GIUSEPPE VECCHIO

Su certi interi associati a un ideale e le molteplicità d'intersezione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 37 (1967), p. 75-90

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__75_0>

SU CERTI INTERI ASSOCIATI A UN IDEALE E LE MOLTEPLICITÀ D'INTERSEZIONE

di Giuseppe Vecchio (*a Genova*) *)

In questo lavoro riprendo lo studio, iniziato in [4] e [5], di alcune proprietà di certi interi associati a un ideale di nu anello noetheriano, con lo scopo di mostrare come, sotto opportune ipotesi, essi abbiano significato di molteplicità d'intersezione.

Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di un anello noetheriano A; per ogni elemento x di $\sqrt{\mathfrak{a}}$ si consideri il numero intero $\varrho_x(\mathfrak{a}) = \min\{r \in N \mid x^r \in \mathfrak{a}\}$ e si ponga $\varrho(\mathfrak{a}) = \max\{\varrho_x(\mathfrak{a})\}$.

In [4] ho studiato certe proprietà degli interi $\varrho_x(\mathfrak{a})$ e $\varrho(\mathfrak{a})$ nelle ipotesi di un ideale $\mathfrak{a}$ di classe principale in un anello di Macaulay ed ho indicato, fra l'altro, una condizione sufficiente per x affinchè risulti $\varrho_x(\mathfrak{a}) = \varrho(\mathfrak{a})$ ([4], teor. 2).

Siano inoltre $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ i primi associati ad $\mathfrak{a}$. Ho considerato, sempre in [4], l'insieme delle n-ple $(x_1, \ldots, x_n)$ tali che $x_i \in \mathfrak{p}_i$ e soddisfacenti a a certe ulteriori condizioni; per ciascuna n-pla $(x_1, \ldots, x_n)$ del tipo suddetto ho dimostrato che tra tutte le n-ple $(r_1, \ldots, r_n)$ di interi naturali tali che $x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n} \in \mathfrak{a}$ ne esiste una minima $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ (per la quale, cioè, si abbia $\varrho_i \leqslant r_i$ per ogni i) che non dipende da $x_1, \ldots, x_n$, ma solo da $\mathfrak{a}$ ed ho dato una caratterizzazione di tale n-pla ([4], teor. 3,4). In [5] ho precisato ulteriormente questo risultato, dimostrando che se $\mathfrak{q}_i$ è la componente $\mathfrak{p}_i$-primaria di $\mathfrak{a}$, si ha $\varrho_i = \varrho(\mathfrak{q}_i)$ ([5], teor. 2) [1]).

---

*) **Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.**

Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Università di Genova.

[1]) **In [5] l'intero $\varrho(\mathfrak{q}_i)$ è denotato con s_i ed è introdotto nel modo equivalente: $s_i = \min\{\sigma_i \in N \mid$ per ogni $z \in \mathfrak{p}_i$ risulti $z^{\sigma_i} \in \mathfrak{q}_i\}$.**

In [5] trovasi altresì dimostrato il seguente fatto: se $\mathfrak{a}$ è un ideale privo di componenti immerse di un anello A noetheriano, $(\varrho(\mathfrak{q}_1), \ldots, \varrho(\mathfrak{q}_n))$ è sempre la minima tra le n-ple $(r_1, \ldots, r_n)$ tali che $x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n} \in \mathfrak{a}$ per ogni scelta degli elementi $x_i \in \mathfrak{p}_i$ ([5], ter. 1).

Lo scopo essenziale del presente lavoro è di mostrare che, sotto certe ipotesi, l'intero ϱ_i coincide con la lunghezza $\lambda(\mathfrak{q}_i)$ di $\mathfrak{q}_i$ ed anche con la molteplicità e $(\mathfrak{q}_i)$ di $\mathfrak{q}_i$ (cfr. teor. 1, 2, 3); e quindi se A è un anello di polinomi, ϱ_i esprime, sotto ipotesi opportune, la molteplicità d'intersezione di certe varietà algebriche lungo una componente della loro intersezione.

Precisamente, nel caso in cui A sia l'anello dei polinomi in un numero finito di indeterminate sopra un campo algebricamente chiuso, pervenno ai seguenti risultati: sia $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + (f)$ con $\mathfrak{b}$ ideale di una varietà irriducibile U, completa intersezione ed (f) l'ideale di un'ipersuperficie F non contenente U. Siano M una componente di $U \cap F$ semplice per U e G una ipersuperficie di ideale (g) che incontri U semplicemente in M. Allora, se $\mathfrak{q}$ è la componente primaria di $\mathfrak{a}$ relativa a M, $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho_g(\mathfrak{q}) = i(U \cdot F, M)$, dove $i(U \cdot F, M)$ è la molteplicità di intersezione di U, F in M, nel senso di C. Chevalley, P. Samuel, A. Weil (cfr. teor. 4). Siano poi $M_1, \ldots, M_n$ le componenti di $U \cap F$, $G_j (l \leqslant j \leqslant n)$ un'ipersuperficie di ideale (g_j) passante per M_j ma non passante per M_s con $s \neq j$ e $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ la n-pla minima tale che $g_1^{\varrho_1} \ldots g_n^{\varrho_n} \in \mathfrak{a}$; allora, se per un indice j G_j incontra U semplicemente in M_j, si ha $\varrho_j = i(U \cdot F, M_j)$ (cor. al teor. 4).

Più in generale, se $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ con $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ideali di due varietà irriducibili U, V, ciascuna completa intersezione e se $\mathfrak{q}$ è la componente primaria di $\mathfrak{a}$ corrispondente ad una componente propria M di $U \cap V$, sotto opportune ipotesi, $\varrho(\mathfrak{q}) = i(U \cdot V, M)$ (cfr. teor. 5). Se, poi, $M_1, \ldots, M_n$ sono le componenti di $U \cap V$, $G_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ un'ipersuperficie di ideale (g_j) passante per M_j ma non per M_s, con $s \neq j$, e $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ è la n-pla minima tale che $g_1^{\varrho_1} \ldots g_n^{\varrho_n} \in \mathfrak{a}$, per ogni indice j per cui sono soddisfatte certe ipotesi, si ha $\varrho_j = i(U \cdot V, M_j)$ (cor. al teor. 5).

Il presente lavoro contiene, inoltre, qualche altro complemento alle Note mensionate [4], [5]. L'asserzione *a*) del teorema 3 del n. 4 generalizzata, infatti, il teorema 2 di [5], in quanto ne indebolisce sensibilmente le ipotesi.

Infine, il n. 6 contiene una caratterizzazione degli ideali di classe principale in un anello di polinomi, per i quali la n-pla $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ è costituita da interi tutti eguali ad 1. Tale caratterizzazione è un corollario di alcune proposizioni che seguono facilmente da risultati ben noti, per lo più dovuti a O. ZARISKI, relativi alla nozione di zero semplice di un ideale.

1. Per comodità del lettore richiamiamo in questo numero alcune nozioni ben note assieme a qualche proprietà che discende facilmente da esse.

Con A denoteremo sempre un anello commutativo con identità noetheriano.

(I) *Localizzazione.* – Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di A e sia $\mathfrak{n}$ l'ideale degli elementi di A tali che se $a \in \mathfrak{n}$ esiste un elemento $t \notin \mathfrak{p}$ per cui $at = 0$. L'immagine di $A - \mathfrak{p}$ nell'omorfismo canonico $\nu : A \to A/\mathfrak{n}$ è un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso e privo di divisori dello zero; si può allora considerare l'anello $A_{\mathfrak{p}}$ dei quozienti di $A/\mathfrak{n}$ rispetto a $\nu(A - \mathfrak{p})$, cioè l'anello degli elementi del tipo $\dfrac{\xi}{\tau}$ con $\xi \in A/\mathfrak{n}$, $\tau \in \nu(A - \mathfrak{p})$. $A/\mathfrak{n}$ si immerge canonicamente in $A_{\mathfrak{p}}$ e la composizione di ν con quest'immersione definisce un omomorfismo canonico $\varphi : A \to A_{\mathfrak{p}}$ il cui nucleo è $\mathfrak{n}$. Se $t \notin \mathfrak{p}$ l'elemento $\varphi(t)$ è invertibile in $A_{\mathfrak{p}}$ ed ogni elemento di $A_{\mathfrak{p}}$ si può scrivere nella forma $\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(t)}$ con $x \in A$, $t \notin \mathfrak{p}$. Se $\mathfrak{a}$ è un ideale di A, con $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}$ si denota l'ideale generato da $\varphi(\mathfrak{a})$ in $A_{\mathfrak{p}}$; $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}$ risulta distinto da $A_{\mathfrak{p}}$ se e solo se $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. L'ideale $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ è l'unico ideale massimale di $A_{\mathfrak{p}}$ ed $A_{\mathfrak{p}}$ si dice il *localizzato di A in $\mathfrak{p}$*.

