JEAN-PIERRE SERRE

Groupes finis à cohomologie périodique

Séminaire N. Bourbaki, 1961, exp. nº 209, p. 53-64
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1960-1961__6__53_0>

Séminaire BOURBAKI
13e année, 1960/61, n° 209 Décembre 1960

GROUPES FINIS À COHOMOLOGIE PÉRIODIQUE

par Jean-Pierre SERRE

(d'après R. SWAN [8])

1. Enoncé des résultats.

Soit G un groupe fini d'ordre n, et soit k un entier ≥ 1. On dit que la cohomologie de G est périodique de période k s'il existe un élément $u \in \hat{H}^k(G, \mathbb{Z})$ d'ordre égal à n. On sait alors (cf. [2], Chap. XII) que, pour tout G-module A, et tout $q \in \mathbb{Z}$, l'application $x \to u.x$ est un isomorphisme de $\hat{H}^q(G, A)$ sur $\hat{H}^{q+k}(G, A)$, ce qui justifie la terminologie.

Si G opère librement sur la sphère $\mathbb{S}_{k-1}$ $(k \geq 2)$, et si les éléments de G respectent l'orientation de $\mathbb{S}_{k-1}$, la cohomologie de G est périodique de période k (cf. [1], exposé 13, ou bien [2], p. 357). On savait peu de choses sur la réciproque (cf. MILNOR [5], qui donne un certain nombre de contre-exemples). Les résultats de Swan montrent que, à condition de remplacer les sphères par des "sphères homotopiques", la question devient purement algébrique, et peut se traiter à peu près complètement.

De façon précise, considérons une suite exacte de G-modules :

$$(1) \quad 0 \to \mathbb{Z} \to P_{k-1} \to P_{k-2} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0 ,$$

où les P_i sont des modules projectifs de type fini sur l'algèbre $\mathbb{Z}[G]$ du groupe G. Une telle suite exacte sera appelée une résolution projective périodique de $\mathbb{Z}$, de période k. Si tous les P_i sont des modules libres, on dira que c'est une résolution libre.

THÉORÈME 1 (SWAN [8], théorème 4.1). - *Pour qu'il existe une résolution projective périodique de $\mathbb{Z}$, de période k, il faut et il suffit que la cohomologie de G soit périodique de période k.*

Soit d'autre part X un complexe cellulaire (au sens de J. H. C. WHITEHEAD [9]) sur lequel G opère. Nous dirons que G opère cellulairement si les éléments de G permutent les cellules de X.

THÉORÈME 2 (SWAN [8], proposition 3.1). – *Les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(1) *Il existe une résolution* libre *périodique de* $\mathbf{Z}$, *de période* k .

(2) *Il existe un complexe cellulaire fini* X , *de dimension* $k-1$, *ayant même type d'homotopie que* $\mathbf{S}_{k-1}$, *sur lequel* G *opère cellulairement, librement, et en conservant l'orientation.*

(Cette dernière hypothèse signifie que G opère trivialement sur $H_{k-1}(X, \mathbf{Z})$, qui est isomorphe à $\mathbf{Z}$.)

Le théorème suivant permet de passer des résolutions projectives aux résolutions libres :

THÉORÈME 3 (SWAN [8], corollaire 5.1). – *Supposons qu'il existe une résolution* projective *périodique de* $\mathbf{Z}$, *de période* k . *Il existe alors un entier* $d \geq 1$ *et une résolution* libre *périodique de* $\mathbf{Z}$, *de période* dk .

En combinant ces trois théorèmes, on obtient :

COROLLAIRE. – *Si la cohomologie de* G *est périodique de période* k , *il existe un complexe cellulaire fini* X , *de dimension* $dk-1$, *ayant même type d'homotopie que* $\mathbf{S}_{dk-1}$, *sur lequel* G *opère cellulairement, librement, et en conservant l'orientation.*

J'ignore s'il est possible de prendre $d = 1$ (c'est improbable). SWAN montre que l'on peut en tous cas prendre pour d le pgcd de $\varphi(n)$ et de n ; on peut même remplacer $\varphi(n)$ par $\varphi(m)$, où m est le ppcm des ordres des éléments de G .

