Jean Marot

Sur les anneaux universellement japonais

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 28, n° 1 (1974-1975), exp. n° 24, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1974-1975__28_1_A18_0>

Séminaire P. DUBREIL (Algèbre) 28e année, 1974/75, n° 24, 6 p.

24-01

12 mai 1975

SUR LES ANNEAUX UNIVERSELLEMENT JAPONAIS

par Jean MAROT

1. Introduction.

Dans EGA IV, n° (7.4.8) [3], A. GROTHENDIECK pose la question suivante : "Soient A un anneau de Zariski complet, et $\mathfrak{I}$ un idéal de définition de A. Si $A/\mathfrak{I}$ est un P-anneau, en est-il de même de A ?" Dans le cas particulier où P est la propriété des fibres formelles d'être géométriquement réduites, le problème posé est le suivant : "Soient A un anneau de Zariski complet, et $\mathfrak{I}$ un idéal de définition de A. Si les fibres formelles de $A/\mathfrak{I}$ sont géométriquement réduites, en est-il de même de celles de A ?" Dans cet exposé, nous montrons que la réponse est affirmative lorsque A est semi-local, puis nous donnons quelques applications.

2. Le résultat essentiel.

Nous allons établir la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - *Soient* A *un anneau noethérien semi-local, et* $\mathfrak{I}$ *un idéal de* A *; on suppose que* A *est séparé et complet pour la topologie* $\mathfrak{I}$*-adique. Alors, si les fibres formelles de* $A/\mathfrak{I}$ *sont géométriquement réduites, il en est de même des fibres formelles de* A.

Compte tenu du théorème suivant dû à Zariski et Nagata,

THÉORÈME (EGA IV, n° (7.6.4) [3]). - *Soit* A *un anneau semi-local noethérien. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1° *Pour toute* A*-algèbre finie réduite* C, *le complété* $\hat{C}$ *est un anneau réduit,*

2° *Les fibres formelles de* A *sont géométriquement réduites,*

3° *L'anneau* A *est universellement japonais* [c'est-à-dire, *tout quotient intègre de* A *est un anneau japonais, ou encore, toute* A*-algèbre intègre de type fini est un anneau japonais*].

la proposition 1 est un cas particulier du résultat plus général suivant [qui peut être considéré comme la bonne généralisation du lemme classique de TATE (EGA 0_{IV}, n° (23.1.3) [3])].

PROPOSITION 2. - *Soient* A *un anneau de Zariski complet, et* $\mathfrak{I}$ *un idéal de définition de* A. *Alors, si l'anneau* $A/\mathfrak{I}$ *est universellement japonais,* A *est aussi universellement japonais.*

3. Démonstration de la proposition 2.

3.1 : La démonstration utilise de façon fondamentale les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME de Chevalley (EGA 0_I n° (7.2.7) [2]). - Soient A un anneau de Zariski complet, $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A, et M un A-module tel que le A-module (canonique) $M/\mathfrak{J}M$ soit de type fini. Alors le A-module $\hat{M}$ est de type fini.

THÉORÈME de J. Nishimura [5]. - Soit A un anneau de Krull tel que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de A, l'anneau $A/\mathfrak{p}$ soit noethérien. Alors l'anneau A est noethérien.

Il suffit de montrer que, pour tout élément non nul a de A, l'anneau A/Aa est noethérien. Désignons par $(v_i)_{i\in I}$ la famille des valuations essentielles de A, par $(\mathfrak{p}_i)_{i\in I}$ la famille correspondante des idéaux premiers de hauteur 1 de A, et posons $v_i(a) = n_i \geq 0$. Il existe une partie finie J de I telle que $n_i = 0$ pour tout $i \in I - J$; alors $Aa = \bigcap_{i\in J} \mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ où $\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ est l'idéal des $x \in A$ tels que $v_i(x) \geq n_i$. Il suffit donc de montrer que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de A et pour tout entier $n \geq 1$, l'anneau $A/\mathfrak{p}^{(n)}$ est noethérien. Soit v_{i_0} la valuation associée à $\mathfrak{p}$; d'après le théorème d'approximation de Krull, il existe $x \in K$ (corps des fractions de A) tel que

$$v_{i_0}(x) = 1 \quad \text{et} \quad v_i(x) \leq 0 \quad \text{pour tout} \quad i \neq i_0 .$$

