, passage aux sous-algèbres et produit direct illimité.

Aucune variété non triviale n'est donc formée que d'algèbres finies, c'est pourquoi nous appellerons pseudo-variété une classe d'algèbres fermée par homomorphisme, passage aux sous-algèbres et produit direct fini.

Ainsi, les monoïdes finis constituent une pseudo-variété de monoïdes.

Dans ce qui suit, il ne sera plus question que de pseudo-variétés de monoïdes finis ; afin d'alléger le discours, nous les appellerons variétés de monoïdes finis, par abus de langage.

Avant d'énoncer le théorème d'Eilenberg, formulons quelques observations faciles à vérifier qui établiront une partie de la correspondance entre variétés de langages rationnels et variétés de monoïdes finis. Suivant l'usage, nous dirons qu'un monoïde Q divise un monoïde Q' lorsque Q est image homomorphe d'un sous-monoïde de Q'.

- Pour deux langages quelconques L_1, $L_2 \subset X^*$, le monoïde syntactique $\mathfrak{M}(L_1 \cup L_2)$ divise le produit direct $\mathfrak{M}(L_1) \times \mathfrak{M}(L_2)$; quant au passage au complémentaire, on a $\mathfrak{M}(\overline{L}) = \mathfrak{M}(L)$.
- Pour $L \subset X^*$ et $x \in X$, $\mathfrak{M}(x \,.\!\!\cdot\, L)$ et $\mathfrak{M}(L \,\cdot\!\!.\, x)$ sont images homomorphes de $\mathfrak{M}(L)$.
- Pour un homomorphisme η entre monoïdes libres, $\mathfrak{M}(\eta^{-1}(L))$ divise $\mathfrak{M}(L)$.

On a donc le résultat suivant :

Etant donné une variété de monoïdes finis $\mathcal{M}$, désignons par $\hat{\mathcal{L}}(\mathcal{M})$ la famille de tous les langages dont les monoïdes syntactiques appartiennent à $\mathcal{M}$. Alors $\hat{\mathcal{L}}(\mathcal{M})$ est une variété de langages rationnels.

4. Théorème d'Eilenberg.

Soit $\mathcal{L}$ une variété de langages rationnels. La famille des monoïdes syntactiques des langages de $\mathcal{L}$ ne forme pas en général une variété de monoïdes finis, même en prenant sa fermeture par isomorphisme, comme l'indique le comportement des monoïdes R_n , pour $n \geq 3$ (cf. Exemple I.3). Nous considérons donc la variété engendrée par cette famille de monoïdes, à savoir la plus petite variété de monoïdes finis la contenant, que nous désignons par $\hat{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$.

THÉORÈME (EILENBERG [2]). - Pour toute variété de langages rationnels $\mathcal{L}$ et toute variété de monoïdes finis $\mathcal{M}$, on a les égalités :

$$\hat{\mathcal{L}}(\hat{\mathcal{M}}(\mathcal{L})) = \mathcal{L} \text{ et } \hat{\mathcal{M}}(\hat{\mathcal{L}}(\mathcal{M})) = \mathcal{M} .$$

A chaque variété de langages rationnels correspond ainsi une variété de monoïdes finis, et vice-versa.

Exemple 1. - Si $\mathcal{L}$ est la variété de langages triviale, $\hat{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$ est constituée par des monoïdes triviaux, réduits à leur élément neutre.

Exemple 2. - Si $\mathcal{M}$ est la variété de tous les monoïdes finis, $\hat{\mathcal{L}}(\mathcal{M})$ est égale à Rat, la variété de tous les langages rationnels.

III. Variétés de langages normales. Problèmes de fermeture

1. Variétés normales.

Etant donné une variété de langages rationnels $\mathcal{L}$, nous dirons qu'elle est normale si, pour tout alphabet X , la famille $\mathcal{L}(X^*)$ contient des langages sur X "les plus simples", à savoir les singletons $\{x\}$ pour $x \in X$. Ainsi, la variété triviale n'est pas normale.

Il est par ailleurs naturel de dire qu'une variété de langages $\mathcal{L}$ est fermée par produit (resp. par étoile) lorsque, pour tout X , L_1 et $L_2 \in \mathcal{L}(X^*)$ entraîne $L_1 L_2 \in \mathcal{L}(X^*)$ (resp. $L \in \mathcal{L}(X^*)$ entraîne $L^* \in \mathcal{L}(X^*)$) . De la définition même des langages rationnels suit alors l'observation suivante :

Rat est la seule variété de langages normale qui soit fermée à la fois par produit et par étoile.

2. "Variétés à groupes" de monoïdes finis.

