Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Domenico Boccioni

Q-pseudogruppi complementarizzabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 26 (1956), p. 85-123
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__26__85_0>

Q-PSEUDOGRUPPI COMPLEMENTARIZZABILI

Memoria (*) *di* Domenico Boccioni (*a Padova*)

Nella prima parte di questa memoria viene dimostrato un teorema d'immersione (enunciato nel n.° 2) per un Q-pseudogruppo (sinistro) G, cioè (n.° 1) per uno pseudogruppo G dotato di uno pseudogruppo Q di operatori aventi le proprietà consuete. Gli pseudogruppi Q e G non sono necessariamente commutativi.

Nell'ipotesi che Q e G contengano rispettivamente un sotto-pseudogruppo Π e un sotto-Q-pseudogruppo Γ, costituiti da elementi semplificabili e soddisfacenti ad un ulteriore, opportuna restrizione, questo teorema del n.° 2 dà una condizione necessaria e sufficiente affinchè di G esista un sopra-Q-pseudogruppo $\mathcal{G}$, dotato di zero, nel quale ogni elemento di Γ abbia opposto e l'equazione $\alpha\xi = \xi_1$ ($\alpha \in \Pi$, $\xi_1 \in \mathcal{G}$) un'unica soluzione, ed ogni elemento ξ del quale risolva una equazione del tipo $\alpha\xi = u - \tau$, con $\alpha \in \Pi$, $u \in G$, $\tau \in \Gamma$. Questo sopra-Q-pseudogruppo $\mathcal{G}$ di G, ove esista, rimane individuato da G, Π e Γ a meno di isomorfismi.

Detto N il semigruppo moltiplicativo dei numeri naturali, se, ad es., si assume (n.° 15) $\Pi = Q = G = \Gamma = N$ e come legge di composizione esterna (moltiplicazione fra Q e G) l'ordinaria operazione di elevamento a potenza in N con esponente naturale, $\mathcal{G}$ non è altro (a meno di isomorfismi) che il gruppo moltiplicativo degli ordinari numeri reali positivi del tipo

(*) Pervenuta in Redazione il 16 luglio 1956.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

$\sqrt[\alpha]{u/\tau}$ (α, u, τ numeri naturali). Di questo gruppo $\mathfrak{G}$ (che è un'estensione propria del gruppo dei quozienti di N), con la costruzione adottata nella dimostrazione del teor. del n.° 2, si ottiene una definizione diretta molto semplice (che presenta ogni numero reale di quel tipo come una classe di terne ordinate di numeri naturali).

Il teorema del n.° 2 si rivela di una notevole generalità, in quanto da esso discendono (come si mostra nella seconda parte della memoria), quali conseguenze molto semplici o addirittura immediate, numerosi altri teoremi d'immersione (corollari 1-14), alcuni già ottenuti da altri Autori e da chi scrive con dimostrazioni dirette di tipo diverso. Citeremo fra questi una generalizzazione (n.° 12, coroll. 12), dovuta ad Asano, di un ormai classico risultato di Ore ([9] [1])) sull'immersione di un anello (non necessariamente commutativo) in un corpo dei quozienti, un teorema (n.° 11, coroll. 11'), dimostrato da Murata, sull'immersione di uno pseudogruppo (non necessariamente commutativo) in uno pseudogruppo dei quozienti, e (n.° 10, coroll. 8, p.to 7', relativo ad un Q-modulo) un altro risultato di Asano, riguardante un problema d'immersione per un modulo dotato di un anello (non necessariamente commutativo) di operatori, che generalizza un noto teorema (cfr. [3], p. 189, 2° capov.) sulla « chiusura razionale » di un gruppo commutativo. Anche i classici teoremi sull'immergibilità di un dominio d'integrità in un corpo e di un semigruppo commutativo in un gruppo sono facili conseguenze del teorema del n.° 2.

Richiamo infine l'attenzione sul concetto (introdotto nel n.° 1) di « $\mathfrak{Q}$-pseudogruppo complementare destro ($\mathfrak{Q}$-p.c.d.) di G rispetto a Π, Γ », ove $\mathfrak{Q}$ denota lo pseudogruppo dei quozienti a sinistra di Q rispetto a Π, (si veda, inoltre, il n.° 14). Esso non è altro che un $\mathfrak{Q}$-pseudogruppo sinistro $\mathfrak{G}$, estensione di G, dotato di zero, nel quale ogni elemento di Γ possiede opposto, ed ogni elemento ξ del quale è rappresentabile nella forma $\xi = \alpha^{-1}(u - \tau)$, con $\alpha \in \Pi$, $u \in G$, $\tau \in \Gamma$. Se

---

[1]) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della memoria.

questa estensione $\mathfrak{G}$ di G (che è individuata da G, Π e Γ a meno di isomorfismi) esiste, si può dire (n.° 1) che « G è complementarizzabile a destra rispetto a Π, Γ ». Se, in particolare, (n.° 15) Q e G sono rispettivamente lo pseudogruppo moltiplicativo e il semigruppo additivo di un semianello ([2], n.° 1) S, il $\mathfrak{Q}$-p.c.d. di G rispetto a $\Pi\,(\Gamma = G)$ non è altro (a meno di isomorfismi) che l'anello complementare sinistro di S rispetto a Π ([2], n.° 2). Questo concetto permette di presentare il teorema del n.° 2 sotto forma di una proporzione equivalente (n.° 11), enunciata nel n.° 1.

1. - Siano Q e G due pseudogruppi ([2], n.° 1), il primo moltiplicativo e il secondo additivo, (entrambi non necessariamente commutativi).

Supponiamo che G sia un *Q-pseudogruppo sinistro*, cioè (cfr. [3], n.° 1) che sia definito un prodotto au $(a \in Q,\ u \in G)$ tale che si abbia sempre:

I) $au \in G$,

II) $a(u + u_1) = au + au_1$,

III) $a(a_1 u) = (aa_1)u$.

Ogni sottinsieme H di G che sia a sua volta un Q-pseudogruppo sinistro (rispetto alle stesse operazioni di addizione e moltiplicazione definite risp. in G e fra Q e G) si dirà un *sotto-Q-pseudogruppo* di G, (e G si dirà un *sopra-Q-pseudogruppo* di H). Ogni tale sottinsieme è dunque additivamente chiuso e contiene tutti i multipli $a\tau$ $(a \in Q)$ di ciascun suo elemento τ.

Dello pseudogruppo Q sia Π un sotto-pseudogruppo costituito da elementi semplificabili in Q ([2], n.° 1), (ammesso naturalmente che tali elementi vi siano), ed esista uno *pseudogruppo $\mathfrak{Q}$ dei quozienti a sinistra di Q rispetto a Π*, (cioè un sopra-pseudogruppo $\mathfrak{Q}$ di Q, dotato di elemento unità, nel quale ogni elemento α di Π possiede reciproco α^{-1}, ed ogni elemento del quale è rappresentabile nella forma $\alpha^{-1}b$ con $\alpha \in \Pi$, $b \in Q$). Quindi (poichè $b\alpha^{-1} \in \mathfrak{Q}$ implica $b\alpha^{-1} = \alpha_1^{-1}b_1$) è soddisfatta la condizione:

A) Dati comunque $b \in Q$, $\alpha \in \Pi$, esistono $\alpha_1 \in \Pi$, $b_1 \in Q$ tali che $\alpha_1 b = b_1 \alpha$.

Supponiamo inoltre che nel Q-pseudogruppo sinistro G vi sia un sotto-Q-pseudogruppo Γ costituito da elementi semplificabili (rispetto all'addizione) in G e soddisfacente alla condizione:

B) Dati comunque $u \in G$, $\tau \in \Gamma$, esistono $\tau_1 \in \Gamma$, $u_1 \in G$ tali che $u + \tau_1 = \tau + u_1$.

Diremo allora che un Q-pseudogruppo sinistro $\mathfrak{G}$, estensione del Q-pseudogruppo sinistro G, è un *$\mathfrak{Q}$-pseudogruppo complementare destro* (*$\mathfrak{Q}$-p.c.d.*) *di G rispetto a* Π. Γ se esso soddisfa alle tre condizioni seguenti (cfr. [2], n.° 1, 3° capov.):

i) Il sopra-pseudogruppo (additivo) $\mathfrak{G}$ di G è dotato di zero $\bar{0}$;

ii) Ogni elemento τ di Γ possiede opposto $-\tau$ in $\mathfrak{G}$;

iii) Ogni elemento ξ di $\mathfrak{G}$ è rappresentabile nella forma $\xi = \alpha^{-1}(u - \tau)$, con $\alpha \in \Pi$, $u \in G$, $\tau \in \Gamma$.

Se una tale estensione $\mathfrak{G}$ esiste, G si dirà *complementarizzabile a destra rispetto a* Π, Γ. Si osservi che dalle i), ii) segue subito (cfr. [2], n.° 2) che, se lo pseudogruppo G è dotato di zero 0, si ha $0 = \bar{0}$.

Se in particolare Γ coincide con G, $\mathfrak{G}$ si dirà un *$\mathfrak{Q}$-pseudogruppo complementare destro* (*$\mathfrak{Q}$-p.c.d.*) *di G rispetto a* Π. Se, più in particolare ancora, $\Gamma = G$ ed inoltre Π coincide con l'insieme degli elementi semplificabili in Q, $\mathfrak{G}$ si dirà un *$\mathfrak{Q}$-p.c.d. di G*. Nel primo caso, se $\mathfrak{G}$ esiste, G si dirà *complementarizzabile a destra rispetto a* Π; nel secondo, *complementarizzabile a destra.*

Più avanti (n.° 8) dimostreremo, come prima facile conseguenza di un teorema enunciato nel successivo n.° 2, il seguente

COROLLARIO 1: *Siano soddisfatte tutte le ipotesi del teor. del n.°* 2, *con l'unica variante di supporre l'« esistenza di uno pseudogruppo $\mathfrak{Q}$ dei quozienti a sinistra di Q rispetto a* Π » *invece della « validità della condizione* A) ». *Allora, affinchè G sia complementarizzabile a destra rispetto a* Π, Γ, *è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione seguente*:

C) *Da* $\alpha u = \alpha u_1$ ($\alpha \in \Pi$, u, $u_1 \in G$) *segue sempre* $u = u_1$.

Se esiste un $\mathfrak{Q}$*-pseudogruppo complementare destro* $\mathcal{G}$ *di* G *rispetto a* Π, Γ, *esso è univocamente determinato da* G, Π, Γ, *a meno di isomorfismi.*

2. - Dimostreremo ora (n.[i] 2-7) il seguente

TEOREMA: *Di uno pseudogruppo (moltiplicativo)* Q *sia* Π *un sotto-pseudogruppo costituito da elementi semplificabili in* Q, *e valga la condizione* A). *Sia inoltre* G *un* Q*-pseudogruppo sinistro, di cui sia* Γ *un sotto-*Q*-pseudogruppo costituito da elementi semplificabili (rispetto all'addizione) in* G *e soddisfacente alla condizione* B). *In queste ipotesi, la condizione* C) *è necessaria e sufficiente affinchè di* G *esista un sopra-*Q*-pseudogruppo* $\mathcal{G}$ *soddisfacente alle due condizioni* i), ii) *ed inoltre alle due seguenti:*

j) *L'equazione nell'incognita* ξ

$$\alpha\xi = \xi_1 \qquad (\alpha \in \Pi,\ \xi_1 \in \mathcal{G}) \tag{1}$$

ammette sempre una e una sola soluzione in $\mathcal{G}$;

jj) *Ogni elemento* ξ *di* $\mathcal{G}$ *è la soluzione di un'equazione del tipo* (1), *con* $\xi_1 = u - \tau$ $(u \in G,\ \tau \in \Gamma)$.