La corrispondenza $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}$ è biunivoca tra l'insieme degli ideali primi (primari) di A contenuti in $\mathfrak{p}$ è l'insieme degli ideali primi (primari) di $A_{\mathfrak{p}}$. Inoltre, se $\mathfrak{P}$ è un primo contenuto in $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{Q}$ è un ideale $\mathfrak{P}$-primario, l'ideale $\mathfrak{Q}A_{\mathfrak{p}}$ è $\mathfrak{P}A_{\mathfrak{p}}$-primario (cfr. [8], vol. I, cap. IV §§ 9-11).

LEMMA 1: *Siano $\mathfrak{b}$ un ideale ed x un elemento di A tali che $\mathfrak{b} : x = \mathfrak{b}$. Allora, per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ contenente $\mathfrak{b} + (x)$, si ha $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}} : xA_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$.*

Basta ovviamente provare che se $\eta \in A_{\mathfrak{p}}$ è tale che $\eta\varphi(x) = \beta \in \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$ allora $\eta \in \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$. Gli elementi η, β si possono scrivere nella forma $\eta = \dfrac{\varphi(y)}{\varphi(s)}$, $\beta = \dfrac{\varphi(b)}{\varphi(t)}$ con $y \in A$, $b \in \mathfrak{b}$, s, $t \notin \mathfrak{p}$ e quindi si ha $\varphi(xyt - bs) = 0$. Esiste perciò un elemento $z \notin \mathfrak{p}$ tale che $(xyt - bs)z = 0$ e quindi si ha $xytz \in \mathfrak{b}$. Essendo, per ipotesi, $\mathfrak{b} : x = \mathfrak{b}$, deve essere $ytz = c \in \mathfrak{b}$. Ne segue perciò $\eta = \dfrac{\varphi(y)}{\varphi(s)} = \dfrac{\varphi(c)}{\varphi(stz)} \in \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$, come volevasi.

LEMMA 2: *Siano $\mathfrak{p}$ un ideale primo di A e $\mathfrak{q}$ un ideale $\mathfrak{p}$-primario.*

Allora se $\bar{x}$ *è l'immagine di* x *nell'omomorfismo canonico* $\varphi : A \to A_{\mathfrak{p}}$ *ed* r *è un intero positivo, si ha* $\bar{x}^r \in \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$ *se e solo se* $x^r \in \mathfrak{q}$.

È chiaro che se $x^r \in \mathfrak{q}$ si ha $\bar{x}^r \in \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$. Viceversa, supponiamo che sia $\bar{x}^r \in \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$; allora si può scrivere $\bar{x}^r = \dfrac{\varphi(y)}{\varphi(t)}$ con $y \in \mathfrak{q}$, $t \notin \mathfrak{p}$ e quindi si ha $\varphi(x^r t - y) = 0$. Esiste perciò un elemento $t' \notin \mathfrak{p}$ tale che $(x^r t - y)t' = 0$ e quindi $x^r tt' \in \mathfrak{q}$. Ed allora, essendo $tt' \notin \mathfrak{p}$, deve essere $x^r \in \mathfrak{q}$.

(II) *Lunghezza di un ideale primario.* Sia $\mathfrak{q}$ un ideale primario di A e sia $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. Si dice lunghezza di $\mathfrak{q}$, e si denota con $\lambda(\mathfrak{q})$, il numero di termini di una serie di composizione di ideali $\mathfrak{p}$-primari congiungente $\mathfrak{p}$ con $\mathfrak{q}$, cioè una serie

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 \supset \mathfrak{q}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{q}_r = \mathfrak{q}$$

tale che $\mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{q}_{i+1} (1 \leqslant i < r)$ e tale che non esistano ideali propriamente compresi tra $\mathfrak{q}_i$ e $\mathfrak{q}_{i+1}$. L'esistenza d'una serie siffatta è garantita dalla noetherianità di A.

In virtù della corrispondenza biunivoca tra l'insieme degli ideali primari di A contenuti in $\mathfrak{p}$ e l'insieme degli ideali primari di $A_{\mathfrak{p}}$, si ha $\lambda(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$ (cfr. [2], cap. III, n. 3.3).

(III) *Altezza di un ideale.* – Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo di A. Si dice che $\mathfrak{p}$ ha altezza h se esiste almeno una catena $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_h = \mathfrak{p}$ di ideali primi distinti e se non esistono di siffatte catene con più di h termini.

Se $\mathfrak{a}$ è un ideale di A, si dice altezza di $\mathfrak{a}$ la minima delle altezze dei primi associati ad $\mathfrak{a}$.

Se $\mathfrak{a}$ è generato da r elementi, ogni primo isolato di $\mathfrak{a}$ ha altezza $\leqslant r$ ([8], vol. I, cap. IV, § 14).

(IV) *Molteplicità di un ideale primario.* – Sia A un anello locale di ideale massimale $\mathfrak{m}$ e sia $\mathfrak{q}$ un ideale $\mathfrak{m}$-primario di A. La lunghezza $\lambda(\mathfrak{q}^n)$ di $\mathfrak{q}^n$ è, per n grande, un polinomio $P_{\mathfrak{q}}(n)$ in n a coefficienti razionali. Se d è il grado del polinomio $P_{\mathfrak{q}}(n)$, il coefficiente del termine di grado massimo è della forma $\dfrac{e(\mathfrak{q})}{d!}$, con $e(\mathfrak{q})$ intero > 0. L'intero $e(\mathfrak{q})$ si dice la *molteplicità* di $\mathfrak{q}$.

Sia ora A un anello noetheriano qualsiasi e siano $\mathfrak{q}$ un ideale primario di A e $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. Chiameremo molteplicità di $\mathfrak{q}$, e la denoteremo ancora con $e(\mathfrak{q})$, la molteplicità di $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$ (cfr. [8], vol. II, cap. VII, § 12 e cap. VIII, § 8).

(V) *Alcune proprietà degli anelli locali.* – Sia A un anello locale di ideale massimale $\mathfrak{m}$ e siano $\sigma : A \to A/\mathfrak{m}$, $\tau : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ gli omomorfismi canonici; se per ogni $\alpha \in A/\mathfrak{m}$, $\xi \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ si definisce il prodotto $\alpha\xi$ ponendo $\alpha\xi = \tau(ax)$, dove a, x sono tali che $\sigma a = \alpha$, $\tau x = \xi$, $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ risulta uno spazio vettoriale sopra $A/\mathfrak{m}$.

(*i*) *Gli elementi* $x_1, ..., x_d$ *costituiscono una base di* $\mathfrak{m}$ (cioè un sistema minimale di generatori di $\mathfrak{m}$) *se e solo se* $\tau x_1, ..., \tau x_d$ *costituiscono una base per lo spazio vettoriale* $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ([2], cap. IV, n. 4.5, prop. 6).