Soit $\mathcal{G}$ une variété de groupes finis, i. e. une variété de monoïdes finis formée exclusivement de groupes (on sait que tout monoïde divisant un groupe fini est lui-même un groupe fini). Les monoïdes finis, dont tous les sous-groupes appartiennent à $\mathcal{G}$, forment eux-mêmes une variété de monoïdes, que nous noterons $\hat{\mathcal{G}}$.

PROPOSITION (SCHÜTZENBERGER [9]). - <u>Pour toute variété de groupes finis</u> $\mathcal{G}$, <u>la variété de langages</u> $\hat{\mathcal{L}}(\hat{\mathcal{G}})$ <u>est normale et fermée par produit.</u>

La plus petite variété de ce type est obtenue en prenant pour $\mathcal{G}$ la variété des groupes triviaux : elle est formée des monoïdes finis M vérifiant l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

- tous les sous-groupes de M sont triviaux ;
- la relation de Green $\mathcal{H}$ est réduite à l'égalité sur M ;
- il existe un entier K tel que, pour tout $m \in M$, on ait $m^{K+1} = m^K$.

En raison de cette dernière propriété, de tels monoïdes sont souvent appelés <u>apériodiques</u>, et nous désignerons par $\mathcal{A}$ la variété en question.

THÉORÈME (SCHÜTZENBERGER [9]). - <u>Le monoïde syntactique d'un langage</u> $L \subset X^*$ <u>est fini et apériodique si, et seulement si,</u> L <u>peut être obtenu à partir des lettres de</u> X <u>par un nombre fini d'opérations de réunion, de passage au complémentaire et de produit.</u>

COROLLAIRE. - $\hat{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ <u>est la plus petite variété de langages normale fermée par produit.</u>

<u>Exemple</u> 1. - La variété de Simon (cf. [1], [11]), dont les monoïdes sont caractérisés par la propriété que deux éléments engendrant le même idéal bilatère sont nécessairement égaux (la relation de Green $\mathcal{J}$ est ainsi réduite à l'égalité, d'où l'appellation de "monoïdes $\mathcal{J}$-triviaux"), et dont les langages sur un alphabet X sont les combinaisons booléennes de langages de la forme

$$X^* x_{i_1} X^* x_{i_2} X^* \dots X^* x_{i_k} X^* \qquad (k \text{ entier}, \ x_{i_\lambda} \in X) ,$$

est strictement contenue dans $\mathcal{A}$, car la relation de Green $\mathcal{H}$ est plus fine que $\mathcal{J}$, aussi n'est-elle pas fermée par produit ainsi qu'on le vérifie en observant que, pour $X = \{x , y\}$, le monoïde libre X^* tout entier (monoïde syntactique trivial) et l'ensemble $y^+ = \{y^n ; n \geq 1\} = X^* yX^* \cap \overline{X^* xX^*}$ (monoïde syntactique constitué d'un élément neutre, d'un zéro et d'un troisième élément idempotent, image de y^+), font partie de la variété de langages, cependant que leur produit $X^* y^+ = X^* y$ en est exclus puisque son monoïde syntactique, isomorphe à R_2 (cf. Exemple I.2), possède une $\mathcal{J}$-classe où figurent à la fois l'image de x et celle de y .

<u>Exemple</u> 2. - La "dot-depth hierarchy" permet de classer les familles de langages apériodiques (i. e. dont le monoïde syntactique est dans $\mathcal{A}$) suivant le nombre d'opérations de produit nécessaires à leur confection (cf. [1]).

3. Le problème de l'étoile.

Une variété de langages normale fermée par produit (en particulier une variété à groupes $\hat{\mathcal{L}}(\hat{\mathcal{G}})$), distincte de Rat , n'étant pas fermée par étoile, un des chapitres les plus intéressants de la théorie étudie "ce qui fait que, pour certains langages L d'une variété $\mathcal{L}$, le sous-monoïde L^* ne fait plus partie de $\mathcal{L}$ ", plus précisément, pour $\mathcal{L} = \hat{\mathcal{L}}(\hat{\mathcal{G}})$, quels sous-groupes apparaissent dans le monoïde syntactique $\mathfrak{M}(L^*)$. Dans ce but, on fait souvent l'hypothèse restrictive que L engendre librement L^* : cette hypothèse permet d'obtenir des résultats précis que l'on cherche ensuite à généraliser ; on dit alors que L est un code, et ce cheminement rejoint tout droit la problématique originelle (théorie du codage) que nous avons mentionnée en I . Un exposé complet de cet aspect de la question nécessitant des développements assez longs, nous nous bornerons ici à présenter un résultat récent de SCHÜTZENBERGER.