Questo sopra-Q*-pseudogruppo* $\mathcal{G}$ *di* G, *ove esista, è univocamente determinato da* G, Π, Γ *a meno di isomorfismi.*

La necessità della condizione C) è un'immediata conseguenza della validità della j) (unicità della soluzione).

Osserveremo che, (se son soddisfatte le ipotesi del teor. ora enunciato e) se esiste un sopra-Q-pseudogruppo $\mathcal{G}$ di G soddisfacente alle quattro condizioni i), ii), j), jj), in $\mathcal{G}$ si ha sempre (si ricordi — n.° 1 — che $\tau \in \Gamma$ implica $a\tau \in \Gamma$ per ogni $a \in Q$):

$$a(u - \tau) = au - a\tau \quad (a \in Q,\ u \in G,\ \tau \in \Gamma).$$

(infatti — v. i), ii) — per la II) del n.° 1 si ha $a(u - \tau) + a\tau = a(u - \tau + \tau) = a(u + 0) = au$). Ne segue (ponendo $u = \tau$) che, in $\mathcal{G}$,

$$a0 = 0 \qquad (a \in Q),$$

e inoltre (ponendo τ, 2τ risp. al posto di u, τ):

$$a(-\tau) = -a\tau \qquad (a \in Q,\ \tau \in \Gamma).$$

Osserveremo ancora che gli elementi di $\mathfrak{G}$ della forma $u - \tau$ ($u \in G$, $\tau \in \Gamma$) costituiscono, in virtù della condizione B), uno *pseudogruppo* $\mathfrak{D}$ *delle differenze a destra dello pseudogruppo (additivo) G rispetto al suo sotto-pseudogruppo Γ* (cioè un sopra-pseudogruppo $\mathfrak{D}$ di G, dotato di zero, nel quale ogni elemento τ di Γ ammette opposto $-\tau$, ed ogni elemento del quale è rappresentabile nella forma $u - \tau$ con $u \in G$, $\tau \in \Gamma$). E infatti (u, $u_1 \in G$, τ, $\tau_1 \in \Gamma$): $u = (u + \tau) - \tau$, $0 = \tau - \tau$, $-\tau = \tau - 2\tau$, $(u - \tau) + (u_1 - \tau_1) = u + (u' - \tau') - \tau_1 = u + u' - (\tau_1 + \tau') \in \mathfrak{D}$, dove $\tau' \in \Gamma$, $u' \in G$ (certo esistenti, per la B)) son tali che $u_1 + \tau' = \tau + u'$.

Dimostriamo adesso un lemma, che ci sarà utile in seguito, sfruttando la seguente osservazione.

Nelle ipotesi del teorema di questo n.°, *le eguaglianze* $\tau + v = \tau_1 + v_1 = \sigma$, $u + v = u_1 + v_1$, $\tau + v' = \tau_1 + v_1'$ (σ, τ, $\tau_1 \in \Gamma$, u, u_1, v, v_1, v', $v'_1 \in G$) *implicano sempre* $u + v' = u_1 + v'_1$. E infatti, posto $\tau + v' = u_0$, esistono (per la condiz. B)) $u'_0 \in G$, $\sigma' \in \Gamma$ tali che $u_0 + \sigma' = \sigma + u'_0$; quindi $\tau + v' + \sigma' = \tau + v + u'_0$, $\tau_1 + v'_1 + \sigma' = \tau_1 + v_1 + u'_0$, donde (dopo aver semplificato risp. per τ, τ_1) $u + v' + \sigma' = (u + v) + u'_0 = (u_1 + v_1) + u'_0 = u_1 + v'_1 + \sigma'$, da cui appunto (semplificando per σ') $u + v' = u_1 + v'_1$.

LEMMA: *Nelle ipotesi del teorema di questo n.°, la condizione* C) *del n.°* 1 *è equivalente alla seguente*:

C') *Le eguaglianze*

$$\alpha\tau + v = \alpha\tau_1 + v_1 = \sigma, \tag{2}$$

$$\alpha u + v = \alpha u_1 + v_1, \tag{2'}$$

$$\tau + v' = \tau_1 + v_1', \tag{3}$$

dove $\alpha \in \Pi$, u, u_1, v, v_1, v', $v_1' \in G$, σ, τ, $\tau_1 \in \Gamma$, *implicano sempre*

$$u + v' = u_1 + v_1'. \tag{3'}$$

Dimostrazione: Se vale la C), poichè (per l'osservazione precedente) le (2), (2') e la $\alpha(\tau + v') = \alpha(\tau_1 + v_1')$ (dedotta dalla (3)) implicano $\alpha(u + v') = \alpha(u_1 + v_1')$, da cui segue (per la C)) la (3'), vale appunto la C'). Viceversa, se vale la C') e se $\alpha w = \alpha w_1$ ($\alpha \in \Pi$, w, $w_1 \in G$), detto τ un qualsiasi elemento di Γ, le eguaglianze (2), (2′), (3) sono evidentemente vere ove si assuma $\tau_1 = v = v_1 = v' = v_1' = \tau$, $\sigma = \alpha\tau + \tau$, $u = w + \tau$, $u_1 = w_1 + \tau$, quindi (per la C′)) è vera pure la relativa (3′), cioè $w + 2\tau = w_1 + 2\tau$, donde (semplificando per 2τ) $w = w_1$; dunque vale appunto la C).

3. - Per completare la dimostrazione della prima parte (relativa all'esistenza di $\mathfrak{S}$) del teorema enunciato nel n.° preced., supponiamo soddisfatta la condizione C) del n.° 1 (e quindi anche — v. lemma — la C′) del n.° preced.), e proponiamoci di costruire un sopra-Q-pseudogruppo del dato Q-pseudogruppo sinistro G, che soddisfi alle quattro condizioni i), ii), j), jj).

Consideriamo perciò l'insieme $\mathfrak{T}$ delle terne ordinate (α, u, τ), con $\alpha \in \Pi$, $u \in G$, $\tau \in \Gamma$, e poniamo

$$(\alpha, u, \tau) \backsim (\alpha_1, u_1, \tau_1) \tag{4}$$

se esistono sei elementi r, $r_1 \in Q$, $\beta \in \Pi$, v, $v_1 \in G$, $\sigma \in \Gamma$ tali che

$$r\alpha = r_1\alpha_1 = \beta, \tag{5}$$

$$r\tau + v = r_1\tau_1 + v_1 = \sigma, \tag{6}$$

$$ru + v = r_1u_1 + v_1 . \tag{6′}$$

Ci servirà ora il seguente

Lemma: *Nelle ipotesi del teorema del n.° 2, se è soddisfatta la condiz.* C) *del n.°* 1, *le eguaglianze* (5), (6), (6′) *e le due seguenti*:

$$r'\alpha = r_1'\alpha_1 , \tag{7}$$

$$r'\tau + v' = r_1'\tau_1 + v_1', \tag{8}$$

dove r, r_1, r', $r_1' \in Q$, α, α_1, $\beta \in \Pi$, u, u_1, v, v_1, v', $v_1' \in G$, τ, τ_1, $\sigma \in \Gamma$, *implicano*

$$r'u + v' = r_1'u_1 + v_1'. \tag{8′}$$

Dimostrazione: Posto $r'\alpha = r_1'\alpha_1 = b'$, se $g \in Q$, $\gamma \in \Pi$ son tali che (cond. A) del n.° 1) $g\beta = \gamma b'$, da questa e dalle (5),

(7) segue $gr\alpha = \gamma r'\alpha$, $gr_1\alpha_1 = \gamma r_1'\alpha_1$, da cui, semplificando, $gr = \gamma r'$, $gr_1 = \gamma r_1'$; quindi dalle (6), (6'), moltiplicate per g, si trae

$$\gamma(r'\tau) + gv = \gamma(r_1'\tau_1) + gv_1 = g\sigma, \quad \gamma(r'u) + gv = \gamma(r_1'u_1) + gv_1 .$$

Queste due eguaglianze e la (8) implicano appunto, in virtù della cond. C') (osservato che $r'\tau$, $r_1'\tau_1$, $g\sigma \in \Gamma$), la (8').

È facile adesso provare che la relazione (4), che evidentemente è riflessiva e simmetrica, è pure transitiva. Se infatti $(\alpha, u, \tau) \backsim (\alpha_1, u_1, \tau_1)$ e $(\alpha_1, u_1, \tau_1) \backsim (\alpha_2, u_2, \tau_2)$, poichè esistono r', r_1', $r_2' \in Q$, $\beta' \in \Pi$ tali che $r'\alpha = r_1'\alpha_1 = r_2'\alpha_2 = \beta'$ (e invero, per la cond. A), vi sono s, $s_1 \in Q$, $\gamma \in \Pi$ per cui $s\alpha = s_1\alpha_1 = \gamma$, e quindi pure s', $r_2' \in Q$, $\beta' \in \Pi$ per cui $s'\gamma = r_2'\alpha_2 = \beta'$) ed inoltre v', v_1', $v_2' \in G$, $\sigma' \in \Gamma$ tali che $r'\tau + v' = r_1'\tau_1 + v_1' = r_2'\tau_2 + v_2' = \sigma'$ (basta fare un ragionamento analogo, poggiato sulla cond. B)), per il lemma ora dimostrato risulta $r'u + v' = r_1'u_1 + v_1' = r_2'u_2 + v_2'$, quindi appunto $(\alpha, u, \tau) \backsim (\alpha_2, u_2, \tau_2)$. Dunque la (4) è una relazione di equivalenza in $\mathfrak{T}$.

Denotata con $[(\alpha, u, \tau)]$ la classe degli elementi di $\mathfrak{T}$ equivalenti ad (α, u, τ), e detto $\mathfrak{G}'$ l'insieme avente per elementi queste classi, in $\mathfrak{G}'$ si ha dunque la seguente *definizione di eguaglianza*:

$$[(\alpha, u, \tau)] = [(\alpha_1, u_1, \tau_1)] \tag{9}$$

se e soltanto se esistono sei elementi r, $r_1 \in Q$, $\beta \in \Pi$, v, $v_1 \in G$, $\sigma \in \Gamma$ per cui valgono le (5), (6), (6').

Si osservi che in $\mathfrak{G}'$ *si ha*

$$[(\alpha, u, \tau)] = [(r\alpha, ru, r\tau)], \tag{10}$$

qualunque sia $r \in Q$ tale che $r\alpha \in \Pi$. Infatti, $(\delta r)\alpha = \delta(r\alpha) \in \Pi$, $(\delta r)\tau + \tau' = \delta(r\tau) + \tau' \in \Gamma$, $(\delta r)u + \tau' = \delta(ru) + \tau'$, qualunque siano $\delta \in \Pi$, $\tau' \in \Gamma$. Dunque, in particolare, la (10) è vera qualunque sia $r \in \Pi$.