Désignons par φ_n l'homomorphisme canonique fini $\varphi_n : A \longrightarrow A[x]/x^n A[x]$. Pour tout $a \in \operatorname{Ker} \varphi_n$, il existe un polynôme

$$P(x) = \sum_{k=n}^{k=m\geq n} b_k x^k$$

à coefficients dans A tel que $a = P(x)$. Soit V un anneau de valuation de K contenant A ; si $x \in V$, $b_m x \in V$; si $x \notin V$, $b_m x^m = a - \sum_{k=n}^{k=m-1} b_k x^k$ appartient à Vx^{m-1}, donc $b_m x \in V$. Ainsi $b_m x$ appartient à tout anneau de valuation de K contenant A ; donc $b_m x$ appartient à A. En prenant P de degré minimal, on voit que $\operatorname{Ker} \varphi_n = A \cap Ax^n$; d'autre part, en vertu du choix de x, $A \cap Ax^n = \mathfrak{p}^{(n)}$. Ainsi φ_n induit un homomorphisme injectif fini

$$(1) \qquad \bar{\varphi}_n : A/\mathfrak{p}^{(n)} \longrightarrow A[x]/x^n A[x] ;$$

de plus $\bar{\varphi}_1$ est bijectif. Par hypothèse, l'anneau $A[x]/xA[x]$ est noethérien ; il en est de même de $A[x]/x^n A[x]$, d'après le théorème de Cohen, donc de $A/\mathfrak{p}^{(n)}$ d'après (1) et EGA 0_I, n° (6.4.9) [2].

3.2 : Lemmes préliminaires. - Dans les trois lemmes qui suivent, A est un anneau noethérien intègre de corps des fractions K, K' une extension finie de K, et A' la fermeture intégrale de A dans K'.

LEMME 1. – *Soient* $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} A'$, *et* $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A \in \operatorname{Spec} A$. *Si l'anneau* $A/\mathfrak{p}$ *est japonais, alors le* $(A/\mathfrak{p})$-*module* $A'/\mathfrak{p}'$ *est de type fini.*

Comme K' est une extension finie de K , il existe une sous-A-algèbre finie B de A' ayant K' comme corps des fractions. L'homomorphisme $A/\mathfrak{p} \longrightarrow B/\mathfrak{q}$, où $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}' \cap B$, est injectif et fini ; donc l'anneau $B/\mathfrak{q}$ est japonais comme $A/\mathfrak{p}$; nous pouvons donc supposer $K' = K$. Soient k et k' les corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$ et $A'/\mathfrak{p}'$. D'après [4] (33.10), k' est une extension finie de k . Le $A/\mathfrak{p}$-module $A'/\mathfrak{p}'$ est contenu dans la fermeture intégrale de $A/\mathfrak{p}$ dans k' . Comme l'anneau $A/\mathfrak{p}$ est noethérien et japonais, le $A/\mathfrak{p}$-module $A'/\mathfrak{p}'$ est de type fini.

LEMME 2. – *Si, pour tout* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(K/A)$, *l'anneau* $A/\mathfrak{p}$ *est japonais, alors l'anneau* A' *est noethérien.*

L'anneau A' est un anneau de Krull ; d'après le théorème de Nishimura, il suffit de montrer que $A'/\mathfrak{p}'$ est un anneau noethérien pour tout idéal premier $\mathfrak{p}'$ de hauteur 1 de A' . Soit $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$; d'après le théorème de Cohen-Seidenberg, il existe $x \in \mathfrak{p}$, $x \neq 0$. Désignons par C la clôture intégrale de A ; les anneaux C et A' sont des anneaux de Krull. D'après la proposition 12 de [1] (ch. 7, §1, n° 8), $\mathfrak{p}' \cap C$ est un idéal premier de hauteur 1 de C , contenant x ; d'après [4] (33.11), l'idéal premier $\mathfrak{p}$ appartient à $\operatorname{Ass}_A(A/xA)$. L'anneau $A/\mathfrak{p}$ est alors japonais ; on conclut par le lemme 1.