2. *Résolutions projectives, équivalences, etc.*

Tous les G-modules considérés ci-après sont supposés *libres de type fini sur* $\mathbf{Z}$. Si P est un tel G-module, les propriétés suivantes sont équivalentes (cf. RIM [6]) :

a. P est faiblement injectif ([2], p. 197),

b. P est faiblement projectif (idem),

c. P est cohomologiquement trivial (on a $\hat{H}^q(G', P) = 0$ pour tout sous-groupe G' de G et tout $q \in \mathbf{Z}$) ,

d. P est $\mathbf{Z}[G]$-projectif.

Soient A et B deux G-modules et soit $f : A \to B$ une application G-linéaire. Nous dirons que f est <u>homotope à zéro</u>, s'il existe une application $\mathbb{Z}$-linéaire $g : A \to B$ telle que $f = Ng$, où N désigne la norme. Il revient au même de dire que, pour toute suite exacte $B' \to B \to 0$ de G-modules, il existe $f' : A \to B'$ remontant f (cf. ECKMANN [3]). Les <u>classes d'homotopie</u> d'applications de A dans B forment un groupe $\pi_0(A, B)$, qui s'identifie à $\hat{H}^0(G, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B))$. Une application f est appelée une <u>équivalence d'homotopie</u> si sa classe d'homotopie est inversible.

LEMME 1. - <u>Soit</u> $f : A \to B$ <u>une application</u> G-<u>linéaire</u> (A et B étant toujours supposés libres de type fini sur $\mathbb{Z}$). <u>Les trois propriétés suivantes sont équivalentes</u> :

(i) f <u>est une équivalence d'homotopie</u>.

(ii) <u>Il existe deux modules projectifs</u> P <u>et</u> Q <u>et un isomorphisme</u> $F : A \oplus P \to B \oplus Q$ <u>tels que le composé</u>

$$A \to A \oplus P \to B \oplus Q \to B$$

<u>soit égal à</u> f.

(iii) <u>Pour tout sous-groupe</u> G' <u>de</u> G <u>et tout</u> $q \in \mathbb{Z}$, <u>l'application de</u> $\hat{H}^q(G', A)$ <u>dans</u> $\hat{H}^q(G', B)$ <u>définie par</u> f <u>est un isomorphisme</u>.

Il est clair que (ii) entraîne (i). On voit facilement que (i) entraîne (iii). Montrons que (iii) entraîne (ii) :

Écrivons B comme quotient d'un module projectif P, et soit Q le noyau de l'homomorphisme surjectif $A \oplus P \to B$. En utilisant (iii), on voit que Q est cohomologiquement trivial, donc projectif. De plus, comme B est $\mathbb{Z}$-libre, Q est $\mathbb{Z}$-facteur direct dans $A \oplus P$; comme Q est faiblement injectif, il est "$(\mathbb{Z}[G], \mathbb{Z})$-injectif" au sens de HOCHSCHILD (cf. [4]), donc il est facteur direct dans $A \oplus P$ comme G-module, et $A \oplus P$ s'identifie à $B \oplus Q$,

C. Q. F. D.

EXEMPLE. - On a $\pi_0(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; les équivalences d'homotopie $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ forment un groupe isomorphe au groupe multiplicatif des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

On dira que deux G-modules A et B ont <u>même type d'homotopie</u> s'il existe une équivalence d'homotopie $f : A \to B$, et on écrira $A \sim B$. En particulier, $P \sim 0$ signifie que P est projectif. Comme l'ont remarqué ECKMANN et HILTON (cf. [3]), la situation est tout à fait analogue à celle que l'on rencontre en topologie ; le "décalage" correspond à la formation de "l'espace des lacets", et est unique à homotopie près. De façon précise :