La dimensione di un anello locale A è, per definizione, l'altezza del suo ideale massimale $\mathfrak{m}$. Dunque, se $x_1, ..., x_d$ costituiscono una base di $\mathfrak{m}$ e se denotiamo con $\dim A$ la dimensione di A e con $\dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ la dimensione sopra $A/\mathfrak{m}$ dello spazio vettoriale $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, si ha $\dim A \leqslant \dim(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. Se vale l'eguaglianza, A si dice *regolare.*

Sia A di dimensione d; si dice che gli elementi $a_1, ..., a_d$ costituiscono un *sistema di parametri* di A se l'ideale $(a_1, ..., a_d)$ è $\mathfrak{m}$-primario. Se A è regolare, ogni base di $\mathfrak{m}$ si dice un *sistema regolare* di parametri.

(*ii*) *Sia A un anello locale regolare e sia $x_1, ..., x_d$ un sistema regolare di parametri di A. Allora, l'ideale $(x_1, ..., x_i)$ è primo per ogni $i(1 \leqslant i \leqslant d)$* ([2], cap. IV, n. 4.6, teor. 6).

(VI) *Anelli di Macaulay.* – Si dice che un anello noetheriano A è un *anello di Macaulay* se vale in esso la proprietà: ogni ideale di A generato da h elementi ed avente altezza h è puro (cioè tutti i primi associati ad $\mathfrak{a}$ hanno la stessa altezza e di conseguenza sono isolati).

1) *Un anello locale regolare è di Macaulay* (cfr. [8], vol. II, app. 6, pag. 297 es. (1)).

2) *Un anello locale A è di Macaulay se e solo se per ogni ideale $\mathfrak{q}$, generato da un sistema di parametri, si ha $e(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q})$* (cfr. [8], vol. II, app. 6, teor. 3).

2. Sia sempre A un anello commutativo con identità noetheriano. Sia $\mathfrak{a}$ un ideale di A; per ogni $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ si consideri il numero intero $\varrho_x(\mathfrak{a})$ così definito:

$$\varrho_x(\mathfrak{a}) = \min \{r \in \boldsymbol{N} \mid x^r \in \mathfrak{a}\} .$$

Essendo A noetheriano esiste un intero m tale che $(\sqrt{\mathfrak{a}})^m \subset \mathfrak{a}$ e dunque si ha $\varrho_x(\mathfrak{a}) \leqslant m$. Esiste, pertanto, finito il $\max_{x \in \sqrt{\mathfrak{a}}} \{\varrho_x(\mathfrak{a})\}$. Porremo, sempre, nel seguito

$$\varrho(\mathfrak{a}) = \max_{x \in \sqrt{\mathfrak{a}}} \{\varrho_x(\mathfrak{a})\} .$$

Se A è un anello di Macaulay ed $\mathfrak{a}$ è un ideale di classe principale, in [4] abbiamo dato una condizione sufficiente perchè risulti $\varrho_x(\mathfrak{a}) = \varrho(\mathfrak{a})$ (cfr. [4] teor. 2).

Ci occorre per il seguito dare una condizione analoga nel caso in cui A sia un anello noetheriano ed $\mathfrak{a}$ un ideale primario o, più generalmente, una componente primaria di un dato ideale.

Cominciamo col dimostrare la seguente

Proposizione 1: *Siano $\mathfrak{q}$ un ideale primario di A e $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. Siano $\mathfrak{b}$ un ideale di A contenuto in $\mathfrak{q}$ ed x un elemento di A tali che $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} + (x)$. Si ha allora: $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q})$.*

Per definizione, esiste un elemento $y \in \mathfrak{p}$ tale che $y^{\varrho(\mathfrak{q})-1} \notin \mathfrak{q}$; d'altra parte, si può scrivere

$$y = b + ax\,, \qquad b \in \mathfrak{b}\,, \qquad a \in A\,,$$

da cui risulta $y^{\varrho_x(\mathfrak{q})} \in \mathfrak{q}$. Dunque $\varrho_x(\mathfrak{q}) \geqslant \varrho(\mathfrak{q})$ e, perciò, $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q})$.

Proposizione 2: *Sia $\mathfrak{q}$ un ideale primario di A e sia $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. Si ha allora: $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$.*

Per brevità, poniamo $\varrho = \varrho(\mathfrak{q})$, $\varrho' = \varrho(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$; per definizione esiste un elemento $\xi \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ tale che $\xi^{\varrho'-1} \notin \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$; l'elemento ξ si può scrivere nella forma $\xi = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(t)}$ con $x \in \mathfrak{p}$, $t \notin \mathfrak{p}$, e risulta ovviamente $x^{\varrho'-1} \notin \mathfrak{q}$. Quindi deve essere $\varrho \geqslant \varrho'$. D'altra parte, per definizione, esiste un elemento $y \in \mathfrak{p}$ tale che $y^{\varrho-1} \notin \mathfrak{q}$; se $\overline{y}$ è l'immagine di y nell'omomorfismo canonico $A \to A_{\mathfrak{p}}$, per il lemma 2, risulta $\overline{y}^{\varrho-1} \notin \mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$ e quindi $\varrho' \geqslant \varrho$. Dunque $\varrho = \varrho'$.

Proposizione 3: *Siano $\mathfrak{b}$ un ideale di A, y un elemento di A, $\mathfrak{q}$ una componente primaria dell'ideale $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + (y)$ e $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. Allora, se x è un elemento di $\mathfrak{p}$ tale che l'ideale $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} + (x)$ abbia $\mathfrak{p}$ come componente primaria isolata, si ha: $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q})$.*

Localizzando in $\mathfrak{p}$ si ha $\mathfrak{c}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}} + xA_{\mathfrak{p}}$ ed inoltre $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}$ è $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$-primario e contiene $\mathfrak{b}A_{\mathfrak{p}}$. Ed allora, se $\overline{x}$ è l'immagine di x nell'omomorfismo canonico $A \to A_{\mathfrak{p}}$, per la proposizione 1 si ha $\varrho_{\overline{x}}(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}) = \varrho(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$. Per il lemma 2 si ha poi $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho_{\overline{x}}(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$, per la proposizione 2 si ha $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}})$ e, dunque, si ha $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q})$.

Lemma 3: *Siano $\mathfrak{b}$ un ideale ed y un elemento di A. Siano poi $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + (y)$, x un elemento di $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ed*

$$(1) \qquad x^r = b + ay\,, \qquad (b \in \mathfrak{b}\,, \quad a \in A\,, \quad r \in \boldsymbol{N})\,.$$

Allora:

(*a*) *se* $\mathfrak{b} : x = \mathfrak{b}$ *e se* $r = \varrho_x(\mathfrak{a})$, *si ha* $a \notin \mathfrak{b} + (x)$;

(*b*) *se* $\mathfrak{b} : y = \mathfrak{b}$ *e se* $a \notin \mathfrak{b} + (x)$, *si ha* $r = \varrho_x(\mathfrak{a})$.

Dimostriamo la (*a*); supponiamo che sia $a = c + dx$ con $c \in \mathfrak{b}$, $d \in A$; sostituendo nella (1) si ha

$$(x^{r-1} - dy)x = b + cy \in \mathfrak{b} .$$

Poichè $\mathfrak{b} : x = \mathfrak{b}$, deve essere $x^{r-1} - dy \in \mathfrak{b}$ e, pertanto, $x^{r-1} = b' + dy$ con $b' \in \mathfrak{b}$; assurdo.

Dimostriamo la (*b*); supponiamo che sia $r > \varrho_x(\mathfrak{a})$; posto $\varrho = \varrho_x(\mathfrak{a})$, esiste allora una relazione

$$x^{\varrho} = b_0 + a_0 y , \qquad (b_0 \in \mathfrak{b} , \quad a_0 \in A) . \tag{2}$$

Dalle (1) e (2) si ricava

$$(b - b_0 x^{r-\varrho}) + (a - a_0 x^{r-\varrho})y = 0$$

e cioè $(a - a_0 x^{r-\varrho})y \in \mathfrak{b}$. Essendo $\mathfrak{b} : y = \mathfrak{b}$, si ha allora $a - a_0 x^{r-\varrho} \in \mathfrak{b}$ e quindi $a \in \mathfrak{b} + (x)$; assurdo.