Se in particolare $\alpha = \alpha_1$, la (9) *è vera se e soltanto se esistono v', $v_1' \in G$, $\sigma' \in \Gamma$ tali che*

$$\tau + v' = \tau_1 + v_1' = \sigma', \quad u + v' = u_1 + v_1'. \tag{11}$$

Infatti, se la (9) è vera, le eguaglianze $\delta\alpha = \delta\alpha$ $(\delta \in \Pi)$, $\delta\tau + v = \delta\tau_1 + v_1 = \sigma$ $(v, v_1 \in G, \sigma \in \Gamma$, certo esistenti per la cond. B)) implicano, per il lemma di questo n.°, $\delta u + v = \delta u_1 + v_1$; ma poichè, d'altra parte, esistono (per la B)) v', $v_1' \in G$, $\sigma' \in \Gamma$ per cui valgono le $(11)_1$, in virtù della cond. C') vale pure la $(11)_2$. Il viceversa è immediato.

Dalla precedente osservazione risulta immediatamente che in $\mathcal{G}'$ *si ha*

$$[(\alpha, u, \tau)] = [(\alpha, u + w, \tau + w)], \tag{12}$$

qualunque sia $w \in G$ *tale che* $\tau + w \in \Gamma$; (basta infatti assumere $v' = w + \tau$, $v_1' = \tau$). Dunque in particolare la (12) è vera qualunque sia $w \in \Gamma$.

4. - Diamo in $\mathcal{G}'$ la seguente *definizione di addizione*:

$$[(\alpha, u, \tau)] + [(\alpha_1, u_1, \tau_1)] = [(\beta, ru + v, r_1\tau_1 + \sigma)], \tag{13}$$

dove $\beta \in \Pi$, r, $r_1 \in Q$ son tre elementi per cui valgono le (5) e $v \in G$, $\sigma \in \Gamma$ due elementi tali che

$$r\tau + v = r_1 u_1 + \sigma. \tag{13'}$$

La somma a 2° membro della (13) è indipendente dalla scelta dei cinque elementi $\beta \in \Pi$, r, $r_1 \in Q$, $v \in G$, $\sigma \in \Gamma$ soddisfacenti alle (5), (13') (i quali esistono certamente in virtù delle condiz. A) e B)). Infatti, se $\beta' \in \Pi$, r', $r_1' \in Q$, $v' \in G$, $\sigma' \in \Gamma$ son tali che

$$r'\alpha = r_1'\alpha_1 = \beta', \tag{14}$$

$$r'\tau + v' = r_1'u_1 + \sigma', \tag{15}$$

esistono (cond. A)) s, $s' \in Q$, $\gamma \in \Pi$ tali che

$$s\beta = s'\beta' = \gamma, \tag{16}$$

ed inoltre (cond. B)) w, $w' \in G$, $\rho \in \Gamma$ tali che

$$s(r_1\tau_1 + \sigma) + w = s'(r_1'\tau_1 + \sigma') + w' = \rho. \tag{17}$$

Poichè dalle (5), (14), (16), discende

$$sr = s'r', \quad sr_1 = s'r_1',$$

e perciò dalle (17) (semplificando per $sr_1\tau_1 = s'r_1'\tau_1 \in \Gamma$) si trae

$$s\sigma + w = s'\sigma' + w'.$$

in virtù di queste eguaglianze, dalle (13'), (15) risulta

$$\begin{aligned} sr\tau + sv + w &= sr_1u_1 + (s\sigma + w) = \\ = s'r_1'u_1 + (s'\sigma' + w') &= s'r'\tau + s'v' + w', \end{aligned}$$

donde (semplificando per $sr\tau = s'r'\tau$) $sv + w = s'v' + w'$, e quindi ($sru = s'r'u$):

$$s(ru + v) + w = s'(r'u + v') + w'. \tag{18}$$

Ora le (16), (17), (18) significano appunto (si ricordi la definiz. (9)) che $[(\beta, ru + v, r_1\tau_1 + \sigma)] = [(\beta', r'u + v', r_1'\tau_1 + \sigma')]$.

La somma a 2° membro della (13) è inoltre indipendente dalla scelta dei rappresentanti delle due classi a 1° membro. Infatti, se $[(\alpha, u, \tau)] = [(\alpha', u', \tau')]$, cioè se esistono $r, r' \in Q$, $\beta \in \Pi$, $v, v' \in G$, $\sigma \in \Gamma$ tali che

$$r\alpha = r'\alpha' = \beta, \tag{19}$$

$$r\tau + v = r'\tau' + v' = \sigma, \qquad ru + v = r'u' + v', \tag{20}$$

e se inoltre $[(\alpha_1, u_1, \tau_1)] = [(\alpha_1', u_1', \tau_1')]$, cioè se esistono $r_1, r_1' \in Q$, $\beta_1 \in \Pi$, $v_1, v_1' \in G$, $\sigma_1 \in \Gamma$ tali che

$$r_1\alpha_1 = r_1'\alpha_1' = \beta_1, \tag{21}$$

$$r_1\tau_1 + v_1 = r_1'\tau_1' + v_1' = \sigma_1, \quad r_1u_1 + v_1 = r_1'u_1' + v_1', \tag{22}$$

considerati (cond. A)) $c, c_1 \in Q$, $\gamma \in \Pi$ tali che $c\beta = c_1\beta_1 = \gamma$, da qui e dalle (19), (21) discende

$$cr\cdot\alpha = c_1r_1\cdot\alpha_1 = \gamma, \qquad cr'\cdot\alpha' = c_1r_1'\cdot\alpha_1' = \gamma. \tag{23}$$

Considerati inoltre (cond. B)) $w, w' \in G$, $\rho, \rho' \in \Gamma$ tali che

$$cr\cdot\tau + w = c_1r_1\cdot u_1 + \rho, \qquad cr'\cdot\tau' + w' = c_1r_1'\cdot u_1' + \rho', \tag{24}$$

dalle (23), (24) risulta

$$[(\alpha, u, \tau)] + [(\alpha_1, u_1, \tau_1)] = [(\gamma, cru + w, c_1r_1\tau_1 + \rho)], \tag{25}$$

$$[(\alpha', u', \tau')] + [(\alpha_1', u_1', \tau_1')] = [(\gamma, cr'u' + w', c_1r_1'\tau_1' + \rho')]. \tag{25'}$$

Per la cond. B), esistono v_0, $v_0' \in G$, $\sigma_0 \in \Gamma$ tali che

(26) $$(c_1 r_1 \tau_1 + \rho) + v_0 = (c_1 r_1' \tau_1' + \rho') + v_0' = \sigma_0 .$$

I primi due membri delle (26) e la $c_1 r_1 \cdot \alpha_1 = c_1 r_1' \cdot \alpha_1'$ (tratta dalle (21)), assieme alle (21), (22), implicano, per il lemma del n.° 3,

$$c_1 r_1 \cdot u_1 + (\rho + v_0) = c_1 r_1' \cdot u_1' + (\rho' + v_0'),$$

donde, per le (24) (addizionando, a destra, v_0, v_0' risp.),

$$cr \cdot \tau + (w + v_0) = cr' \cdot \tau' + (w' + v_0').$$

Questa e la $cr \cdot \alpha = cr' \cdot \alpha'$ (tratta dalle (19)), assieme alle (19), (20), implicano poi, sempre per il lemma del n. 3,

$$(cru + w) + v_0 = (cr'u' + w') + v_0' .$$

Questa eguaglianza e le (26), per un'osservazione del n.° 3 (penult. capov.), esprimono appunto l'eguaglianza dei 2[i] membri delle (25), (25').

Dunque, rispetto all'addizione (13), $\mathfrak{Q}'$ è un gruppoide (cfr. [3], n. 1). Si osservi che, *se in particolare* $\alpha = \alpha_1$, *si ha*

(27) $$[(\alpha, u, \tau)] + [(\alpha, u_1, \tau_1)] = [(\alpha, u + v, \tau_1 + \sigma)],$$

dove $v \in G$, $\sigma \in \Gamma$ son due elementi tali che

(27') $$\tau + v = u_1 + \sigma .$$

Basta infatti moltiplicare la (27') a sinistra per un qualunque $\gamma \in \Pi$, e poi tener conto della (10).

Rispetto all'addizione (13), $\mathfrak{Q}'$ è uno pseudogruppo (cioè vale la proprietà associativa). Infatti, posto

(28) $$\xi' = [(\alpha, u, \tau)], \quad \xi_1' = [(\alpha_1, u_1, \tau_1)], \quad \xi_2' = [(\alpha_2, u_2, \tau_2)],$$

e supposto $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ (il che è lecito, poichè, dati comunque β, β_1, $\beta_2 \in \Pi$, esistono s, s_1, $s_2 \in Q$, $\alpha \in \Pi$ tali che $s\beta = s_1\beta_1 = s_2\beta_2 = \alpha$ — cfr. n.° 3, 6° capov. —, donde la conclusione per la (10)), in base alle (27), (27'), si ha $\xi' + \xi_1' = [(\alpha, u + v, \tau_1 + \sigma)]$, e quindi

(29) $$(\xi' + \xi_1') + \xi_2' = [(\alpha, u + v + v', \tau_2 + \sigma')],$$

dove $v' \in G$, $\sigma' \in \Gamma$ son tali che

$$(29') \qquad (\tau_1 + \sigma) + v' = u_2 + \sigma'.$$

D'altra parte, poichè (per la (12)) $\xi_1' = [(\alpha, u_1 + \sigma, \tau_1 + \sigma)]$, dalla (29') si trae

$$\xi_1' + \xi_2' = [(\alpha, u_1 + \sigma + v', \tau_2 + \sigma')],$$

e quindi dall'eguaglianza (tratta dalla (27')):

$$\tau + (v + v' + \rho) = (u_1 + \sigma + v') + \rho,$$

dove ρ è un qualsiasi elemento di Γ, discende

$$(30) \quad \xi' + (\xi_1' + \xi_2') = [(\alpha, u + v + v' + \rho, \tau_2 + \sigma' + \rho)].$$

Dal confronto delle (29), (30), risulta dunque, per la (12), l'asserto.

Osserviamo ora che, *se in particolare $u = \tau$, la* (9) *è vera se e soltanto se $u_1 = \tau_1$*. Infatti, poichè esistono certamente (per le condiz. A) e B)) $r, r_1 \in Q$, $\beta \in \Pi$, $v, v_1 \in G$, $\sigma \in \Gamma$ per cui valgono le (5), (6), se ($u = \tau$ ed) $u_1 = \tau_1$ vale evidentemente anche la (6'). Viceversa, se la (9) è vera, esistendo (per le condiz. A) e B)) $r' \in Q$, $r_1' = \gamma \in \Pi$, $v' \in G$, $v_1' = \rho \in \Gamma$ per cui valgono le (7), (8), in virtù del lemma del n. 3 vale pure la (8'); quindi dalle (8), (8') (poichè $u = \tau$) si deduce $\gamma u_1 + \rho = \gamma\tau_1 + \rho$, donde appunto (semplificando per ρ e ricordando la cond. C)) $u_1 = \tau_1$.