LEMME 2. - Soient

(2) $$0 \to A \to P_{i-1} \to \cdots \to P_o \to B \to 0$$

(3) $$0 \to A' \to P'_{i-1} \to \cdots \to P'_o \to B' \to 0$$

deux suites exactes de G-modules, où les P_α et les P'_α sont projectifs. Ces suites exactes définissent un isomorphisme de $\pi_o(A, A')$ sur $\pi_o(B, B')$. En particulier, toute équivalence d'homotopie $f_B : B \to B'$ définit une équivalence d'homotopie $f_A : A \to A'$ déterminée à homotopie près.

La démonstration est immédiate.

(Deux homomorphismes f_A et f_B se correspondent si et seulement si l'on peut les prolonger en un homomorphisme de la suite exacte (2) dans la suite exacte (3)).

Le lemme 2 montre en particulier que, si $B = B'$, on a $A \sim A'$. Réciproquement :

LEMME 3. - Soit

(2) $$0 \to A \to P_{i-1} \xrightarrow{\partial} P_{i-2} \xrightarrow{\partial} \cdots \to P_o \to B \to 0$$

une suite exacte de G-modules, avec $i \geq 2$. Soit $A' \sim A$, et soient P et Q des projectifs tels que $A \oplus P = A' \oplus Q$. Il existe alors une suite exacte de la forme :

(3) $$0 \to A' \to P_{i-1} \oplus P \xrightarrow{\partial + r} P_{i-2} \oplus Q \xrightarrow{(\partial, 0)} P_{i-3} \to \cdots \to B \to 0,$$

qui coïncide avec (2) à partir de P_{i-3}.

Puisque B et les P_i sont $\underset{\sim}{Z}$-libres, A est facteur direct dans P_{i-1} comme $\underset{\sim}{Z}$-module, et il en est de même de $A \oplus P = A' \oplus Q$ dans $P_{i-1} \oplus P$. Utilisant le fait que Q est faiblement injectif, on en conclut qu'il existe une rétraction $r : P_{i-1} \oplus P \to Q$, qui est un G-homomorphisme, et qui s'annule sur A'. Il est clair que l'application

$$\partial + r : P_{i-1} \oplus P \to P_{i-2} \oplus Q$$

a pour noyau A', et pour image le noyau de $(\partial, 0)$. D'où la suite exacte (3).

3. Démonstration du théorème 1.

Si $\underset{\sim}{Z}$ possède une résolution projective périodique, de période k , l'opérateur cobord itéré $\delta^k : \hat{H}^q(G , \underset{\sim}{Z}) \to \hat{H}^{q+k}(G , \underset{\sim}{Z})$ est un isomorphisme. En particulier, prenant $q = 0$, on voit que $H^k(G , \underset{\sim}{Z}) = \underset{\sim}{Z}/n\underset{\sim}{Z}$, ce qui montre que la cohomologie de G est périodique de période k .

Réciproquement, supposons cette propriété vérifiée, et considérons une suite exacte

$$(4) \qquad 0 \to A \to P_{k-1} \to \cdots \to P_0 \to \underset{\sim}{Z} \to 0 ,$$

où les P_i sont projectifs (de type fini, comme toujours). Tenant compte de la périodicité de la cohomologie de G , on voit qu'il existe dans $\hat{H}^0(G , A)$ une classe v telle que $x \to v.x$ soit un isomorphisme de $\hat{H}(G , \underset{\sim}{Z})$ sur $\hat{H}(G , A)$; de plus, si G' est un sous-groupe de G , et si $v' \in \hat{H}^0(G' , A)$ est la restriction de v, la classe v' jouit de la même propriété. On peut alors représenter v par une G-application

$$f : \underset{\sim}{Z} \to A ,$$

et le lemme 1 montre que c'est une équivalence d'homotopie. D'après le lemme 3 (applicable car $k \geq 2$ si G n'est pas réduit à $\{1\}$), il existe une suite exacte

$$(5) \qquad 0 \to \underset{\sim}{Z} \to P'_{k-1} \to \cdots \to P'_0 \to \underset{\sim}{Z} \to 0$$

où les P'_i sont projectifs (et sont même égaux aux P_i pour $i < k - 2$) . On a donc bien construit une résolution projective périodique de $\underset{\sim}{Z}$, de période k .