Soit L^* un sous-monoïde rationnel de X^* , M son monoïde syntactique, et P l'image de L^* dans M . P , étant un sous-monoïde du monoïde fini M , contient au moins un idempotent, et par conséquent rencontre au moins un sous-groupe de M . De plus, tout sous-groupe H de M qui rencontre P est coupé selon un sous-groupe $K = H \cap P$. Par ailleurs, relativement à une variété $\mathcal{G}$ de groupes finis, tout groupe G admet un noyau

$$\mathrm{Ker}_{\mathcal{G}}(G) = \bigcap \{D \; ; \; D \lhd G \; , \; G/D \in \mathcal{G}\} ,$$

et on a

$$\mathrm{Ker}_{\mathcal{G}}(G) = \{e\} \text{ si, et seulement si, } G \in \mathcal{G} .$$

Supposons maintenant que le langage L générateur de L^* est rationnel et appartient à la variété $\hat{\mathcal{L}}(\hat{\mathcal{G}})$: dire que L^* appartient également à $\hat{\mathcal{L}}(\hat{\mathcal{G}})$ se traduit par $\mathrm{Ker}_{\mathcal{G}}(H) = \{e\}$ pour tous les sous-groupes H de M , d'où trivialement $\mathrm{Ker}_{\mathcal{G}}(H) \subset H \cap P$ pour tout sous-groupe H de M qui rencontre P . La réciproque est moins facile à établir.

THÉORÈME (SCHÜTZENBERGER [10]). - Sous les hypothèses ci-dessus, si L^* n'appartient pas à $\hat{\mathcal{L}}(\hat{\mathcal{G}})$, pour l'un des sous-groupes H de M rencontrant P au moins, le noyau $\mathrm{Ker}_{\mathcal{G}}(H)$ n'est pas contenu dans $H \cap P$.

COROLLAIRE. - Si L^* n'appartient pas à $\hat{\mathcal{L}}(\hat{\mathcal{G}})$, l'un au moins des sous-groupes de M qui rencontrent P n'est pas dans $\mathcal{G}$.

Par exemple, une condition suffisante pour que L^* ne sorte pas de la variété à groupes de L est que tous les sous-groupes de M rencontrant P soient triviaux, cette condition n'étant nécessaire que si L est apériodique. Notons à cet égard que le langage générateur L peut être "inutilement compliqué" par rapport à L^* , si bien que L^* peut appartenir à une variété à groupes plus petite que celle de L (par exemple, être apériodique sans que L le soit). Mais si on choisit pour L le système générateur minimum de L^* , i. e. si $L = (L^* - \{1\}) - (L^* - \{1\})^2$, il est clair que L appartient à la même variété que L^* .

COROLLAIRE. - Si tous les sous-groupes de M rencontrant P sont triviaux, la plus petite variété de groupes finis $\mathcal{G}$, telle que le système générateur minimum de L^* appartienne à $\hat{\mathcal{L}}(\hat{\mathcal{G}})$, est engendrée par les sous-groupes de M .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRZOZOWSKI (J. A.). - Hierarchies of aperiodic languages, Séminaire P. Dubreil : Algèbre, 28e année, 1974/75, n° 19, 11 p.

[2] EILENBERG (S.). - Automata, languages and machines, vol. B (sous presse).

[3] KLEENE (S. C.). - Representation of events in nerve nets and finite automata, "Automata studies", Edited by C. E. Shannon and J. McCarthy, p. 3-41. - Princeton, Princeton University Press, 1954 (Annals of Mathematics Studies, 34).

[4] McNAUGHTON (R.) and PAPERT (S.). - Counter-free automata. - Cambridge, MIT Press, 1971 (M. I. T. Research Monographs, 65).

[5] PERRIN (D.). - Codes bipréfixes et groupes de permutations, Thèse Sc. math. Univ. Paris-7, 1975 ; Séminaire Dubreil : Algèbre, 28e année, 1974/75, n° 13, 6 p.

[6] PERROT (J.-F.). - Monoïdes syntactiques des langages rationnels, Journées mathématiques de Montpellier, 1973, p. 281-297.

[7] SAKAROVITCH (J.). - Un cadre algébrique pour l'étude des monoïdes syntactiques, Séminaire Dubreil : Algèbre, 28e année, 1974/75, n° 14, 10 p.

[8] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - Une théorie algébrique du codage, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 9e année, 1955/56, n° 15, 24 p.

[9] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - Sur les monoïdes finis n'ayant que des sous-groupes triviaux, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 18e année, 1964/65, n° 10, 6 p.

[10] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - Sur certaines pseudo-variétés de monoïdes finis, IRIA, Rapport de recherche n° 62, 1974.

[11] SIMON (I.). - Piecewise testable events, 2.G.I. Fachtagung über Automatentheorie und formale Sprachen [1975, Kaiserslautern] (à paraître dans les Lecture Notes in Computer Science).

(Texte reçu le 25 juin 1975)

Jean-François PERROT
8 rue du Faubourg Poissonnière
75010 PARIS