L'elemento $0' = [(\alpha, \tau, \tau)]$ di $\mathcal{G}'$ (che, in base alla precedente osservazione, non dipende dai particolari elementi $\alpha \in \Pi$ $\tau \in \Gamma$) ne è lo *zero* (cfr. [2], n.° 1, 3° capov.). Infatti, se $\xi' = [(\alpha, u, \tau)]$ è un qualsiasi elemento di $\mathcal{G}'$, per le (27), (12) si ha appunto $\xi' + 0' = [(\alpha, u + \tau, \tau + \tau)] = \xi'$, e inoltre, se $v \in G$ e $\sigma \in \Gamma$ son tali che $\tau + v = u + \sigma$, $0' + \xi' = [(\alpha, \tau + v, \tau + \sigma)] = \xi'$, poichè (per quanto riguarda l'ultimo passo) le (11) son soddisfatte assumendo $\tau_1 = \tau + \sigma$, $v' = \sigma + \sigma$, $v_1' = \sigma$, $\sigma' = \tau + 2\sigma$, $u_1 = \tau + v$.

Osserviamo ancora che, *se in particolare $u = \alpha w + \tau$* ($w \in G$), *la* (9) *è vera se e soltanto se $u_1 = \alpha_1 w + \tau_1$*. Infatti la (6'), con $u = \alpha w + \tau$, $u_1 = \alpha_1 w + \tau_1$, è soddisfatta qualunque siano

$r,\ r_1 \in Q,\ \beta \in \Pi,\ v,\ v_1 \in G,\ \sigma \in \Gamma$ soddisfacenti alle (5), (6). Viceversa, se la (9) è vera, esistendo (come si è già visto a proposito della preced. osservazione) $r' \in Q,\ r_1' = \gamma \in \Pi,\ v' \in G,\ v_1' = \rho \in \Gamma$ per cui valgono le (7), (8), (8'), da questa (8') (con $u = \alpha w + \tau$), cioè dalla $r'(\alpha w + \tau) + v' = \gamma u_1 + \rho$, per le (7), (8) si trae $\gamma\alpha_1 w + \gamma\tau_1 + \rho = \gamma u_1 + \rho$, donde appunto (semplificando per ρ e poi applicando la C)) $u_1 = \alpha_1 w + \tau_1$.

Ne segue che l'elemento $[(\alpha,\ \alpha w + \tau,\ \tau)]$ di $\mathcal{G}'$ non dipende dai particolari elementi $\alpha \in \Pi,\ \tau \in \Gamma$. Posto allora

$$[(\alpha,\ \alpha w + \tau,\ \tau)] \in G' \qquad (w \in G), \tag{31}$$

si vede facilmente che la corrispondenza

$$w \to [(\alpha,\ \alpha w + \tau,\ \tau)], \tag{32}$$

fra G e il sottoinsieme G' di $\mathcal{G}'$, è biunivoca. E infatti (l'univocità è evidente, in base alla preced. osservazione), se $[(\alpha,\ \alpha w + \tau,\ \tau)] = [(\alpha,\ \alpha w_1 + \tau,\ \tau)]$, valgono allora le (11), dove (poichè ora $\tau = \tau_1$, ricordando una osservazione fatta al n.° 2 — subito prima del lemma —) possiamo supporre $v' = v_1' = \rho \in \Gamma$, cioè (essendo ora $u = \alpha w + \tau,\ u_1 = \alpha w_1 + \tau$) si ha $\alpha w + \tau + \rho = \alpha w_1 + \tau + \rho$, quindi (semplificando) $\alpha w = \alpha w_1$, donde appunto (per la C)) $w = w_1$.

La (32) subordina una corrispondenza biunivoca fra Γ e Γ', avèndo posto

$$[(\alpha,\ \alpha\rho + \tau,\ \tau)] \in \Gamma' \qquad (\rho \in \Gamma). \tag{33}$$

Ogni elemento $\zeta' = [(\alpha,\ \alpha\rho + \tau,\ \tau)]$ di questo sottinsieme Γ' di $\mathcal{G}'$ è dotato di *opposto*, che è precisamente $\zeta_0' = [(\alpha,\ \tau,\ \alpha\rho + \tau)]$. Si verifica infatti immediatamente, in base alla (27), che $\zeta' + \zeta_0' = \zeta_0' + \zeta' = 0'$.

Concludendo: *Rispetto alle definizioni* (9), (13), *l'insieme* $\mathcal{G}'$ *delle classi* $[(\alpha,\ u,\ \tau)]$ *è uno pseudogruppo, dotato di zero* $0'$, *in cui ogni elemento del sottinsieme* Γ' (*v.* (33)) *ammette opposto.*

5. - Si osservi che, se lo pseudogruppo G è dotato di *zero* $\bar{0}$, si ha $a\bar{0} = \bar{0}$, qualunque sia $a \in Q$ (infatti, se $\tau \in \Gamma$, $a\bar{0} + a\tau =$

$= a(0+\tau) = a\tau = 0 + a\tau$, donde l'asserto, semplificando per $a\tau \in \Gamma$), e quindi nella (32) si corrispondono 0 e $0'$.

Se l'addizione in G è commutativa, tale è pure la (13) *in* $\mathcal{G}'$. Infatti, se lo pseudogruppo G è commutativo, la definizione (13) diventa (assumendo nella (13') $v = r_1 u_1$, $\sigma = r\tau$):

$$(34)\quad [(\alpha,\ u,\ \tau)] + [(\alpha_1,\ u_1,\ \tau_1)] = [(\beta,\ ru + r_1 u_1,\ r\tau + r_1\tau_1)],$$

dove $\beta \in \Pi$, r, $r_1 \in Q$ soddisfano alle (5).

Se lo pseudogruppo G è un semigruppo ([2]), n.° 1), *anche* $\mathcal{G}'$ *è un semigruppo.* Infatti, se G è un semigruppo, fatte le posizioni (28) e supposto (com'è lecito, in base a due osservazioni fatte nel 6° capov. del n.° 3 ed alle (10), (12)) $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, $\tau = \tau_1 = \tau_2$, se $\xi' + \xi_1' = \xi' + \xi_2'$, cioè (v. (27), (11)) se

$$(35)\qquad \tau + v_1 = u_1 + \sigma_1, \qquad \tau + v_2 = u_2 + \sigma_2,$$

$$(36)\quad \tau + \sigma_1 + v_1' = \tau + \sigma_2 + v_2', \qquad u + v_1 + v_1' = u + v_2 + v_2',$$

con v_1, v_2, v_1', $v_2' \in G$, σ_1, $\sigma_2 \in \Gamma$, dalla $(36)_2$, semplificato per u, si trae $\tau + v_1 + v_1' = \tau + v_2 + v_2'$, donde, per le (35), $u_1 + (\sigma_1 + v_1') = u_2 + (\sigma_2 + v_2')$, da cui $u_1 = u_2$ e quindi appunto $\xi_1' = \xi_2'$, poichè dalla $(36)_1$ si trae $\sigma_1 + v_1' = \sigma_2 + v_2'$. Se invece $\xi_1' + \xi' = \xi_2' + \xi'$, cioè (v. (27)) se

$$(37)\qquad [(\alpha,\ u_1 + v,\ \tau + \sigma)] = [(\alpha,\ u_2 + v,\ \tau + \sigma)],$$

con $v \in G$, $\sigma \in \Gamma$ (tali che $\tau + v = u + \sigma$), dalla (37) segue (v. 11)) $u_1 + w = u_2 + w$ con $w \in G$, donde $u_1 = u_2$ e quindi appunto $\xi_1' = \xi_2'$.

Se G coincide con Γ, $\mathcal{G}'$ *è un gruppo.* Infatti, se $G = \Gamma$, è immediato verificare (in base alla (27)) che $[(\alpha,\ \tau,\ u)]$ è l'opposto di $[(\alpha,\ u,\ \tau)]$.

Se lo pseudogruppo G è un gruppo, anche $\mathcal{G}'$ *è un gruppo.* Infatti, se G è un gruppo, considerato un qualsiasi elemento $\xi' = [(\alpha,\ u,\ \tau)]$ di $\mathcal{G}'$, è sempre possibile trovare un $v \in G$ tale che $u + v \in \Gamma$ (basta risolvere in G l'equazione $u + x = \sigma$, con $\sigma \in \Gamma$); ebbene, l'elemento $[(\alpha,\ \tau + v,\ u + v)]$ di $\mathcal{G}'$ è appunto l'opposto di ξ' (come subito si verifica in base alla (27)).

Osserveremo esplicitamente che, se G è un gruppo, la condizione B) (n.° 1) è automaticamente soddisfatta per ogni sotto-Q-pseudogruppo Γ di G (anzi addirittura per ogni sottinsieme — non vuoto — di G). Infatti, dati comunque $u \in G$, $\tau \in \Gamma$, se τ_1 è un qualsiasi elemento di Γ, basta considerare la soluzione $x = u_1 \in G$ dell'equazione $u + \tau_1 = \tau + x$.

6. - Diamo ora la seguente *definizione di moltiplicazione di* $b \in Q$ *per* $[(\alpha, u, \tau)] \in \mathcal{G}'$:

(38) $$b \cdot [(\alpha, u, \tau)] = [(\gamma, gu, g\tau)],$$

dove $\gamma \in \Pi$, $g \in Q$ son due elementi tali che

(38') $$\gamma b = g\alpha.$$

Il prodotto a 2° membro della (38) è indipendente dalla scelta dei due elementi $\gamma \in \Pi$, $g \in Q$ soddisfacenti alla (38') (che certo esistono per la cond. A)). Se infatti si ha $\gamma_1 b = g_1 \alpha$ ($\gamma_1 \in \Pi$, $g_1 \in Q$), considerati (cond. A)) $s, s_1 \in Q$ tali che

(39) $$s\gamma = s_1\gamma_1 \in \Pi,$$

risulta $s\gamma b = s_1\gamma_1 b$, $sg\alpha = s_1 g_1 \alpha$, donde (semplificando per α) $sg = s_1 g_1$, e quindi $sgu = s_1 g_1 u$, $sg\tau = s_1 g_1 \tau$. Queste due ultime eguaglianze e la (39) provano appunto, in virtù della (10), che $[(\gamma, gu, g\tau)] = [(\gamma_1, g_1 u, g_1 \tau)]$.

Inoltre da $b = b'$, $[(\alpha, u, \tau)] = [(\alpha', u', \tau')]$ segue $b[(\alpha, u, \tau)] = b'[(\alpha', u', \tau')]$. Infatti, se $\gamma' \in \Pi$, $g' \in Q$ son tali che $\gamma' b' = g'\alpha'$, considerati $r, r' \in Q$, $\beta \in \Pi$ tali che $r\gamma = r'\gamma' = \beta$, poichè (v. (38')) $r\gamma b = rg\alpha$, $r'\gamma' b' = r'g'\alpha'$, si ottiene (essendo $b = b'$) $\beta b = rg \cdot \alpha = r'g' \cdot \alpha'$, donde

(40) $$b[(\alpha, u, \tau)] = [(\beta, rgu, rg\tau)], \quad b'[(\alpha', u', \tau')] = [(\beta, r'g'u', r'g'\tau')].$$

Ora i 2ⁱ membri delle (40) sono appunto eguali (v. (11)), poichè, considerati (cond. B)) $v, v' \in G$, $\sigma \in \Gamma$ tali che $rg\tau + v = r'g'\tau' + v' = \sigma$, queste eguaglianze e le $rg\alpha = r'g'\alpha'$, $[(\alpha, u, \tau)] = [(\alpha', u', \tau')]$, implicano, per il lemma del n. 3, $rgu + v = r'g'u' + v'$.