LEMMA 4: *Siano* $\mathfrak{b}$ *un ideale ed* y_1, y_2 *elementi di* A. *Allora, se* $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b} + (y_i)$ $(i = 1, 2)$ *ed* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + (y_1 y_2)$, *si ha* $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{a}_1} \cap \sqrt{\mathfrak{a}_2}$.

Si riconosce immediatamente che $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$; ed allora, essendo $\sqrt{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2} = \sqrt{\mathfrak{a}_2} \cap \sqrt{\mathfrak{a}_1} = \sqrt{\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2}$, si ha l'asserto.

Concludiamo questo numero mostrando una proprietà additiva degli interi $\varrho(\mathfrak{q})$.

PROPOSIZIQNE 4: *Siano* $\mathfrak{b}$ *un ideale di* A, y_1 *e* y_2 *elementi di* A *tali che* $\mathfrak{b} : y_i = \mathfrak{b}$ $(i = 1, 2)$ *e tali che gli ideali* $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{b} + (y_i)$ *siano primari ed abbiano il medesimo primo associato* $\mathfrak{p}$. *Supponiamo che esista un elemento* $x \in A$ *tale che* $\mathfrak{b} : x = \mathfrak{b}$ *e tale inoltre che* $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} + (x)$. *Allora, se* $\mathfrak{q} = \mathfrak{b} + (y_1 y_2)$, *si ha* $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q}_1) + \varrho(\mathfrak{q}_2)$.

Per la prop. 1 si ha $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q})$, $\varrho_x(\mathfrak{q}_i) = \varrho(\mathfrak{q}_i)$; posto, per brevità, $\varrho = \varrho(\mathfrak{q})$, $\varrho_i = \varrho(\mathfrak{q}_i)$, possiamo scrivere

$$x^{\varrho_i} = b_i + a_i y_i , \quad b_i \in \mathfrak{b} , \quad a_i \in A \qquad (i = 1, 2)$$

e quindi si ha

$$x^{\varrho_1 + \varrho_2} = c + a_1 a_2 y_1 y_2 , \quad c \in \mathfrak{b} .$$

Poichè $b : x = \mathfrak{b}$, per la (a) del lemma 3 si ha $a_i \notin \mathfrak{p}$; quindi $a_1 a_2 \notin \mathfrak{p}$ ed allora, essendo $\mathfrak{b} : y_i = \mathfrak{b}$ ($i = 1, 2$), per la (b) del lemma 3, si ha $\varrho_1 + \varrho_2 = \varrho$; l'asserto è così provato.

Corollario. – *Siano* $\mathfrak{b}$ *un ideale di* A *ed* y_1, y_2 *elementi di* A *tali che* $\mathfrak{b} : y_i = \mathfrak{b}$ ($i = 1, 2$). *Sia* $\mathfrak{p}$ *un primo isolato di ciascuno degli ideali* $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{b} + (y_i)$ *e quindi* (per il lemma 4) *anche dell'ideale* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + (y_1 y_2)$. *Supponiamo che esista un elemento* x *di* A *tale che* $\mathfrak{b} : x = \mathfrak{b}$ *e tale inoltre che l'ideale* $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} + (x)$ *abbia* $\mathfrak{p}$ *come componente primaria isolata. Allora, se* $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_i$ *sono le componenti* $\mathfrak{p}$*-primarie di* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_i$, *rispettivamente, si ha* $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q}_1) + \varrho(\mathfrak{q}_2)$.

Localizzando in $\mathfrak{p}$ e tenendo conto del lemma 1, si riconosce subito che gli ideali $\mathfrak{q}_i A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}}$ e $\mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}}$ e gli elementi $\bar{x}$, $\bar{y}_i$ ($\bar{x}$, $\bar{y}_i$ essendo le immagini di x, y_i nell'omomorfismo canonico $A \to A_{\mathfrak{p}}$) verificano le ipotesi della proposizione 4 e perciò si ha $\varrho(\mathfrak{q} A_{\mathfrak{p}}) = \varrho(\mathfrak{q}_1 A_{\mathfrak{p}}) + \varrho(\mathfrak{q}_2 A_{\mathfrak{p}})$. Per la proposizione 2, si ha allora $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q}_1) + \varrho(\mathfrak{q}_2)$, come volevasi.

3. In questo numero riterremo acquisite le notazioni adoperate nei numeri precedenti.

Proposizione 5: *Siano* $\mathfrak{b}$ *un ideale di* A, $\mathfrak{q}$ *un ideale primario principale mod* $\mathfrak{b}$ *e* $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. *Sia* x *un elemento di* A *tale che* $\mathfrak{b} : x = \mathfrak{b}$ *e* $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} + (x)$; *si ha allora* $\mathfrak{q} = \mathfrak{b} + (x^{\varrho_x(\mathfrak{q})})$.

Porremo, per brevità, $\varrho = \varrho_x(\mathfrak{q})$; poichè $x^\varrho \in \mathfrak{q}$, si ha $\mathfrak{b} + (x^\varrho) \subset \mathfrak{q}$. Dimostriamo allora che $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{b} + (x^\varrho)$; essendo $\mathfrak{q}$ principale mod $\mathfrak{b}$, esiste un $y \in A$ tale che $\mathfrak{q} = \mathfrak{b} + (y)$ e perciò basta provare che $y \in \mathfrak{b} + (x^\varrho)$. Sia

$$x^\varrho = b + ay \qquad (b \in \mathfrak{b}\,, \quad a \in A);$$

allora si ha $ay \in \mathfrak{b} + (x^\varrho)$. Per il lemma 3, deve essere $a \notin \mathfrak{p}$ e quindi, essendo $\mathfrak{b} + (x^\varrho)$ $\mathfrak{p}$-primario (lemma 4), si ha $y \in \mathfrak{b} + (x^\varrho)$, come volevasi.

Proposizione 6: *Siano* $\mathfrak{b}$ *un ideale di* A, $\mathfrak{q}$ *un ideale primario, principale mod* $\mathfrak{b}$ *e* $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. *Sia* x *un elemento di* A *tale che* $\mathfrak{b} : x = \mathfrak{b}$ *e tale inoltre che* $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} + (x)$. *Allora si ha*: $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho_x(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q})$.

La prima eguaglianza: $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho_x(\mathfrak{q})$ segue dalla proposizione 1. Dimostriamo allora che $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q})$; porremo ancora, per brevità, $\varrho = \varrho_x(\mathfrak{q})$.

1) Supponiamo dapprima che $\mathfrak{p}$ sia massimale. Per ogni intero positivo r l'ideale $\mathfrak{q}_r = \mathfrak{b} + (x^r)$ è $\mathfrak{p}$-primario, per il lemma 4; inoltre si ha $\mathfrak{q}_r \supset \mathfrak{q}_{r+1}$ e, per la proposizione 5, si ha $\mathfrak{q}_\varrho = \mathfrak{q}$. Dimostriamo che

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_1 \supset \mathfrak{q}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{q}_\varrho = \mathfrak{q} \tag{3}$$

è una serie di composizione di ideali $\mathfrak{p}$-primari. Si ha intanto $\mathfrak{q}_r \neq \mathfrak{q}_{r+1}$; infatti, se per qualche indice r fosse $\mathfrak{q}_r = \mathfrak{q}_{r+1}$, si avrebbe

$$x^r = c + dx^{r+1} \qquad (c \in \mathfrak{b}, \quad d \in A)$$

e quindi $(1 - dx)x^r \in \mathfrak{b}$. Poichè $\mathfrak{b} : x = \mathfrak{b}$, è anche $\mathfrak{b} : x^r = \mathfrak{b}$ e, pertanto, deve essere $1 - dx \in \mathfrak{b}$. Dunque, $1 \in \mathfrak{p}$; assurdo. Si riconosce poi immediatamente che risulta $\mathfrak{p}\mathfrak{q}_r \subset \mathfrak{q}_{r+1}$ ed inoltre $\mathfrak{q}_r = \mathfrak{q}_{r+1} + (x^r)$; quindi non esistono ideali compresi propriamente tra $\mathfrak{q}_r$ e $\mathfrak{q}_{r+1}$ (cfr. [8], vol. I, cap. IV, § 13, cor. 2). Dunque, la (3) è una serie di composizione di ideali $\mathfrak{p}$-primari; ciò prova la proposizione se $\mathfrak{p}$ è massimale.