4. Classes de modules projectifs.

Deux modules projectifs P et P' seront dits équivalents s'il existe deux modules libres L et L' tels que $P \oplus L$ soit isomorphe à $P' \oplus L'$. Les classes de modules projectifs (pour la relation d'équivalence précédente) forment un groupe abélien, que l'on notera $K_0(G)$; l'image dans $K_0(G)$ d'un module projectif P sera notée $[P]$. On a $[P] = 0$ si et seulement s'il existe un module libre L tel que $P \oplus L$ soit libre (on ignore si cette condition entraîne que P soit libre - c'est vrai si G est commutatif).

Soient maintenant A et B deux G-modules (vérifiant les conditions du numéro 2), et soit $f : A \to B$ une équivalence d'homotopie. D'après le lemme 1, il existe des modules projectifs P et Q , et un isomorphisme $F : A \oplus P \to B \oplus Q$ tel que $pr_1(F(a , 0)) = f(a)$.

LEMME 4. <u>L'élément</u> $[P]-[Q]$ <u>de</u> $K_o(G)$ <u>ne dépend que de</u> f.

Soient (P', Q', F') vérifiant les mêmes relations que ci-dessus. On va montrer que $P' \oplus Q$ est isomorphe à $P \oplus Q'$, ce qui établira le lemme. Soient $g : A \to Q$ et $g' : A \to Q'$ les applications définies par F et F'. On a la suite exacte :

$$0 \to A \xrightarrow{(f,g)} B \oplus Q \to P \to 0,$$

ainsi qu'une suite exacte analogue avec Q' et P'. Définissons alors un module R au moyen de la suite exacte :

$$0 \to A \xrightarrow{(f,g,g')} B \oplus Q \oplus Q' \to R \to 0 \qquad (7)$$

La suite exacte (7) s'envoie de façon naturelle sur la suite exacte (6), d'où la suite exacte :

$$0 \to Q' \to R \to P \to 0 \qquad (8)$$

Comme P est projectif, on en tire $R = P \oplus Q'$; de même, $R = P' \oplus Q$,

C. Q. F. D.

Nous noterons (f) l'élément $[P]-[Q]$. On vérifie tout de suite que $(fg) = (f) + (g)$, et que (f) ne dépend que de la classe d'homotopie de f.

LEMME 5. <u>Soit</u> $f : A \to B$ <u>une équivalence d'homotopie. Pour que</u> $(f) = 0$, <u>il faut et il suffit qu'il existe des modules libres</u> L <u>et</u> M <u>et un isomorphisme</u> $F : A \oplus L \to B \oplus M$ <u>tels que le composé</u>

$$A \to A \oplus L \to B \oplus M \to B$$

<u>soit égal à</u> f.

La condition est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. On choisit d'abord un isomorphisme $A \oplus P \to B \oplus Q$, compatible avec f, et où P et Q sont projectifs. Par hypothèse, il existe des modules libres L_1 et L_2 tels que $P \oplus L_1 = Q \oplus L_2$; d'autre part, il existe un module projectif P' et un module libre L_3 tels que $P \oplus P' = L_3$. On en déduit un isomorphisme

$$F : A \oplus P \oplus P' \oplus L_2 \to B \oplus Q \oplus P' \oplus L_2 .$$

Comme $P \oplus P' \oplus L_2 = L_3 \oplus L_2$ est libre, de même que $Q \oplus P' \oplus L_2 = P \oplus L_1 \oplus P' = L_1 \oplus L_3$, le lemme est démontré.