LEMME 3. – *Soit* $\mathfrak{J}$ *un idéal de* A , *distinct de* A , *tel que* :

(i) A *est complet pour la topologie* $\mathfrak{J}$-*adique*,

(ii) *l'anneau* $A/\mathfrak{J}$ *est universellement japonais*,

(iii) *l'anneau* A' *est noethérien*.

Alors le A-*module* A' *est de type fini.*

L'idéal $\mathfrak{J}A'$ de A' est distinct de A' , puisque $\mathfrak{J}$ est distinct de A , et que A' est entier sur A ; soient $\mathfrak{r}$ sa racine, et $(\mathfrak{p}_i)_{1\leq i\leq m}$ la famille de ses idéaux premiers minimaux, en nombre fini puisque A' est noethérien. Le A-module $A'/\mathfrak{r}$ est un sous-A-module du A-module $\prod_{i=1}^{i=m} A'/\mathfrak{p}'_i$; ce dernier est de type fini, d'après le lemme 1 ; donc le A-module $A'/\mathfrak{r}$ est de type fini puisque A est noethérien. Pour tout entier $n \geq 1$, $\mathfrak{r}^n/\mathfrak{r}^{n+1}$ est un $(A'/\mathfrak{r})$-module de type fini puisque A' est noethérien, donc un A-module de type fini. Comme A est noethérien, la suite exacte de A-modules :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{r}^n/\mathfrak{r}^{n+1} \longrightarrow A'/\mathfrak{r}^{n+1} \longrightarrow A'/\mathfrak{r}^n \longrightarrow 0$$

montre alors par récurrence que $A'/\mathfrak{r}^n$ est un A-module de type fini, pour tout entier $n \geq 1$. Comme A' est noethérien, il existe un entier $p \geq 1$ tel que $\mathfrak{r}^p \subseteq \mathfrak{J}A'$; le A-module $A'/\mathfrak{J}A'$ est quotient du A-module $A'/\mathfrak{r}^p$, il est donc de type fini. D'après le théorème de Chevalley, le séparé complété $\widehat{A'}$ du A-module

A' pour la topologie $\mathfrak{I}$-adique est un A-module de type fini. Le A-module A' est séparé pour la topologie $\mathfrak{I}$-adique, puisque l'anneau A' est noethérien intègre, et que $\mathfrak{I}A'$ est distinct de A'. Le A-module A' est alors un sous-A-module de $\hat{A}'$; il est de type fini puisque l'anneau A est noethérien.

3.3 : Fin de la démonstration. - Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 2. Il faut établir que l'anneau $A/\mathfrak{p}$ est japonais, pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. En vertu du principe de récurrence noethérienne, il suffit de montrer que l'ensemble des $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ tel que $A/\mathfrak{p}$ est japonais possède la propriété suivante : "Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ est tel que $A/\mathfrak{q}$ est japonais pour tout idéal premier $\mathfrak{q}$ contenant strictement $\mathfrak{p}$, alors $A/\mathfrak{p}$ est japonais". Posons $B = A/\mathfrak{p}$; par hypothèse, l'anneau $B/\mathfrak{q}$ est japonais, pour tout idéal premier non nul $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$.

Soient K le corps des fractions de B, K' une extension finie de K, et B' la fermeture intégrale de B dans K'. D'après le lemme 2, l'anneau B' est noethérien. D'autre part, B est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{I}B$-adique, d'après le théorème 3 de [1] (ch. 3, §3, n° 4) ; et l'anneau $B/\mathfrak{I}B$ est universellement japonais, puisque tout quotient intègre de $B/\mathfrak{I}B$ est un quotient intègre de $A/\mathfrak{I}$. Le lemme 3 montre alors que B' est un B-module de type fini ; donc l'anneau B est japonais.