2) Consideriamo adesso il caso generale. Localizzando in $\mathfrak{p}$, se denotiamo con $\bar{x}$ l'immagine di x nell'omomorfismo canonico $A \to A_\mathfrak{p}$, per il lemma 1 si ha $\mathfrak{b}A_\mathfrak{p} : \bar{x} = \mathfrak{b}A_\mathfrak{p}$; inoltre si ha $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{b}A_\mathfrak{p} + (\bar{x})$, mentre $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$ è principale mod $\mathfrak{b}A_\mathfrak{p}$. Ed allora, $\mathfrak{b}A_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}A\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ ed x verificano le ipotesi del teorema nel caso 1) ove si sostituisca A con $A_\mathfrak{p}$; si ha quindi $\varrho_{\bar{x}}(\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}) = \lambda(\mathfrak{q}A_\mathfrak{p})$. Per il lemma 2, si ha $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho_x(\mathfrak{q}A_\mathfrak{p})$; inoltre, si ha $\lambda(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q}A_\mathfrak{p})$ e, dunque, $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q})$. La proposizione è così provata.

TEOREMA 1: *Siano* $\mathfrak{b}$ *un ideale di* A, y *un elemento di* A, $\mathfrak{q}$ *una componente primaria isolata dell'ideale* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + (y)$ *e* $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. *Sia* x *un elemento di* $\mathfrak{p}$ *tale che* $\mathfrak{b} : x = \mathfrak{b}$ *e tale inoltre che l'ideale* $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} + (x)$ *abbia* $\mathfrak{p}$ *come componente primaria isolata. Si ha allora*: $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho_x(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q})$.

La prima eguaglianza: $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho_x(\mathfrak{q})$ segue dalla proposizione 3. Resta, perciò, da dimostrare che $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q})$. Localizzando in $\mathfrak{p}$ e denotando con $\bar{x}$, $\bar{y}$ le immagini di x, y nell'omomorfismo canonico $A \to A_\mathfrak{p}$, si ha $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{b}A_\mathfrak{p} + (\bar{y})$, $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{b}A_\mathfrak{p} + (\bar{x})$ e, per il lemma, 1 si ha anche $\mathfrak{b}A_\mathfrak{p} : \bar{x} = \mathfrak{b}A_\mathfrak{p}$. Dunque $\mathfrak{b}A_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ ed $\bar{x}$ verificano le ipotesi della proposizione 6 e quindi si ha $\varrho_{\bar{x}}(\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}) = \lambda(\mathfrak{q}A_\mathfrak{p})$. Per il lemma 2, si ha $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho_{\bar{x}}(\mathfrak{q}A_\mathfrak{p})$; inoltre $\lambda(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q}A_\mathfrak{p})$ e quindi $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q})$, come volevasi.

TEOREMA 2: *Siano* $\mathfrak{b} = (y_1, \ldots, y_{d-1})$ *un ideale puro di* A *ed* y *un elemento di* A. *Siano* $\mathfrak{q}$ *una componente primaria isolata di altezza* d *dell'ideale* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + (y)$ *e* $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. *Allora, se* x *è un elemento di* $\mathfrak{p}$ *tale che l'ideale* $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} + (x)$ *abbia* $\mathfrak{p}$ *come componente primaria isolata, si ha* $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho_x(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q}) = e(\mathfrak{q})$.

Siano $A_\mathfrak{p}$ il localizzato di A in $\mathfrak{p}$ ed $\bar{x}$, $\bar{y}$ le immagini di x, y rispettivamente, nell'omomorfismo canonico $A \to A_\mathfrak{p}$; si ha $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{b}A_\mathfrak{p} + (\bar{x})$, $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{b}A_\mathfrak{p} + (\bar{y})$. Inoltre si ha $\mathfrak{b}A_\mathfrak{p} : \bar{x} = \mathfrak{b}A_\mathfrak{p}$; infatti, se così non fosse $\bar{x}$ apparterrebbe ad uno dei primi associati a $\mathfrak{b}A_\mathfrak{p}$, sia $\mathfrak{p}'$ ([8], cap. IV,

§ 7, teor. 11); ed allora si avrebbe $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ e questo è assurdo essendo $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ di altezza d e $\mathfrak{p}'$ di altezza $\leqslant d - 1$. Dunque, gli ideali $\mathfrak{b}A_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ e l'elemento $\bar{x}$ soddisfano alle ipotesi della proposizione 6 e perciò si ha $\varrho(\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}) = \varrho_{\bar{x}}(\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}) = \lambda(\mathfrak{q}A_\mathfrak{p})$. Per il lemma 2 si ha $\varrho_x(\mathfrak{q}) = \varrho_{\bar{x}}(\mathfrak{q}A_\mathfrak{p})$, per la proposizione 2 si ha $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q}A_\mathfrak{p})$ ed allora, essendo anche $\lambda(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q}A_\mathfrak{p})$, risulta $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho_x(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q})$.

L'ideale $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ è generato da d elementi ed ha altezza d, quindi $A_\mathfrak{p}$ è regolare (cfr. n. 1, (V)) ed, in particolare, è di Macaulay (n. 1, (VI) 1)); l'ideale $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p} = (y_1, \dots, y_{d-1}, y)A_\mathfrak{p}$ è generato da un sistema di parametri e quindi si ha $\lambda(\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}) = e(\mathfrak{q}A_\mathfrak{p})$ (n. 1, (VI), 2)); ossia, $\lambda(\mathfrak{q}) = e(\mathfrak{q})$. Il teorema è così provato.

4. Introduciamo nell'insieme delle n-ple ordinate di interi naturali una relazione d'ordine ponendo

$$(r_1, \dots, r_n) \leqslant (t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow r_i \leqslant t_i \text{ per ogni } i(1 \leqslant i \leqslant n) .$$

Tenendo sempre presenti le notazioni usate nei numeri precedenti, vale la seguente proposizione (che generalizza la prima asserzione del teorema 3 di [4]):

PROPOSIZIONE 7: *Siano $\mathfrak{a}$ un ideale di A privo di componenti immerse, $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$ la sua decomposizione primaria e $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}(1 \leqslant i \leqslant n)$. Siano poi $x_1, \dots, x_n$ elementi di A tali che $x_i \in \mathfrak{p}_i$, $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$. Allora, tra tutte le n-ple di interi $(r_1, \dots, r_n)$ per cui $x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} \in \mathfrak{a}$ ne esiste una minima,* costituita da $(\varrho_{x_1}(\mathfrak{q}_1), \dots, \varrho_{x_n}(\mathfrak{q}_n))$.

Porremo, per brevità, $\varrho_{x_i}(\mathfrak{q}_i) = \varrho_i$; si ha intanto subito che $x_1^{\varrho_1} \dots x_n^{\varrho_n} \in \mathfrak{a}$. D'altra parte, se $(r_1, \dots, r_n)$ è una n-pla di interi tale che $x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} \in \mathfrak{a}$, si ha $(r_1, \dots, r_n) \geqslant (\varrho_1, \dots, \varrho_n)$; infatti, se così non fosse, per almeno un indice i si avrebbe $\varrho_i > r_i$ e quindi, poichè $x_1^{r_1} \dots x_{i-1}^{r_{i-1}} x_{i+1}^{r_{i+1}} \dots x_n^{r_n} \notin \mathfrak{p}_i$, dovrebbe essere $x_i^{r_i} \in \mathfrak{q}_i$; assurdo.