Deux modules A et B tels qu'il existe une application f vérifiant les conditions du lemme 5 seront dits strictement équivalents, et on écrira $A \sim_L B$.

LEMME 6. - Considérons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A' & \to & A & \to & A'' & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & & \\ 0 & \to & B' & \to & B & \to & B'' & \to & 0 , \end{array} \tag{9}$$

où les lignes sont exactes, et où f , f' , f'' sont des équivalences d'homotopie. On a alors $(f) = (f') + (f'')$.

Quitte à ajouter à A , A' et A'' des modules libres (ce qui ne modifie pas (f') , (f) , (f'')) , on peut supposer que f , f' , f'' sont surjectifs. Soient Q' , Q , Q'' leurs noyaux. Ils sont projectifs, et forment une suite exacte :

$$0 \to Q' \to Q \to Q'' \to 0 \quad .$$

On a donc $[Q] = [Q'] + [Q'']$. Comme $(f) = -[Q]$, $(f') = -[Q']$, $(f'') = -[Q'']$, on a bien $(f) = (f') + (f'')$.

En itérant, on en déduit :

LEMME 7. - Considérons un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & A_n & \to & A_{n-1} & \to & \cdots & \to & A_o & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle f_o} & & \\ 0 & \to & B_n & \to & B_{n-1} & \to & \cdots & \to & B_o & \to & 0 \end{array} \tag{10}$$

où les lignes sont exactes, et où les f_i sont des équivalences d'homotopie. On a alors $\sum (-1)^i (f_i) = 0$.

COROLLAIRE. - Soient :

$$0 \to A_n \to L_{n-1} \to \cdots \to L_o \to A_o \to 0 \tag{11}$$

$$0 \to B_n \to M_{n-1} \to \cdots \to M_o \to B_o \to 0 \tag{12}$$

deux suites exactes, où les L_i et les M_i sont libres. Si A_o est strictement équivalent à B_o , alors A_n est strictement équivalent à B_n (et réciproquement).

Soit $f_o : A_o \to B_o$ une équivalence d'homotopie telle que $(f_o) = 0$. On peut trouver des $g_i : L_i \to M_i$ et $f_n : A_n \to B_n$ définissant un homomorphisme de (11) dans (12). On a $(g_i) = 0$, et le lemme 7 donne $(f_n) = (-1)^{n+1} (f_o)$, d'où le corollaire.

REMARQUE. - Le corollaire ci-dessus peut aussi se démontrer, comme le fait SWAN, à partir du "théorème de Schanuel" , dont voici l'énoncé : si $P/R = P'/R'$, avec P , P' projectifs, on a $R \oplus P' = R' \oplus P$.

5. Démonstration du théorème 2.

Supposons d'abord que G opère cellulairement, librement, et en conservant l'orientation, sur un complexe cellulaire fini X ayant même homologie que $\underset{\sim}{S}_{k-1}$ (il n'est pas nécessaire de supposer X simplement connexe, ni de dimension $k - 1$). Supposons $G \neq \{1\}$ (ce qui n'est guère une restriction !). La formule des points fixes montre alors que k est pair.

Soit $N = \dim X$; pour $0 \leq i \leq N$, soit C_i le groupe des chaînes de dimension i de X (au sens cellulaire), et soit $Z_i \subset C_i$ le sous-groupe des cycles. Ces groupes sont des G-modules, et, puisque G opère librement sur X , les C_i sont des G-modules libres. On a les deux suites exactes :

(13) $$0 \to C_N \to C_{N-1} \to \cdots \to C_k \to Z_{k-1} \to \underset{\sim}{Z} \to 0$$

(14) $$0 \to Z_{k-1} \to C_{k-1} \to \cdots \to C_o \to \underset{\sim}{Z} \to 0 \qquad .$$

Si $B_{k-1} \subset Z_{k-1}$ désigne le groupe des bords de dimension $k - 1$, la suite exacte (13) se décompose en les deux suites exactes :