Rispetto alle definizioni (9), (13), (38), $\mathcal{G}'$ è un Q-pseudogruppo sinistro. Infatti (si tratta di verificare la validità delle II), III) del n. 1, ove si legga ξ', ξ_1' invece di u, u_1), quanto

alla II), fatte le posizioni (28) e supposto (com'è lecito) $\alpha = \alpha_1$, se $\gamma \in \Pi$, $g \in Q$ soddisfano alla (38') e $v \in G$, $\sigma \in \Gamma$ alla (27') (e quindi $g\tau + gv = gu_1 + g\sigma$), risulta appunto ($b \in Q$):

$$b(\xi' + \xi_1') = b[(\alpha, u + v, \tau_1 + \sigma)] = [(\gamma, gu + gv, g\tau_1 + g\sigma)] =$$
$$= [(\gamma, gu, g\tau)] + [(\gamma, gu_1, g\tau_1)] = b\xi' + b\xi_1'.$$

Quanto alla III), ξ', b, γ, g avendo il significato precedente e considerato $b_1 \in Q$, se $\gamma_1 \in \Pi$, $g_1 \in Q$ son tali che $\gamma_1 b_1 = g_1 \gamma$ (e quindi $\gamma_1 \cdot b_1 b = g_1 \gamma b = g_1 g \cdot \alpha$), si trova appunto

$$b_1(b\xi') = [(\gamma_1, g_1 gu, g_1 g\tau)] = (b_1 b)\xi'.$$

Il Q-pseudogruppo sinistro $\mathcal{G}'$ soddisfa alla condizione C) del n. 1 (ove si legga ξ', $\xi_1' \in \mathcal{G}'$ invece di u, $u_1 \in G$). Infatti, fatte le posizioni (28) e supposto (com'è lecito: cfr. n.° 5, 3° capov.) $\alpha = \alpha_1$, $\tau = \tau_1$, da $\beta\xi' = \beta\xi_1'$ ($\beta \in \Pi$), se $\gamma \in \Pi$, $g \in Q$ son tali che

$$(41) \qquad \gamma\beta = g\alpha,$$

segue $[(\gamma, gu, g\tau)] = [(\gamma, gu_1, g\tau)]$, e di qui (v. (11)) l'esistenza di v, $v_1 \in G$ ($v = v_1$), $\sigma \in \Gamma$ tali che

$$(42) \qquad g\tau + v = g\tau + v_1 = \sigma, \qquad gu + v = gu_1 + v_1.$$

Dalle (42), per l'osservazione che precede il lemma del n.° 2, si trae $gu + \rho = gu_1 + \rho$, qualunque sia $\rho \in \Gamma$, e quindi

$$(43) \qquad gu = gu_1.$$

Poichè (per la (41)) $g\alpha \in \Pi$, esistono (cond. A)) $a \in Q$, $\delta \in \Pi$ tali che $a \cdot g\alpha = \delta\alpha$, donde (semplificando per α) $ag \in \Pi$; ma allora l'eguaglianza $agu = agu_1$ (conseguenza della (43)) implica (per la cond. C)) $u = u_1$ e quindi appunto $\xi' = \xi_1'$.

L'equazione nell'incognita ξ

$$(44) \qquad \beta\xi = \xi' \qquad (\beta \in \Pi, \ \xi' \in \mathcal{G}')$$

ammette sempre una ed una sola soluzione in $\mathcal{G}'$. Se $\xi' = [(\alpha, u, \tau)]$, questa è infatti $[(\alpha\beta, u, \tau)]$, come subito si verifica in base alle (38), (38') ($\gamma = \alpha^2$, $g = \alpha$) ed alla (10). L'unicità è conseguenza della validità in $\mathcal{G}'$ della condiz. C) (dimostrata nel preced. capov.).

Quindi in particolare l'equazione (nell'incognita ξ)

$$\beta\xi = a\xi' \qquad (\beta \in \Pi,\ a \in Q,\ \xi' \in \mathcal{G}') \tag{45}$$

ha sempre una (e una sola) soluzione $\xi = \xi_0' \in \mathcal{G}'$. Se $\xi' = [(\alpha, u, \tau)]$, si ha precisamente

$$\xi_0' = [(\gamma\beta, gu, g\tau)], \tag{45'}$$

dove $\gamma \in \Pi$, $g \in Q$ son tali che $\gamma a = g\alpha$.

Ogni elemento $[(\alpha, u, \tau)]$ di $\mathcal{G}'$ è la soluzione di un'equazione del tipo (44), e precisamente della seguente:

$$\alpha\xi = [(\alpha, \alpha u, \alpha\tau)]; \tag{46}$$

si osservi che (in base alle (27), (12) e al penult. capov. del n.° 4):

$$\begin{aligned}[(\alpha, \alpha u, \alpha\tau)] &= [(\alpha, \alpha u + \tau, \tau)] + [(\alpha, \tau, \alpha\tau + \tau)] = \\ &= [(\alpha, \alpha u + \tau, \tau)] - [(\alpha, \alpha\tau + \tau, \tau)].\end{aligned} \tag{46'}$$

7. - Dai n.[i] 3-6 risulta dunque che, ***in base alle definizioni*** (9), (13), (38), ***l'insieme*** $\mathcal{G}'$ (*n.°* 3) ***delle classi di equivalenza*** $[(\alpha, u, \tau)]$ (*con* $\alpha \in \Pi$, $u \in G$, $\tau \in \Gamma$) ***è un*** Q***-pseudogruppo sinistro, la cui parte additiva è dotata di zero, e nel quale ogni elemento del sottinsieme*** Γ' (*v.* (33)) ***possiede opposto. In*** $\mathcal{G}'$ ***l'equazione*** (44) ***ammette sempre una e una sola soluzione, ed ogni elemento*** $[(\alpha, u, \tau)]$ ***di*** $\mathcal{G}'$ ***è la soluzione di un'equazione del tipo*** (44) (***precisamente della*** (46)).

La corrispondenza biunivoca (32), considerata nel n.° 4 fra il dato Q-pseudogruppo sinistro G e il sottinsieme G' di $\mathcal{G}'$ definito dalla (31), è un Q-isomorfismo; posto

$$\eta_i' = [(\alpha, \alpha w_i + \tau, \tau)] \qquad (i = 1, 2),$$

si ha cioè

$$w_1 + w_2 \to \eta_1' + \eta_2', \quad bw_1 \to b\eta_1', \tag{47}$$

qualunque siano $\eta_i' \in G'$, $b \in Q$. Infatti, quanto alla $(47)_1$, se $v \in G$, $\sigma \in \Gamma$ son tali che $\tau + v = (\alpha w_2 + \tau) + \sigma$, per la (27) si ha appunto $\eta_1' + \eta_2' = [(\alpha,\ \alpha w_1 + \tau + v,\ \tau + \sigma)] = [(\alpha,\ \alpha(w_1 + w_2) + \tau + \sigma,\ \tau + \sigma)]$. Quanto alla $(47)_2$, se $\gamma \in \Pi$, $g \in Q$ soddisfano alla (38′), per la (38) si ha appunto $b\eta_1' = [(\gamma,\ g\alpha w_1 + g\tau,\ g\tau)] = [(\gamma,\ \gamma \cdot b w_1 + g\tau,\ g\tau)]$.

Dunque G' è un sotto-Q-pseudogruppo di $\mathcal{G}'$. Posto

$$\mathcal{G} = (\mathcal{G}' \dot{-} G') \dot{+} G, \tag{48}$$

detta Φ la corrispondenza biunivoca fra $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ che subordina l'identità su $\mathcal{G}' \dot{-} G'$ e il Q-isomorfismo (32) fra G e G', si definiscano un'addizione in $\mathcal{G}$ e una moltiplicazione fra Q e $\mathcal{G}$ in modo che Φ sia un Q-isomorfismo; allora $\mathcal{G}$ diventa un sopra-Q-pseudogruppo di G.

Questo sopra-Q-pseudogruppo $\mathcal{G}$ di G soddisfa appunto alle quattro condizioni i), ii), j), jj) (dei n.[i] 1,2). Infatti $\mathcal{G}$ è Q-isomorfo (mediante la corrispondenza Φ) a $\mathcal{G}'$, il quale soddisfa già a quelle quattro condizioni, ove si legga $\mathcal{G}'$, G', Γ', risp. invece di $\mathcal{G}$, G, Γ, ($\mathcal{G}'$, G', Γ' essendo risp. proprio le immagini di $\mathcal{G}$, G, Γ nel Q-isoforfismo Φ — v. terzult. capov. del n.° 4 —).

Supponiamo ora che (essendo soddisfatte le ipotesi del teor. del n.° 2) $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ siano due sopra-Q-pseudogruppi di G soddisfacenti alle quattro condizioni i), ii), j), jj) (ove si legga $\mathcal{G}_t$ invece di $\mathcal{G}$, $t = 1, 2$), e verifichiamo che $\mathcal{G}_1$ è Q-isomorfo a $\mathcal{G}_2$ Infatti la corrispondenza Ψ fra $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ ottenuta associando gli elementi che sono soluzioni di una medesima equazione del tipo

$$\alpha\xi = u - \tau \qquad (\alpha \in \Pi,\ u \in G,\ \tau \in \Gamma) \tag{49}$$

è appunto un Q-isomorfismo. Ciò si riconosce facilmente (ricordata un'osservazione fatta nel n.° 2 — 2° capov. dopo l'enunciato del teor. —) osservando che, sia in $\mathcal{G}_1$ che in $\mathcal{G}_2$, affinchè la (49) e l'equazione dello stesso tipo:

$$\alpha_1\xi_1 = u_1 - \tau_1 \qquad (\alpha_1 \in \Pi,\ u_1 \in G,\ \tau_1 \in \Gamma) \tag{49′}$$

abbiano soluzioni, ξ, ξ_1, eguali è necessario e sufficiente che valga la (4), (quindi la Ψ è biunivoca); mentre, ξ, $\xi_1 \in \mathcal{G}_t$ $(t = 1, 2)$ essendo risp. soluzioni delle (49), (49′), se $\beta \in \Pi$, r,

$r_1 \in Q$, $v \in G$, $\sigma \in \Gamma$ soddisfano alle (5), (13′) e $\gamma \in \Pi$, $g \in Q$ alla (38′) ($b \in Q$), sia in $\mathfrak{G}_1$ che in $\mathfrak{G}_2$ si ha

$$\beta(\xi + \xi_1) = ru + v - (r_1\tau_1 + \sigma), \qquad \gamma(b\xi) = gu - g\tau,$$

(quindi la Ψ è proprio un Q-isomorfismo).