OSSERVAZIONE: Se gli elementi $x_i \in \mathfrak{p}_i$ non sono tali che $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$, non esiste in generale una n-pla minima relativa a $x_1, \dots, x_n$. Infatti, supponiamo, ad esempio, che $x_1 \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ e prendiamo $x_2 = x_1$; allora, se $\varrho_1 \leqslant \varrho_2$ risulta $x_1^{r_1} x_1^{r_2} x_3^{\varrho_3} \dots x_n^{\varrho_n} = x_1^{r_1 + r_2} x_3^{\varrho_3} \dots x_n^{\varrho_n} \in \mathfrak{a}$, qualunque siano r_1, r_2 tali che $r_1 + r_2 \geqslant \varrho_2$.

Il seguente teorema generalizza il teorema 2 di [5].

TEOREMA 3: *Siano $\mathfrak{a} = (y_1, \dots, y_h)$ un ideale privo di componenti immerse di A, $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_n$ la sua decomposizione primaria e $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$*

$(1 \leqslant i \leqslant n)$. *Siano inoltre* $x_1, \ldots, x_n$ *elementi tali che* $x_i \in \mathfrak{p}_i$, $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ *e* $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ *la n-pla minima per cui* $x_1^{\varrho_1} \ldots x_n^{\varrho_n} \in \mathfrak{a}$. *Supponiamo che per un indice i esista un indice* $t (1 \leqslant t \leqslant h)$ *tale che, posto* $\mathfrak{b}_t = (y_1, \ldots, y_{t-1}, y_{t+1}, \ldots, y_h)$, *l'ideale* $\mathfrak{b}_t + (x_i)$ *abbia* $\mathfrak{p}_i$ *come componente primaria isolata. Allora*

(*a*) $\varrho_i = \varrho_{x_i}(\mathfrak{q}_i) = \varrho(\mathfrak{q}_i)$;

(*b*) *se inoltre* x_i *è tale che* $\mathfrak{b}_t : x_i = \mathfrak{b}_t$, si *ha* $\varrho_{x_i} = \varrho_{x_i}(\mathfrak{q}_i) = \varrho(\mathfrak{q}_i) = \lambda(\mathfrak{q}_i)$;

(*c*) *se* $\mathfrak{b}_t$ *è puro e di altezza* $h-1$ *e* $\mathfrak{p}_i$ *è di altezza* h, *si ha* $\varrho_i = \varrho_{x_i}(\mathfrak{q}_i) = \varrho(\mathfrak{q}_i) = \lambda(\mathfrak{q}_i) = e(\mathfrak{q}_i)$.

La (*a*) è conseguenza immediata delle proposizioni 7 e 3; le (*b*) e (*c*) seguono poi subito dalla proposizione 7 e, rispettivamente, dai teoremi 1 e 2.

5. In questo numero supporremo che A sia l'anello dei polinomi nelle indeterminate $X_1, \ldots, X_r$ sopra un campo k, algebricamente chiuso. Sia S_r lo spazio affine di dimensione r sopra k. Siano U, V varietà algebriche irriducibili di S_r ed M una componente della varietà $U \cap V$. Denoteremo con i $(U \cdot V, M)$ la molteplicità di intersezione di U, V in M nel senso di C. Chevalley e P. Samuel [2]).

Supponiamo che dim $U = r - d$, dim $V = r - h + d$ $(1 \leqslant d < h \leqslant r)$ e che gli ideali di U, V siano $\mathfrak{b} = (f_1, \ldots, f_d)$, $\mathfrak{c} = (f_{d+1}, \ldots, f_h)$ rispettivamente. Supponiamo, inoltre, che M sia componente propria di $U \cap V$. Sia Q l'anello locale di M sopra V (se $\mathfrak{p}$ è l'ideale di M, $Q = (A/\mathfrak{c}))_{\mathfrak{p}/\mathfrak{c}}$ e sia f_j^V $(1 \leqslant j \leqslant d)$ la funzione indotta da f_j sopra V; $f_1^V, \ldots, f_1^V$ costituiscono un sistema di parametri di Q. Infatti, posto $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$, $\mathfrak{Q} = (f_1^V, \ldots, f_d^V)$, si ha $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{a}/\mathfrak{c})Q$ ed allora, se $\mathfrak{q}$ è la componente primaria

---

[2]) Ricordiamo che la molteplicità di intersezione di U, V in M definita da P. Samuel in [3] estende quella definita da C. Chevalley in [1] nel caso in cui M sia una componente propria di $U \cap V$, cioè tale che dim M=dim U+dim V $- r$. Sempre nel caso in cui M sia componente propria di $U \cap V$, essa coincide con quella definita da A. Weil in [6], che si fonda sul concetto di molteplicità di una specializzazione (cfr. [6], appendice 2, oppure [3], cap. III, n. 3).

Noi considereremo solo casi di molteplicità di intersezione lungo componenti proprie.

di $\mathfrak{a}$ relativa a M, risulta $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{q}/\mathfrak{c})Q$. Dunque, $\mathfrak{Q}$ è primario per l'ideale massimale di Q. Poichè Q ha dimensione $(r - h + d) - (r - h) = d$, si ha l'asserto.

Se M è semplice per U, si ha

$$i(U \cdot V,\ M) = \lambda(\mathfrak{q})\,. \tag{4}$$

Infatti, risulta $i(U \cdot V,\ M) = e(\mathfrak{Q})$ ([1], parte II, prop. 4, pag. 35); d'altra parte l'anello Q è di Macaulay ([8], vol. II, appendice 6, pag. 400, Remark), perciò si ha (cfr. anche n. 1 (II)):

$$e(\mathfrak{Q}) = \lambda(\mathfrak{Q}) = \lambda[(\mathfrak{q}/\mathfrak{c})\mathfrak{Q}] = \lambda(\mathfrak{q}/\mathfrak{c}) = \lambda(\mathfrak{q})\,,$$

e quindi la (4).

Nel seguito diremo che due varietà irriducibili U, V si incontrano semplicemente in una componente M di $U \cap V$, se $i(U \cdot V,\ M) = 1$.

Ci occorre ricordare la seguente

PROPOSIZIONE 8: *Sia M una componente propria dell'intersezione di due varietà irriducibili U, V, Siano poi $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gli ideali di M, U, V rispettivamente. Allora U, V si incontrano semplicemente in M se e solo se l'ideale $(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})A_{\mathfrak{p}}$ è primo.* (cfr. [1], parte II, prop. 6, pag. 36).

Ciò premesso, dimostriamo ora il seguente

TEOREMA 4: *Siano U una varietà irriducibile di ideale $\mathfrak{b}$, completa intersezione, F un'ipersuperficie di ideale (f) non contenente U ed M una componente di $U \cap F$, semplice per U. Sia G un'ipersuperficie di ideale (g) che incontri U semplicemente in M. Allora, se $\mathfrak{q}$ è la componente primaria di $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + (f)$ relativa a M, si ha $i(U \cdot V,\ M) = \varrho_g(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q})$.*

Cominciamo ad osservare che M è componente propria di $U \cap V$; infatti, poichè F non contiene U, si ha $\dim M = \dim U - 1 = (r - 1) - - \dim U - r = \dim F + \dim U - r$. Siccome M è semplice per U, si può applicare la (4) e quindi $i(U \cdot V,\ M) = \lambda(\mathfrak{q})$. Sia $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$; l'ideale $\mathfrak{b} + (g)$ ha $\mathfrak{p}$ come componente primaria isolata; infatti, poichè G passa per M, si ha $g \in \mathfrak{p}$ e quindi $\mathfrak{b} + (g) \subset \mathfrak{p}$. Dunque, $\mathfrak{p}$ contiene uno dei primi associati a $\mathfrak{b} + (g)$, sia questo $\mathfrak{p}'$. Poichè G non contiene U, $\mathfrak{p}'$ ha dimensione eguale a $\dim U - 1$ e quindi si ha $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$; cioè $\mathfrak{p}$ è un primo (necessariamente isolato) associato a $\mathfrak{b} + (g)$. Sia $\mathfrak{q}'$ la componente $\mathfrak{p}$-primaria di $\mathfrak{b} + (g)$; essendo $\mathfrak{q}'$ isolato, risulta $(\mathfrak{b} + (g))A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{q}'A_{\mathfrak{p}}$; d'altra parte, per ipotesi, è $i(U \cdot G,\ M) = 1$ e quindi, per la proposizione 8, si ha $(\mathfrak{b} + + (g))A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, onde $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}$. Per il teorema 2 si ha, allora, $\lambda(\mathfrak{q}) = = \varrho_g(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q})$ e quindi risulta $i(U \cdot F,\ M) = \varrho_g(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q})$.