(15) $$0 \to C_N \to C_{N-1} \to \cdots \to C_k \to B_{k-1} \to 0$$

(16) $$0 \to B_{k-1} \to Z_{k-1} \xrightarrow{h} \underset{\sim}{Z} \to 0 \qquad .$$

La suite (15) montre que B_{k-1} est projectif, et que $[B_{k-1}] = 0$ dans $K_o(G)$. En utilisant (16), on voit alors que h est une équivalence d'homotopie et que $(h) = 0$. Donc $Z_{k-1} \sim_L \underset{\sim}{Z}$. En appliquant le lemme 3 à (14) on obtient une nouvelle suite exacte :

(17) $$0 \to \underset{\sim}{Z} \to C'_{k-1} \to \cdots \to C'_o \to \underset{\sim}{Z} \to 0 ,$$

où les C'_i sont libres (et en fait égaux aux C_i si $i < k - 2$) . C'est la résolution libre périodique cherchée.

Réciproquement, supposons qu'il existe une telle résolution. Si G est cyclique, on sait qu'il peut opérer librement sur les sphères de dimension impaire. Supposons donc G non cyclique, ce qui entraîne que k est pair ([2], p. 261), et ≥ 4 (si $k = 2$, le groupe $H^2(G , \underset{\sim}{Z})$ est isomorphe à $\underset{\sim}{Z}/n\underset{\sim}{Z}$, et comme ce groupe est dual de G/G' , G est lui-même cyclique). On construit d'abord un complexe cellulaire fini, de dimension 2, qui soit connexe, et de groupe fondamental G ; soit Y_2 un tel complexe, et soit X_2 son revêtement universel. On a la suite exacte de G-modules :

$$(18) \qquad C_2(X_2) \xrightarrow{\partial} C_1(X_2) \xrightarrow{\partial} C_o(X_2) \to \underset{\sim}{Z} \to 0 .$$

Or, on a le lemme suivant :

LEMME 8. - Il existe une résolution libre périodique de $\underset{\sim}{Z}$

$$(19) \qquad 0 \to \underset{\sim}{Z} \to L_{k-1} \to \dots \to L_o \to \underset{\sim}{Z} \to 0$$

qui coïncide avec (18) en dimensions $\leqslant 1$, et qui est telle que $L_2 = C_2(X_2) \oplus M$, avec M libre, l'application $C_2 \oplus M \to C_1$ étant $(\partial , 0)$.

On commence par prolonger (18) par des modules libres L'_i $(i \leqslant k - 1)$, et soit A le noyau de $L'_{k-1} \to L'_{k-2}$. Puisque $\underset{\sim}{Z}$ a une résolution libre de période k , le corollaire au lemme 7 montre que A est strictement équivalent à $\underset{\sim}{Z}$; on applique alors le procédé du lemme 3 , pour "remplacer" A par $\underset{\sim}{Z}$; on obtient ainsi (19).

(Noter qu'il n'est nécessaire d'introduire le module M que si $k = 4$.) .

Quitte à adjoindre à X_2 des sphères (attachées chacune par un point), on peut supposer que $M = 0$. Le noyau de $C_2(X_2) \to C_1(X_2)$ s'identifie à $H_2(X_2) = \pi_2(X_2)$; soit (a_α) une $\underset{\sim}{Z}[G]$-base de L_3 , et soient b_α leurs images dans $\pi_2(X_2)$ par $L_3 \to L_2 = C_2(X_2)$; pour chaque α , soit $f_\alpha : \underset{\sim}{S}_2 \to X_2$ une application continue de la classe b_α . Attachons à X_2 des cellules $e_{\alpha,\sigma}$ de dimension 3 au moyen des $\sigma \circ f_\alpha$; le groupe G opère de façon naturelle sur le complexe cellulaire X_3 ainsi obtenu, et l'on a $C_i(X_3) = L_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant 3$. On définit de même $X_4 , \dots , X_{k-1}$ et il est clair que X_{k-1} répond à la question.