Il teor. del n.° 2 è dunque completamente dimostrato.

8. - Dal penult. capov. del n.° preced. risulta che, (se sono soddisfatte le ipotesi del teor. del n.° 2 e) se esiste un sopra-Q-pseudogruppo $\mathfrak{G}$ di G soddisfacente alle quattro condizioni i), ii), j), jj), rappresentato col simbolo

$$\alpha^{-1}(u - \tau) \tag{50}$$

l'elemento ξ di $\mathfrak{G}$ soluzione dell'equazione (49), in $\mathfrak{G}$ valgono le seguenti regole di calcolo:

$$\alpha^{-1}(u - \tau) = \alpha_1^{-1}(u_1 - \tau_1) \tag{51}$$

se e soltanto se vale la (4);

$$\alpha^{-1}(u - \tau) + \alpha_1^{-1}(u_1 - \tau_1) = \beta^{-1}(ru + v - (r_1\tau_1 + \sigma)), \tag{52}$$

dove $\beta \in \Pi$, r, $r_1 \in Q$, $v \in G$, $\sigma \in \Gamma$ soddisfano alle (5), (13′);

$$b \cdot \alpha^{-1}(u - \tau) = \gamma^{-1}(gu - g\tau), \tag{53}$$

dove $\gamma \in \Pi$, $g \in Q$ soddisfano alla (38′) ($b \in Q$).

Ritenendo sempre soddisfatte le ipotesi del teor. del n.° 2, supponiamo ora che esista uno pseudogruppo $\mathfrak{Q}$ dei quozienti a sinistra di Q rispetto a Π (n. 1). Fatta l'ulteriore ipotesi che valga la cond. C) del n.° 1, esiste (teor. del n.° 2) un sopra-Q-pseudogruppo $\mathfrak{G}$ di G soddisfacente alle i), ii), j), jj). Se $x = \delta^{-1}d$, ξ_1 son due qualsiasi elementi di $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{G}$ risp. ($\delta \in \Pi$, $d \in Q$), la soluzione $\xi \in \mathfrak{G}$ dell'equazione

$$\delta\xi = d\xi_1 \tag{54}$$

(certo esistente per la j)) è univocamente determinata dalla coppia ordinata (x, ξ_1). Infatti è immediato verificare (tenendo conto della cond. A) e della j) — unicità della soluz. —) che, se $\delta^{-1}d = \delta_1^{-1}d_1$ in $\mathfrak{Q}$ ($\delta_1 \in \Pi$, $d_1 \in Q$), l'eguaglianza (54) implica (in $\mathfrak{G}$) $\delta_1\xi = d_1\xi_1$; (e invero, poichè esistono $b \in Q$, $\beta_1 \in \Pi$

tali che $b\delta = \beta_1\delta_1$, in $\mathfrak{Q}$ si ha $bd = b\delta\delta_1^{-1}d_1 = \beta_1 d_1$, quindi $b\delta\xi = bd\xi_1$ in $\mathfrak{G}$ implica $\beta_1\delta_1\xi = \beta_1 d_1\xi_1$, donde l'asserto). Ebbene, chiameremo la soluzione $\xi \in \mathfrak{G}$ dell'equazione (54) il *prodotto* di $x = \delta^{-1}d \in \mathfrak{Q}$ per $\xi_1 \in \mathfrak{G}$, e la denoteremo col simbolo $x\xi_1$:

$$(54') \qquad \xi = (\delta^{-1}d)\xi_1 .$$

È assai facile verificare (sempre in base alle cond. j) ed A)) che la moltiplicazione (univoca) così definita fra $\mathfrak{Q}$ e $\mathfrak{G}$ subordina fra Q e $\mathfrak{G}$ la moltiplicazione preesistente e che son soddisfatte le II), III) del n.° 1, cioè che si ha sempre:

$$(55) \qquad x(\xi_1 + \xi_2) = x\xi_1 + x\xi_2 , \qquad x(x_1\xi_1) = (xx_1)\xi_1 ,$$

dove x, $x_1 \in \mathfrak{Q}$, ξ_1, $\xi_2 \in \mathfrak{G}$; (e invero $\delta\xi = \delta d\xi_1$ implica appunto $\xi = d\xi_1$; da $\delta\xi = d\xi_1$, $\delta\xi' = d\xi_2$ segue appunto $\delta(\xi + \xi') = d(\xi_1 + \xi_2)$; posto $x_1 = \delta_1^{-1}d_1$, poichè in $\mathfrak{Q}$ si ha $xx_1 = (\gamma_1\delta)^{-1}cd_1$ con $\gamma_1 \in \Pi$, $c \in Q$ tali che $\gamma_1 d = c\delta_1$, in $\mathfrak{G}$ da $\gamma_1\delta\eta' = cd_1\xi_1$, $\delta_1\eta = d_1\xi_1$ con η', $\eta \in \mathfrak{G}$ segue $\gamma_1\delta\eta' = c\delta_1\eta = \gamma_1 d\eta$, donde $\delta\eta' = d\eta$, cioè appunto $\eta' = x\eta$). Dunque il Q-pseudogruppo sinistro $\mathfrak{G}$, mediante l'ampliamento (54') della sua moltiplicazione, viene esteso ad un $\mathfrak{Q}$-pseudogruppo sinistro, che risulta proprio un $\mathfrak{Q}$-pseudogruppo complementare destro di G rispetto a Π, Γ. Infatti la iii) del n. 1 è soddisfatta, poichè, se vale la (49) con $\xi \in \mathfrak{G}$, qualunque sia $\delta \in \Pi$ si ha $\delta\alpha \cdot \xi = \delta(u - \tau)$, cioè appunto $\xi = \alpha^{-1}(u - \tau)$ secondo la (54'). Ad estensione avvenuta, l'elemento di $\mathfrak{G}$ già rappresentato col simbolo (50) è dunque proprio il prodotto di $\alpha^{-1} \in \mathfrak{Q}$ per $u - \tau \in \mathfrak{G}$. Dalla iii) e dalla $(55)_2$ discende poi evidentemente che

$$(56) \qquad 1 \cdot \xi = \xi,$$

qualunque sia $\xi \in \mathfrak{G}$, 1 denotando l'elemento unità di $\mathfrak{Q}$.

Si osservi ora che, (se sono soddisfatte le ipotesi del coroll. 1 e) se $\mathfrak{G}$ è un qualsiasi $\mathfrak{Q}$-p.c.d. di G rispetto a Π, Γ (supposto esistente) in esso valgono (si ricordi la iii)) le regole di calcolo (51), (52) e la seguente regola di moltiplicazione di $x = \delta^{-1}d \in \mathfrak{Q}$ ($\delta \in \Pi$, $d \in Q$) per $\xi_1 = \alpha_1^{-1}(u_1 - \tau_1) \in \mathfrak{G}$:

$$(57) \qquad (\delta^{-1}d) \cdot \alpha_1^{-1}(u_1 - \tau_1) = (\lambda\delta)^{-1}(cu_1 - c\tau_1),$$

dove $\lambda \in \Pi$, $c \in Q$ son tali che

(57') $$\lambda d = c\alpha_1 .$$

Tanto basta per concludere che due qualsiasi $\mathfrak{Q}$-p.c.d. $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ di G rispetto a Π, Γ sono $\mathfrak{Q}$-isomorfi (attraverso la corrispondenza che associa gli elementi ammettenti una medesima rappresentazione $\alpha^{-1}(u - \tau)$).

Per quanto detto in questo n.° 8, il coroll. 1) (n.° 1) è dunque dimostrato.

9. - I simboli Q, Π, G, Γ abbiano il significato detto nell'enunciato del teor. del n.° 2, e si supponga che Q sia la parte moltiplicata di un anello $R (= Q)$. Allora, se esiste un *anello $\mathfrak{R}$ dei quozienti a sinistra di R rispetto a* Π (cioè un sopra-anello $\mathfrak{R}$ di R, dotato di elemento unità, nel quale ogni elemento α di Π possiede reciproco α^{-1}, ed ogni elemento del quale è rappresentabile nella forma $\alpha^{-1}b$ con $\alpha \in \Pi$, $b \in R$), è chiaro che la parte moltiplicativa $\mathfrak{Q}$ di $\mathfrak{R}$ non è altro che uno pseudogruppo dei quozienti a sinistra dello pseudogruppo Q rispetto a Π (n.° 1).

Nell'ipotesi che Q sia un anello, dicendo che G è un *Q-pseudogruppo sinistro* intenderemo che, oltre alle I), II), III) del n.° 1, valga pure la:

IV) $(a + a_1)u = au + a_1u.$

Se Γ è contenuto nel *centro* G_0 ([6], p. 40) dello pseudogruppo G (nel qual caso la condiz. B) è automaticamente soddisfatta: $u_1 = u$, $\tau_1 = \tau$), si vede subito che, se Q è (la parte moltiplicativa di) un anello, il teor. del n.° 2 è valido nel senso della definizione del preced. capoverso. Per il che basta verificare che allora, nell'estensione $\mathfrak{G}$ di G (di cui, se vale la cond. C) il teor. del n.° 2 afferma l'esistenza), la moltiplicazione (53) soddisfa anche alla IV). E infatti, dati $\xi = \alpha^{-1}(u - \tau) \in \mathfrak{G}$, b, $b_1 \in Q$, e scelti γ, $\gamma_1 \in \Pi$, g, $g_1 \in Q$ tali che

(58) $$\gamma b = g\alpha , \qquad \gamma_1 b_1 = g_1 \alpha ,$$

risulta $b\xi = \gamma^{-1}(gu - g\tau)$, $b_1\xi = \gamma_1^{-1}(g_1u - g_1\tau)$ e quindi appunto, se r, $r_1 \in Q$, $\beta \in \Pi$ son tali che $r\gamma = r_1\gamma_1 = \beta$, (essendo

$rg\tau + v = r_1 g_1 u + \sigma$, con $v = r_1 g_1 u$, $\sigma = rg\tau$):

$$b\xi + b_1\xi = \beta^{-1}((rg + r_1g_1)u - (rg + r_1g_1)\tau) = (b + b_1)\xi,$$

poichè si ha (v. (58)): $\beta b = r\gamma b = rg\alpha$, $\beta b_1 = r_1\gamma_1 b_1 = r_1 g_1 \alpha$, $\beta(b + b_1) = (rg + r_1g_1)\alpha$.

È allora immediato verificare che, nelle ipotesi del preced. capov. (cioè Q anello e $\Gamma \subseteq G_0$), se esiste un anello $\mathfrak{R}$ dei quozienti a sinistra di $R = Q$ rispetto a Π la moltiplicazione (54′) soddisfa anche alla IV), cioè (con le notazioni del n.° preced.) alla:

$$(x + x_1)\xi_1 = x\xi_1 + x_1\xi_1 :$$

(e invero, poichè in $\mathfrak{R}$ si ha $x + x_1 = \delta^{-1}d + \delta_1^{-1}d_1 = \delta_0^{-1}(ad + a_1d_1)$, con $a, a_1 \in Q$, $\delta_0 \in \Pi$ tali che $a\delta = a_1\delta_1 = \delta_0$, in $\mathfrak{G}$ da $\delta\xi = d\xi_1$, $\delta_1\eta = d_1\xi_1$ segue appunto $\delta_0(\xi + \eta) = (ad + a_1d_1)\xi_1$). D'altra parte è evidente cosa debba ora intendersi per un *$\mathfrak{R}$-pseudogruppo complementare destro* (*$\mathfrak{R}$-p.c.d.*) *di G rispetto a* Π, Γ, (basta, nella definizione di $\mathfrak{Q}$-p.c.d. data nel n.° 1, leggere $\mathfrak{R}$, R invece risp. di $\mathfrak{Q}$, Q).