COROLLARIO: *Siano U, F come nel teorema 4. Siano $M_1, \ldots, M_n$ le componenti di $U \cap F$, $G_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ una ipersuperficie di ideale (g_j) che passi per M_j, ma non passi per nessun'altra M_s, con $s \neq j$, e sia $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ la n-pla minima tale che $g_1^{\varrho_1} \ldots g_n^{\varrho_n} \in \mathfrak{b} + (f)$. Allora, se per un indice j M_j è semplice per U e G_j incontra U semplicemente in M_j, si ha $\varrho_j = i(U \cdot F, M_j)$.*

Se $\mathfrak{q}_j$ è la componente primaria di $\mathfrak{b} + (f)$ relativa a M_j, per il teorema 4 si ha $i(U \cdot F, M_j) = \varrho(\mathfrak{q}_j)$; d'altra parte, per il teorema 3, si ha $\varrho(\mathfrak{q}_j) = \varrho_j$ e di qui l'asserto.

Il teorema 4 ed il suo corollario si possono generalizzare nel modo seguente.

TEOREMA 5: *Siano U, V varietà irriducibili di ideali $\mathfrak{b} = (f_1, \ldots, f_d)$, $\mathfrak{c} = (f_{d+1}, \ldots, f_h)$ $(1 \leqslant d < h \leqslant r)$ rispettivamente, ciascuna completa intersezione e tali che l'ideale $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_h)$ sia puro. Sia M una componente di $U \cap V$ di dimensione $r - h$ e sia G un'ipersuperficie di ideale (g) passante per M, tale che:*

(a) G non contiene nessuna componente della varietà dell'ideale $\mathfrak{n} = (f_1, \ldots, f_{h-1})$;

(b) $\mathfrak{n} + (g)$ abbia l'ideale $\mathfrak{p}$ di M come componente primaria isolata.

Allora, se $\mathfrak{q}$ è la componente $\mathfrak{p}$-primaria di $\mathfrak{a}$, si ha $i(U \cdot V, M) = \varrho_g(\mathfrak{q}) = \varrho(\mathfrak{q})$.

Gli elementi $f_1, \ldots, f_d$ costituiscono un sistema di parametri per l'anello locale di U, mentre, essendo $(\mathfrak{n} + (g))A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, $f_1, \ldots, f_{h-1}, g$ costituiscono un sistema regolare di parametri dell'anello locale di M. Quindi M è semplice per U ([1], parte III, prop. 3, pag. 61). Si può allora applicare la (4) e quindi $i(U \cdot V, M) = \lambda(\mathfrak{q})$. La (*a*) significa che $\mathfrak{n} : g = \mathfrak{n}$; dunque $\mathfrak{n}$, f_h, g soddisfano alle ipotesi del teorema 1 e, pertanto, si ha $\varrho(\mathfrak{q}) = \varrho_g(\mathfrak{q}) = \lambda(\mathfrak{q})$; di qui l'asserto.

COROLLARIO: *Siano U, V come nel teorema 5. Siano $M_1, \ldots, M_n$ le componenti di $U \cap V$ e sia G_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ un'ipersuperficie di ideale (g_j) passante per M_j ma non passante per M_s con $s \neq j$. Supponiamo che per un indice j si abbia* dim $M_j = r - h$ *ed inoltre G_j soddisfi alle condizioni (a) e (b) del teorema 5. Allora, se $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ è la n-pla minima tale che $g_1^{\varrho_1} \ldots g_n^{\varrho_n} \in \mathfrak{a}$,* si ha *$i(U \cdot V, M_j) = \varrho_j$.*

Infatti, se $\mathfrak{q}_j$ è la componente primaria di $\mathfrak{a}$ relativa a M_j, per il teorema 5 si ha $i(U \cdot V, M_j) = \varrho(\mathfrak{q}_j)$ e, d'altra parte, per il teorema 3, si ha $\varrho(\mathfrak{q}_j) = \varrho_j$.

6. Nei numeri precedenti ci è spesso occorsa l'ipotesi che un ideale primo $\mathfrak{p}$ compaia come componente isolata nella decomposizione primaria di un ideale $\mathfrak{a}$. Esponiamo qui un criterio (prop. 9) per riconoscere quando ciò si verifica nel caso in cui $\mathfrak{a}$ sia un ideale dell'anello $A = k[X_1, ..., X_r]$, k essendo sempre algebricamente chiuso, e $\mathfrak{p}$ un primo associato ad $\mathfrak{a}$. Da tale criterio discende anche una caratterizzazione (espressa dal corollario alla prop. 8) degli ideali di classe principale di A la cui n-pla $(\varrho_1, ..., \varrho_n)$ introdotta nel n. 4 è costituita da interi tutti eguali ad 1. Il criterio anzidetto, che poggia sulla nozione di zero semplice di un ideale, si deduce facilmente da risultati che trovansi in [7].

Per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di A denoteremo con $\mathfrak{V}(\mathfrak{a})$ la varietà di $\mathfrak{a}$ in S_r.

Sia P un punto di S_r e sia $\mathfrak{P}$ l'ideale di P; si dice che P è *zero semplice* di un ideale $\mathfrak{a}$ di A se $P \in \mathfrak{V}(\mathfrak{a})$ e se esistono dei polinomi $u_1, ..., u_m \in A$ tali che:

1) $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{P}} = (u_1, ..., u_m)A_{\mathfrak{P}}$,

2) $u_1, ..., u_m$ costituiscono un sottoimsieme di un sistema regolare di parametri di $A_{\mathfrak{P}}$ ([7], parte I, n. 3, def. 2).

Ed allora si ha (v. n. 1, (V) (ii)):

3) l'ideale $\mathfrak{a}A_{\mathfrak{P}}$ è primo.

In particolare, se V è una varietà algebrica di S_r, un punto P di V è semplice per V se è zero semplice dell'ideale di V.

Proposizione 9: *Sia* $\mathfrak{q}$ *una componente primaria isolata di un ideale* $\mathfrak{a}$ *di* A; $\mathfrak{q}$ *è primo se e solo se sopra la componente* $\mathfrak{V}(\mathfrak{q})$ *della varietà* $\mathfrak{V}(\mathfrak{a})$ *esiste uno zero semplice di* $\mathfrak{a}$.

Sia $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{q}}$. Supponiamo che sia $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Se $\mathfrak{p}$ è di dimensione zero, $\mathfrak{V}(\mathfrak{q})$ è un punto P e, se $a_1, ..., a_r$ sono le sue coordinate, si ha $\mathfrak{p} = (X_1 - a_1, ..., X_r - a_r)$ onde i polinomi $X_i - a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ soddisfano alle 1), 2) e P è zero semplice di $\mathfrak{a}$. Supponiamo che $\mathfrak{p}$ abbia dimensione $\geqslant 1$. Denotiamo con S_0 l'insieme (eventualmente vuoto) delle intersezioni di $\mathfrak{V}(\mathfrak{q})$ con le rimanenti componenti di $\mathfrak{V}(\mathfrak{a})$; inoltre, se $\mathfrak{p}'_1, ..., \mathfrak{p}'_\sigma$ $(\sigma \geqslant 0)$ sono i primi immersi di $\mathfrak{a}$ contenenti $\mathfrak{p}$, poniamo $S' = \bigcup_{s=1}^{\sigma} \mathfrak{V}(\mathfrak{p}'_s)$, $S = S' \cup S_0$. S è un sottoinsieme proprio di $\mathfrak{V}(\mathfrak{q})$ e fuori di S $\mathfrak{V}(\mathfrak{q})$ possiede un punto semplice P ([7], parte I, n. 4, lemma 4). E, pertanto, se $\mathfrak{P}$ è l'ideale di P esistono dei polinomi $u_1, ..., u_m$ tali che $\mathfrak{p} = (u_1, ..., u_m)A_{\mathfrak{P}}$ e tali inoltre che $u_1, ..., u_m$ sia un sottoinsieme di un sistema regolare di parametri di $A_{\mathfrak{P}}$. Siccome P è scelto fuori di S, risulta $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{q}A_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{a}A_{\mathfrak{P}}$; dunque, $u_1, ..., u_m$ soddisfano alle 1), 2) e P è zero semplice di $\mathfrak{a}$.