REMARQUE. - On peut s'arranger pour que les X_i soient des complexes simpliciaux sur lesquels G opère simplicialement ; cela se démontre par récurrence sur i , en choisissant des applications f_α simpliciales, et en utilisant un résultat de J. H. C. WHITEHEAD ([9], lemme 2, p. 239).

6. Démonstration du théorème 3.

Soit r un entier premier à n . L'homotopie $r : \underset{\sim}{Z} \to \underset{\sim}{Z}$ est une équivalence d'homotopie, et définit donc un élément (r) de $K_0(G)$. On obtient ainsi un homomorphisme $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \to K_0(G)$ dont l'image sera notée $D(G)$.

[Définition explicite de (r) : c'est la classe dans $K_0(G)$ de l'idéal de $\mathbb{Z}[G]$ engendré par r et N, cf. SWAN [8], paragraphe 6.]

Soit maintenant P une résolution projective périodique de $\mathbb{Z}$, de période k :

$$0 \to \mathbb{Z} \to P_{k-1} \to \dots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0 \quad .$$

On posera :

$$\chi(P) = \sum_{i=0}^{i=k-1} (-1)^i [P_i] \qquad \text{dans } K_0(G) .$$

Soit P' une autre résolution projective périodique de $\mathbb{Z}$, de période k. Il existe un homomorphisme de P dans P' qui est l'identité sur le groupe $\mathbb{Z}$ "de droite" ; sur le groupe de gauche, c'est la multiplication par un entier r, premier à n, et bien déterminé modulo n (cf. lemme 2, par exemple). On notera $d(P, P')$ la classe de r dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Ces notations étant introduites, on a :

LEMME 9. $\chi(P) - \chi(P') = (-1)^k (d(P, P'))$.

On applique le lemme 7 à l'homomorphisme de P dans P' construit ci-dessus ; si l'on appelle f_i l'homomorphisme de P_i dans P'_i, le lemme 7 montre que l'on a :

$$\sum (-1)^i (f_i) + (-1)^k (r) = 0 \quad .$$

Mais on voit facilement que $(f_i) = [P'_i] - [P_i]$, d'où aussitôt le lemme.

COROLLAIRE. - _L'image de_ $\chi(P)$ _dans_ $K_0(G)/D(G)$ _est indépendante de la résolution_ P.

On la notera c_k pour indiquer sa dépendance de l'entier k.

LEMME 10. - _Pour tout entier_ $d \geq 1$, _on a_ $c_{dk} = dc_k$.

Si l'on met bout à bout d résolutions de période k, on obtient une résolution de période dk ; d'où le lemme.

LEMME 11. - _Pour qu'il existe une résolution_ libre _périodique de_ $\mathbb{Z}$, _de période_ k, _il faut et il suffit que_ $c_k = 0$.

C'est évidemment nécessaire. Réciproquement, supposons que c_k soit nul. On peut évidemment construire une suite exacte :

$$0 \to A \to L_{k-1} \to \dots \to L_0 \to \underset{\sim}{Z} \to 0 , \tag{20}$$

où les L_i sont libres.

Soit

$$0 \to \underset{\sim}{Z} \to P_{k-1} \to \dots \to P_0 \to \underset{\sim}{Z} \to 0 \tag{21}$$

une résolution projective périodique de $\underset{\sim}{Z}$. Par hypothèse, $\chi(P) \in D(G)$. On peut construire un homomorphisme de (20) dans (21) qui soit égal à l'homothétie de rapport r donné (avec $(r , n) = 1$) sur les groupes $\underset{\sim}{Z}$ de droite. Soit h l'homomorphisme de A dans $\underset{\sim}{Z}$ induit par cet homomorphisme. En appliquant le lemme 7 on obtient la formule :

$$(-1)^k(h) + \chi(P) - (r) = 0 \quad .$$

On peut donc choisir r de telle sorte que $(h) = 0$, d'où $A \sim_L \underset{\sim}{Z}$, et le lemme 3 permet de remplacer la suite exacte (20) par une résolution libre périodique de $\underset{\sim}{Z}$, de période k.