Concludendo, dal teor. del n.° 2 discendono subito le due proposizioni seguenti:

COROLLARIO 2: *Di un anello R sia* Π *un sottinsieme moltiplicativamente chiuso e costituito da elementi semplificabili in R rispetto alla moltiplicazione, e valga la condizione* A) (*n.°* 1), *ove si legga R invece di Q. Sia inoltre G un R-pseudogruppo sinistro, di cui sia* Γ *un sotto-R-pseudogruppo costituito da elementi semplificabili* (*rispetto all'addizione*) *in G e contenuto nel centro dello pseudogruppo G. In queste ipotesi, la condizione* C) *del n.°* 1 *è necessaria e sufficiente affinchè di G esista un sopra-R-pseudogruppo $\mathfrak{G}$ soddisfacente alle quattro condizioni* i), ii), j), jj) (*n.i* 1, 2), *ove si legga R invece di Q. Se $\mathfrak{G}$ esiste, esso è univocamente determinato a meno di isomorfismi.*

COROLLARIO 2′: *Siano soddisfatte tutte le ipotesi del coroll. preced., con l'unica variante di supporre l'« esistenza di un anello $\mathfrak{R}$ dei quozienti a sinistra di R rispetto a* Π » *invece della « validità della cond.* A) ». *Allora la cond.* C) *del n.°* 1

è necessaria e sufficiente affinchè esista un $\mathfrak{R}$-pseudogruppo complementare destro di G rispetto a Π, Γ, che (se esistente) risulta univocamente determinato a meno di isomorfismi.

Quanto è stato detto fin qui in questo n.° 9 può evidentemente ripetersi parola per parola con l'unica variante: *semianello* (oppure *pseudoanello*) ([2], n.° 1) invece di anello. Possiamo dunque enunciare anche le proposizioni seguenti:

COROLLARIO 3: *Valgono le proposizioni che si deducono dai corollari 2 e 2′ leggendo semianello invece di anello.*

COROLLARIO 4: *Valgono le proposizioni che si deducono dai corollari 2 e 2′ leggendo pseudoanello invece di anello.*

10. - I simboli Q e Π abbiano il significato detto nell'enunciato del teor. del n.° 2, e sia G un Q-pseudogruppo sinistro, la cui parte additiva sia dotata di zero $\bar{0}$.

Se $\bar{0}$ è tale che

$$\text{(59)} \qquad a\bar{0} = \bar{0} \quad \text{per ogni} \quad a \in Q,$$

allora $\{\bar{0}\}$ (cioè il sottinsieme di G costituito dal solo elemento $\bar{0}$) è evidentemente un sotto-Q-pseudogruppo di G che è contenuto nel centro G_0 (n.° 9) dello pseudogruppo G e il cui unico elemento $\bar{0}$ è semplificabile (rispetto all'addizione) in G. Si osservi che (v. [3], n.° 3, penult. capov.) la (59) è certo soddisfatta se lo pseudogruppo G è un semigruppo ([2], n.° 1) dotato di zero $\bar{0}$.

In base a due definizioni date in [3], n.° 9 (1°, 2° ed ult. capov.) [2]), adattate in modo evidente ai casi attuali (ad es. la definizione di *$\mathfrak{Q}$-pseudogruppo dei quozienti di G rispetto a Π* — v. il successivo coroll. 5′ — si ottiene dal 1° e 2° capov. del n.° 9 di [3] leggendo Q, Π, $\mathfrak{Q}$, pseudogruppo invece risp. di P, M, $\mathfrak{P}$, gruppoide), dal teor. del n. 2 o dai suoi corollari 1, 2, 2′, 3, 4 discendono allora immediatamente (assumendo $\Gamma = \{\bar{0}\}$ e ricordando le osservazioni del n.° 5) le proposizioni seguenti:

---

2) Queste due definizioni le riterremo equivalenti a quelle che si ottengono dalle stesse sopprimendo la locuzione «a sinistra».

COROLLARIO 5: Di uno pseudogruppo Q sia Π un sottinsieme moltiplicativamente chiuso e costituito da elementi semplificabili in Q (rispetto alla moltiplicazione), e valga la condiz. A) del n.° 1. Sia inoltre G un Q-pseudogruppo sinistro, la cui parte additiva sia dotata di zero $\bar{0}$ soddisfacente alla (59). In queste ipotesi, la cond. C) del n.° 1 è necessaria e sufficiente affinchè di G esista un sopra-Q-pseudogruppo $\mathfrak{G}$ soddisfacente alla condizione j) del n.° 2 ed inoltre alla seguente:

jj′) Ogni elemento ξ di $\mathfrak{G}$ è la soluzione di un'equazione del tipo (1), con $\xi_1 = u \in G$.

Se $\mathfrak{G}$ esiste esso è univocamente determinato da G e Π a meno di isomorfismi.

COROLLARIO 5′: Siano soddisfatte tutte le ipotesi del coroll. preced., con l'unica variante di supporre l'« esistenza di uno pseudogruppo $\mathfrak{Q}$ dei quozienti a sinistra di Q rispetto a Π » invece della « validità della cond. A) del n.° 1 ». Allora la cond. C) del n.° 1 è necessaria e sufficiente affinchè esista un $\mathfrak{Q}$-pseudogruppo dei quozienti di G rispetto a Π (cfr. definiz. in [3], n.° 9), che (se esistente) risulta univocamente determinato a meno di isomorfismi.

COROLLARIO 6: I simboli Q e Π abbiano il significato detto nell'enuciato del coroll. 5, e valga la cond. A) del n.° 1. Sia inoltre G un Q-semigruppo sinistro, la cui parte additiva sia dotata di zero. In queste ipotesi, la cond. C) del n.° 1 è necessaria e sufficiente affinchè di G esista un sopra-Q-semigruppo $\mathfrak{G}$ soddisfacente alle due condizioni j), jj′) dei n.ⁱ 2, 10. Se $\mathfrak{G}$ esiste, esso è univocamente determinato a meno di isomorfismi.

COROLLARIO 6′: Siano soddisfatte tutte le ipotesi del coroll. preced., con l'unica variante detta nel coroll. 5′. Allora la cond. C) del n.° è necessaria e sufficiente affinchè esista un $\mathfrak{Q}$-semigruppo dei quozienti di G rispetto a Π (cfr. definiz. in [3], n.° 9), che (se esistente) risulta univocamente determinato a meno di isomorfismi.

COROLLARIO 7: *I simboli Q e Π abbiano il significato detto nell'enunciato del coroll. 5, e valga la cond.* A) *del n.° 1. Sia inoltre G un Q-gruppo (risp. un Q-modulo) sinistro. In queste ipotesi, la cond.* C) *del n.° 1 è necessaria e sufficiente affinchè di G esista un sopra-Q-gruppo (risp. un sopra-Q-modulo) $\mathfrak{G}$ soddisfacente alle due condizioni* j), jj') *dei n.ᵢ 2, 10. Se $\mathfrak{G}$ esiste esso è univocamente determinato a meno di isomorfismi.*

COROLLARIO 7': *Siano soddisfatte tutte le ipotesi del coroll. preced., con l'unica variante detta nel coroll.* 5'. *Allora la cond.* C) *del n.° 1 è necessaria e sufficiente affinchè esista un $\mathfrak{Q}$-gruppo (risp. un $\mathfrak{Q}$-modulo) dei quozienti di G rispetto a* Π (*cfr. definiz. in* [3], *n.°* 9), *che (se esistente) risulta univocamente determinato a meno di isomorfismi.*

COROLLARIO 8: *Valgono le proposizioni che si deducono dai corollari* 5, 5', 6, 6', 7, 7' *leggendo anello Q invece di pseudogruppo Q, e anello $\mathfrak{Q}$ invece di pseudogruppo $\mathfrak{Q}$.*

COROLLARIO 9: *Valgono le proposizioni che si deducono dai corollari* 5, 5', 6, 6', 7, 7' *leggendo semianello Q invece di pseudogruppo Q, e semianello $\mathfrak{Q}$ invece di pseudogruppo $\mathfrak{Q}$.*

COROLLARIO 10: *Valgono le proposizioni che si deducono dai corollari* 5, 5', 6, 6', 7, 7' *leggendo pseudoanello Q invece di pseudogruppo Q, e pseudoanello $\mathfrak{Q}$ invece di pseudogruppo $\mathfrak{Q}$.*

I risultati forniti dal coroll. 7' e dal punto 7' del coroll. 8 eran stati già ottenuti in [3] (n.° 9, v. l'ult. e il quartult. capov. del n.° 3) con una dimostrazione, diretta (il punto 7', relativo ad un Q-modulo, del coroll. 8 è dovuto ad Asano: [1], Satz 7).

Anche i risultati forniti dai corollari 5', 6' e dai punti 5', 6' del coroll. 8 eran stati già ottenuti per via diretta in [3] (n.° 9, v. il quintult. e il terzult. capov. del n.° 3), senza anzi sfruttare l'ipotesi (che dunque non è necessaria) dell'esistenza dello zero $\bar{0}$.

11. - Sia $\dot{G}$ uno pseudogruppo additivo. Se $Q = \{ e \}$ è un gruppo moltiplicativo costituito da un solo elemento e, posto

$$eu = u,$$

qualunque sia $u \in G$, resta definita fra Q e G una moltiplicazione che soddisfa evidentemente alle I), II), III) del n.° 1.

Considerato in tal modo G come un Q-pseudogruppo sinistro, con $Q = \{ e \}$, dal teor. del n.° 2 (ricordando una definiz. data nel n.° stesso) si trae allora immediatamente il seguente

COROLLARIO 11: *Affinchè esista uno pseudogruppo delle differenze a destra* $\mathfrak{D}$ *di uno pseudogruppo (additivo)* G *rispetto ad un suo sotto-pseudogruppo* Γ *costituito da elementi semplificabili in* G, *è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la cond.* B) *del n.° 1. Lo pseudogruppo* $\mathfrak{D}$, *ove esista, è univocamente determinato da* G *e* Γ *a meno di isomorfismi.*

Infatti (la necessità della B) essendo evidente: $-\tau+u \in \mathfrak{D}$ implica $-\tau+u=u_1-\tau_1$), quanto alla sufficienza basta applicare, come detto sopra ($\Pi = Q = \{e\}$), il teor. del n.° 2 (sufficienza della C)) ed osservare che la parte additiva $\mathfrak{D}$ di $\mathfrak{G}$ è appunto uno pseudogruppo delle differenze a destra di G rispetto a Γ (se $\xi \in \mathfrak{G}$, esistono, per la jj), $u \in G$, $\tau \in \Gamma$ tali che $e\xi = u - \tau$, donde $\xi = u - \tau$, poichè $e \cdot \xi = ee \cdot \xi = e \cdot e\xi$ implica, per la j), $\xi = e\xi$). L'ultima parte del coroll. 11 è poi evidente conseguenza dell'ultima parte del teor. del n.° 2, ove si osservi che un qualsiasi pseudogruppo $\mathfrak{D}$ delle differenze a destra di G rispetto a Γ, considerato (ponendo $e\xi = \xi$ per ogni $\xi \in \mathfrak{D}$) come un sopra-Q-pseudogruppo ($Q = \{ e \}$) del Q-pseudogruppo sinistro di parte additiva G (v. sopra), soddisfa alle quattro condizioni i), ii), j), jj).