Supponiamo ora che sopra $\mathfrak{V}(\mathfrak{q})$ esista uno zero semplice P di $\mathfrak{a}$ e mostriamo che allora si ha $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Sia $\mathfrak{P}$ l'ideale di P; siano $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_s$ ($s \geqslant 1$) i primi isolati di $\mathfrak{a}$ contenuti in $\mathfrak{P}$; gli ideali $\mathfrak{p}_j A_{\mathfrak{P}}$ sono i primi isolati di $\mathfrak{a} A_{\mathfrak{P}}$. Siccome, per la 3), l'ideale $\mathfrak{a} A_{\mathfrak{P}}$ è primo, deve essere $s = 1$; pertanto $\mathfrak{a} A_{\mathfrak{P}} \cap A = \mathfrak{p}$. D'altra parte deve essere $\mathfrak{a} A_{\mathfrak{P}} \cap A \subset \mathfrak{q}$ e quindi $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

COROLLARIO 1: *Un ideale* $\mathfrak{a}$ *di* A, *privo di componenti immerse, è semiprimo* (cioè intersezione di ideali primi) *se e solo se sopra ogni componente della varietà* $\mathfrak{V}(\mathfrak{a})$ *esiste uno zero semplice di* $\mathfrak{a}$.

Applicando il criterio jacobiano classico (cfr. [7], parte I, n. 7, teor. 7 e corollario) si ha il

COROLLARIO 2: *Sia* $\mathfrak{q}$ *una componente primaria isolata di altezza* h *di un ideale* $\mathfrak{a}$ *di* A, *privo di componenti immerse. Allora, se* $f_1, \ldots, f_m$ *è un sistema di generatori di* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{q}$ *è primo se e solo se sopra* $\mathfrak{V}(\mathfrak{q})$ *esiste un punto in cui la matrice jacobiana* $J(f_1, \ldots, f_m) = \partial(f_1, \ldots, f_m)/\partial(X_1, \ldots, X_r)$ *ha caratteristica* h.

Dalla proposizione 9 si deduce facilmente il seguente risultato:

PROPOSIZIONE 10: *Sia* $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_h)$ ($h \leqslant r$) *un ideale di* A. *Supponiamo che sopra ogni componente della varietà* $\mathfrak{V}(\mathfrak{a})$ *esista un punto in cui la matrice jacobiana* $J(f_1, \ldots, f_h)$ *abbia caratteristica* h. *Allora* $\mathfrak{a}$ *è di dimensione* $r - h$ *e semiprimo* [3]).

Sia $\mathfrak{p}$ un primo isolato di $\mathfrak{a}$; se d è la dimensione di $\mathfrak{p}$, si ha $d \geqslant r - h$. D'altra parte, in ogni punto di $\mathfrak{V}(\mathfrak{a})$ la matrice $J(f_1, \ldots, f_h)$ ha caratteristica $\leqslant r - d$ ([7], parte II, n. 6, lemma 5) ed allora si ha $d = r - h$. Dunque $\mathfrak{a}$ è di dimensione $r - h$. Per il teorema di Macaulay $\mathfrak{a}$ è puro e, quindi, per i corollari 2 e 1, è semiprimo.

COROLLARIO. *Siano* $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_h)$ *un ideale di altezza* h *di* A, $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ *la sua decomposizione primaria e* $\mathfrak{p}_i = \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. *Le condizioni seguenti sono equivalenti*

(a) *la matrice jacobiana* $J(f_1, \ldots, f_h)$ *ha caratteristica* h *in almeno un punto di ogni componente di* $\mathfrak{V}(\mathfrak{a})$;

(b) $\mathfrak{a}$ *è semiprimo*;

(c) *se* g *è un polinomio che si annulla su* $\mathfrak{V}(\mathfrak{a})$, *allora* $g \in \mathfrak{a}$.

Se inoltre esiste una n-pla di elementi $g_i \in \mathfrak{p}_i$, $g_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$

---

[3]) Un enunciato sostanzialmente analogo trovasi già in F. SEVERI - *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre*, Rend. Ac. dei Lincei, s. V, vol. 11 1° sem. (1902) pagg. 105-113.

in guisa che per ogni i esista un indice $t (1 \leqslant t \leqslant h)$ tale che l'ideale $(f_1, \dots$
$\dots, t_{t-1}, f_{t+1}, \dots, f_h, g_i)$ *abbia* $\mathfrak{p}_i$ *come componente primaria isolata, allora le condizioni precedenti sono equivalenti alla seguente*

(*d*) *se* $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$ *è la* n*-pla minima tale che* $g_1^{\varrho_1} \dots g_n^{\varrho_n} \in \mathfrak{a}$, *si ha* $(\varrho_1, \dots$
$\dots \varrho_n) = (1, \dots, 1)$.

L'implicazione $(a) \rightarrow (b)$ è contenuta nella prop. 10; la $(b) \rightarrow (a)$ segue dal corollario 2 della prop. 9. L'equivalenza della (b) con (c) segue dal teorema degli zeri di Hilbert; infatti, se g si annulla su $\mathfrak{V}(\mathfrak{a})$, per il teorema degli zeri di Hilbert, si ha $g \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ e quindi, essendo $\mathfrak{a}$ semiprimo, risulta $g \in \mathfrak{a}$; il viceversa è ovvio.

Supponiamo ora che esista una n-pla di polinomi soddisfacenti alle ipotesi dell'enunciato, e dimostramo l'equivalenza delle (b), (d). La $(b) \rightarrow (d)$ è ovvia; inoltre, poichè, per il teorema 3 si ha, $\varrho_i = \varrho(\mathfrak{q}_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, essendo $\varrho_i = 1$, si ha $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{q}_i$. Dunque, $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i$ per ogni i.

BIBLIOGRAFIA

[1] Chevalley C.: *Intersections of algebraic and algebroid varieties.* Trans. of the Am. Math. Soc. 57 (1945) pp. 1-85.

[2] Northcott D. G.: *Ideal Theory,* Cambridge, 1963.

[3] Samuel P.: *La notion de Multiplicité en Algèbre et en Géométrie Algèbrique.* Journal de Mathèmatique 30 (1951), pp. 159-274.

[4] Vecchio G.: *Sugli ideali di classe principale e il teorema degli zeri di Hilbert.* Le Matematiche, vol. XX, fasc. 1 (1965), pp. 7-21.

[4′] Vecchio G.: *Aggiunte e correzioni alla Nota « Sugli ideali di classe principale e il teorema degli zeri di Hilbert ».* Le matematiche, vol. XX, fasc. 1 (1965).

[5] Vecchio G.: *Su certi interi associati ai primari di un ideale in un anello noetheriano.* Rend. Ac. Naz. dei Lincei, serie VIII, vol. XXXVII, fasc. 6 (1964), pp. 377-380.

[6] Weil A.: *Foundations of algebriac geometry.* Am. Math. Soc., 1962.

[7] Zariski O.: *The concept of a simple point of an abstract algebriac variety.* Trans. of the Am. Math. Soc. 62 (1947), pp. 1-52.

[8] Zariski O., Samuel P.: *Commutative algebra.* Voll. I e II, Van Nostrand, 1958-1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 19 gennaio 1966.