4. Applications.

PROPOSITION 3. - *Soient A un anneau noethérien, $\mathfrak{I}$ un idéal de A distinct de A, et $\hat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie $\mathfrak{I}$-adique. Alors si l'anneau $A/\mathfrak{I}$ est universellement japonais, l'anneau $\hat{A}$ est aussi universellement japonais.*

Ceci découle de la proposition 2, compte tenu de l'isomorphisme canonique

$$A/\mathfrak{I} \xrightarrow{\sim} \hat{A}/\mathfrak{I}\hat{A} .$$

PROPOSITION 4. - *Soient A un anneau noethérien semi-local, $\mathfrak{I}$ un idéal de A distinct de A, et $\hat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie $\mathfrak{I}$-adique. Alors, si les fibres formelles de A sont géométriquement réduites, il en est de même de celle de $\hat{A}$.*

PROPOSITION 5. - *Soient A un anneau de Zariski complet, et $\mathfrak{I}$ un idéal de définition de A. Alors, si l'anneau $A/\mathfrak{I}$ est universellement japonais, tout anneau de séries formelles restreintes à un nombre fini de variables $A\{T_1, \ldots, T_n\}$ est aussi universellement japonais.*

Posons $A' = A\{T_1, \ldots, T_n\}$. D'après EGA 0_I, n° (7.5.2) [2], l'anneau A' est noethérien complet pour la topologie $\mathfrak{I}A'$-adique. D'autre part, l'anneau $A'/\mathfrak{I}A'$ est isomorphe à l'anneau de polynômes $(A/\mathfrak{I})[T_1, \ldots, T_n]$; donc, d'après l'hypothèse et [3] (7.7.2), l'anneau $A'/\mathfrak{I}A'$ est universellement japonais. La proposition 2 permet de conclure.

PROPOSITION 6. - Soit A un anneau noethérien universellement japonais. Alors tout anneau de séries formelles à un nombre fini de variables $A[[X_1, \dots, X_n]]$ est universellement japonais.

On applique la proposition 2 à l'anneau $A[[X_1, \dots, X_n]]$ et à l'idéal $(X_1, \dots, X_n) A[[X_1, \dots, X_n]]$.

Comme dernière application, signalons la variante suivante du lemme classique de Tate [3] (23.1.3). On en trouvera la démonstration dans [6].

PROPOSITION 7. - Soient A un anneau noethérien intègre, de corps des fractions K, p l'exposant caractéristique de K, xA un idéal principal de A distinct de A, et $\bar{A}$ la cloture intégrale de A. On suppose que

(i) A est complet pour la topologie xA-adique.

(ii) Pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(A/xA)$, l'anneau $A/\mathfrak{p}$ est japonais.

(iii) L'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

(a) les idéaux premiers minimaux de $x\bar{A}$ sont principaux.

(b) les idéaux premiers minimaux de $x\bar{A}$ sont de type fini, et $(K : K^p) < +\infty$.

Alors l'anneau A est japonais.

5. Conclusions.

Il reste encore des questions ouvertes, en particulier les deux suivantes.

Question 1. - Soient A un anneau de Zariski complet, et $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A. Si l'anneau $A_{\mathfrak{M}}/\mathfrak{J}A_{\mathfrak{M}}$ est universellement japonais pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A, en est-il de même de $A_{\mathfrak{M}}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A ? Une réponse positive permettrait de résoudre totalement la question de A. GROTHENDIECK.

Question 2. - Trouver un anneau universellement japonais, dont les fibres formelles ne sont pas toutes géométriquement régulières. Il n'en existe ni dans EGA, ni dans "Local rings" de NAGATA.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative, chap. 1-2, 3-4, 5-6, 7. - Paris, Hermann, 1961-1965 (Act. scient. et ind., 1290, 1293, 1308, 1314 ; Bourbaki, 27, 28, 30 et 31).

[2] GROTHENDIECK (A.). - Eléments de géométrie algébrique, I [EGA I]. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 166).

[3] GROTHENDIECK (A.). - Eléments de géométrie algébrique, IV [EGA IV]. - Paris, Presses universitaires de France, 1964 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 20 et 24).

[4] NAGATA (M.). - Local rings. - New York Interscience Publishers, 1962 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 13).

[5] NISHIMURA (J.). - Note on Krull domains (à paraître).

[6] MAROT (J.). - Sur les anneaux universellement japonais, Bull. Soc. math. France, t. 103, 1975, p. 103-111.

(Texte reçu le 6 juin 1975)

Jean MAROT
Mathématiques
Université de Bretagne occidentale
6 avenue Victor Le Gorgeu
29283 BREST CEDEX