LEMME 12 (SWAN [7], proposition 9.1). - <u>Le groupe</u> $K_0(G)$ <u>est un groupe fini.</u>

D'après un résultat de SWAN ([7], théorème A - voir aussi une note aux Comptes-Rendus de GIORGIUTTI, et un article à paraître de H. BASS), tout élément de $K_0(G)$ est de la forme $[I]$, où $[I]$ est un idéal de $\underset{\sim}{Z}[G]$. Le lemme résulte alors de la "finitude du nombre de classes d'idéaux", c'est-à-dire du théorème de Jordan-Zassenhaus.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3 : puisque $K_0(G)$ est fini, il existe un entier $d \geq 1$, tel que $dc_k = 0$. En appliquant les lemmes 10 et 11, on en déduit qu'il existe une résolution libre périodique de $\underset{\sim}{Z}$, de période dk,

C. Q. F. D.

7. Compléments.

a. <u>Evaluation de l'entier</u> d. - On montre facilement que, si H est un groupe cyclique, on a $D(H) = 0$, et $\chi(P)$ est indépendant de P, donc nul, vu le lemme 11. Il en résulte que, si G est maintenant un groupe quelconque, et si P est une résolution projective périodique de $\underset{\sim}{Z}$ de période k, l'image de $\chi(P)$ dans les groupes $K_0(H)$ est nulle si H est cyclique. Un raisonnement à la ARTIN (cf. SWAN

[7], corollaire 9.3) montre alors que $n\chi(P) = 0$, et l'on peut donc prendre pour d l'entier n .

Pour obtenir $d = (\varphi(n), n)$, il faut utiliser, à la place des sous-groupes cycliques, les sous-groupes élémentaires (produits d'un p-groupe par un groupe cyclique d'ordre premier à p) . C'est nettement plus délicat (cf. Swan [8], numéros 8, 9, 10).

b. $\mathcal{C}$-théorie. - On se donne une famille $\mathcal{P}$ de nombres premiers, et l'on "néglige" les groupes finis dont l'ordre n'est divisible par aucun nombre premier $p \in \mathcal{P}$. L'anneau $\mathbb{Z}$ est remplacé par l'anneau des fractions a/b , avec $(b, p) = 1$ pour tout $p \in \mathcal{P}$. Il y a très peu de changements à faire dans les démonstrations.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Homologie des groupes, théorie des faisceaux, Séminaire Cartan, t. 3, 1950/51. - Paris, Secrétariat mathématique, 1955.

[2] CARTAN (Henri) and EILENBERG (Samuel). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[3] ECKMANN (Beno). - Homotopie et dualité, Colloque de Topologie algébrique [1956. Louvain], p. 41-53. - Liège, Georges Thone ; Paris, Masson, 1957 (Centre belge de Recherches mathématiques).

[4] HOCHSCHILD (G.). - Relative homological algebra, Trans. Amer. math. Soc., t. 82, 1956, p. 246-269.

[5] MILNOR (John). - Groups which act on S_n without fixed points, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 623-630.

[6] RIM (D. S.). - Modules over finite groups, Annals of Math., Series 2, t. 69, 1959, p. 700-712.

[7] SWAN (Richard G.). - Induced representations and projective modules, Annals of Math., Series 2, t. 71, 1960, p. 552-578.

[8] SWAN (Richard G.). - Periodic resolutions for finite groups, Annals of Math., Series 2, t. 72, 1960, p. 267-291.

[9] WHITEHEAD (J. H. C.). - Combinatorial homotopy, I., Bull. Amer. math. Soc., t. 55, 1949, p. 213-245.