Diremo pseudogruppo *opposto* di uno pseudogruppo (additivo) G, lo pseudogruppo G' che ha gli stessi elementi di G ma questa nuova definizione di addizione ($u', v' \in G'$, $u, v \in G$): $u' + v' = v + u$, con $v = v'$, $u = u'$ (cfr. [4], p. 65). Naturalmente G è, a sua volta, opposto di G'.

La considerazione dello pseudogruppo opposto permette di dedurre immediatamente (cfr. [2], p. 496, alto) dal coroll. 11 un altro risultato (già ottenuto, con una dimostrazione diretta, da Murata: [8], Theor. 1; v. pure [6], p. 138, Théor. 1, p. 142, Théor. 2), il cui enunciato, in notazione moltiplicativa, è il seguente (si ricordi una definizione del n.° 1):

COROLLARIO 11′: *Affinchè esista uno pseudogruppo dei quozienti a sinistra* $\mathfrak{Q}$ *di uno pseudogruppo (moltiplicativo)* Q *rispetto ad un suo sotto-pseudogruppo* Π *costituito da elementi semplificabili in* Q, *è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione* A) *del n.° 1. Lo pseudogruppo* $\mathfrak{Q}$, *ove esista, è univocamente determinato da* Q *e* Π *a meno di isomorfismi.*

Poichè evidentemente (il coroll. 11 e quindi) il coroll. 11′ discende subito (non solo dal teor. del n.° 2 ma) anche dal coroll. 1, è chiaro che, *a sua volta, il teor. del n.° 2 è una facile conseguenza del coroll.* 1 (n.° 1).

12. - Ricordando una definizione data nel n.° 9, dai corollari 7, 7′, 8 (p.to 7) e 11′ si trae facilmente il seguente altro risultato (dovuto ad Asano: [1], Satz 1; v. pure [6], p. 147, Théor. 3):

COROLLARIO 12: *Affinchè esista un anello dei quozienti a sinistra* $\mathfrak{R}$ *di un anello* R *rispetto ad un suo sottinsieme* Π, *moltiplicativamente chiuso e costituito da elementi non divisori dello zero, è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione* A) (*n.° 1*), *ove si legga* R *invece di* Q. *L'anello* $\mathfrak{R}$, *se esiste, è univocamente determinato da* R *e* Π *a meno di isomorfismi.*

Infatti (sufficienza della A)), detto Q lo pseudogruppo moltiplicativo di R, e considerato il gruppo additivo G di R come un Q-modulo sinistro (la moltiplicazione fra Q e G essendo quella definita in $Q = R = G$), poichè esiste, per il coroll. 11′, uno pseudogruppo $\mathfrak{Q}'$ dei quozienti a sinistra di Q rispetto a Π (ogni elemento di R non divisore dello zero è evidentemente semplificabile in Q), esiste pure, per il coroll. 7′, un $\mathfrak{Q}'$-modulo $\mathfrak{G}$ dei quozienti di G rispetto a Π. La corrispondenza Ψ fra $\mathfrak{Q}'$ e $\mathfrak{G}$ che associa gli elementi x', ξ che ammettono una medesima rappresentazione $\alpha^{-1}u$ ($\alpha \in \Pi$, $u \in Q = G$) è manifestamente biunivoca (sia in $\mathfrak{Q}'$ che in $\mathfrak{G}$ si ha $\alpha^{-1}u = \alpha_1^{-1}u_1$ se e soltanto se esistono r, $r_1 \in Q$, $\beta \in \Pi$ tali che $r\alpha = r_1\alpha_1 = \beta$, $ru = r_1u_1$) e subordina su $Q = G$ l'identità; onde si può (mediante la Ψ) definire nel modulo $\mathfrak{G}$ una moltiplicazione rispetto alla quale esso risulta un sopra-pseudogruppo $\mathfrak{Q}$ di Q, isomorfo (mediante la Ψ stessa) a $\mathfrak{Q}'$. Identificato $\mathfrak{Q}'$ con questa sua immagine isomorfa $\mathfrak{Q}(=\mathfrak{G})$, $\mathfrak{G}$ diventa allora un $\mathfrak{Q}$-modulo sinistro, la cui moltiplicazione fra $\mathfrak{Q}$ e $\mathfrak{G}$ (se $x \in \mathfrak{Q}$ e $\xi \in \mathfrak{G}$, si ha $x\xi = x'\xi$, con $x' \in \mathfrak{Q}'$ corrispondente di x in Ψ) coincide evidentemente con quella dello pseudogruppo $\mathfrak{Q} = \mathfrak{G}$ (poichè in entrambi i casi vale la stessa regola: $\alpha^{-1}u \cdot \alpha_1^{-1}u_1 = (\gamma\alpha)^{-1}gu_1$, con $\gamma \in \Pi$, $g \in Q$ tali che $\gamma u = g\alpha_1$); dunque la moltiplicazione definita nel modulo $\mathfrak{G}$ è certamente distribuita a sinistra rispetto all'addizione (II), n.° 1):

$$\xi(\xi_1 + \xi_2) = \xi\xi_1 + \xi\xi_2, \tag{60}$$

(ξ, ξ_1, $\xi_2 \in \mathfrak{G}$). D'altra parte, poichè dell'R-modulo sinistro G esiste (per il punto 7 del coroll. 8) un sopra-R-modulo $\mathfrak{G}'$, Q-isomorfo (per l'ultima parte del coroll. 7) al Q-modulo sinistro $\mathfrak{G}$, in $\mathfrak{G}$ si ha pure sempre (IV), n.° 9):

$$(u + u_1)\xi = u\xi + u_1\xi, \tag{61}$$

(u, $u_1 \in G$, $\xi \in \mathfrak{G}$). Ma allora, se ξ, $\xi_1 = \alpha_1^{-1}u_1$, $\xi_2 = \alpha_2^{-1}u_2 \in \mathfrak{G}$ (α_1, $\alpha_2 \in \Pi$, u_1, $u_2 \in G$) e se (com'è lecito supporre in base alla cond. A)) $\alpha_1 = \alpha_2$, dalle (60), (61) discende che

$$(\xi_1 + \xi_2)\xi = \alpha_1^{-1}(u_1 + u_2)\xi = \alpha_1^{-1}(u_1\xi + u_2\xi) = \xi_1\xi + \xi_2\xi,$$

cioè che la moltiplicazione definita nel modulo $\mathfrak{G}$ è distributiva anche a destra rispetto all'addizione. Il modulo $\mathfrak{G}$ è dunque la parte additiva di un anello $\mathfrak{R}$ (di parte moltiplicativa $\mathfrak{Q}$, che è appunto un anello dei quozienti a sinistro di R rispetto a Π. Quanto all'ultima parte del coroll. 12, basta poi osservare che è isomorfa la corrispondenza che associa gli elementi di due qualsiasi anelli dei quozienti a sinistra di R rispetto a Π ammettenti una medesima rappresentazione $\alpha^{-1}b$ ($\alpha \in \Pi$, $b \in R$).

13. - *Il teorema del n.° 2 è, a sua volta, una facile conseguenza dei due suoi corollari* 5 *e* 11. Infatti (sufficienza della C)), in virtù della condizione B) esiste (coroll. 11) uno pseudogruppo $\mathfrak{D}$ delle differenze a destra dello pseudogruppo G

rispetto a Γ. Definita allora una moltiplicazione fra Q e $\mathfrak{D}$ nel modo seguente ($a \in Q$, $u \in G$, $\tau \in \Gamma$):

$$a(u - \tau) = au - a\tau$$

(si ricordi che $a\tau \in \Gamma$), è agevole verificare che, rispetto ad essa, $\mathfrak{D}$ risulta un sopra-Q-pseudogruppo del dato Q-pseudogruppo sinistro G; e invero (n.° 1), se $u_1 \in G$, $\tau_1 \in \Gamma$, poichè esistono (per la B)) $v \in G$, $\sigma \in \Gamma$ tali che $\tau + v = u_1 + \sigma$, si ha

$$\begin{aligned} a((u - \tau) + (u_1 - \tau_1)) &= a((u + v) - (\tau_1 + \sigma)) = \\ &= au + av - (a\tau_1 + a\sigma) = au - a\tau + au_1 - a\tau_1 = \\ &= a(u - \tau) + a(u_1 - \tau_1), \end{aligned}$$

(l'analoga della III) del n.° 1 è immediata), e riesce appunto $a((u + \tau) - \tau) = au + a\tau - a\tau = au$. Ora, poichè da $\alpha(u - \tau) = \alpha(u_1 - \tau_1)$ $(\alpha \in \Pi)$ segue sempre (v. il lemma del n.° 2, ricordando la cond. B)) $u - \tau = u_1 - \tau_1$, a questo Q-pseudogruppo sinistro $\mathfrak{D}$ è applicabile il coroll. 5 (sufficienza), in base al quale (di $\mathfrak{D}$ e quindi) di G esiste un sopra-Q-pseudogruppo $\mathfrak{G}$ soddisfacente alle due condizioni j), jj) del n.° 2. Ma anche le i), ii) (n.° 1) sono appunto soddisfatte, poichè lo zero 0 di $\mathfrak{D}$ (che, si ricordi, soddisfa alla (59)) è pure lo zero dello pseudogruppo $\mathfrak{G}$. E invero, se $\xi \in \mathfrak{G}$ e quindi è tale che (cond. jj)) $\alpha\xi = u - \tau$, da questa e dalla $\alpha 0 = \bar{0}$ segue $\alpha(\xi + 0) = (u - \tau) + \bar{0} = u - \tau = \alpha\xi$, donde (cond. j), unicità) $\xi + 0 = \xi$; analogamente si vede che $0 + \xi = \xi$. Quanto poi all'ultima parte del teor. del n.° 2, basta ripetere il ragionamento fatto alla fine del n.° 7.

Osserveremo ora che, se Q è uno pseudogruppo (moltiplicativo) dotato di elemento unità ε ($\varepsilon a = a\varepsilon = a$ per ogni $a \in Q$), Q è manifestamente uno pseudogruppo dei quozienti a sinistra di Q rispetto al sotto-pseudogruppo $\Pi = \{\varepsilon\}$ (costituito cioè dal solo elemento ε). Se ε è *operatore unitario* in un Q-gruppo sinistro G (se cioè $\varepsilon u = u$ per ogni $u \in G$), è evidentemente soddisfatta la condizione:

C*) Da $\varepsilon u = \varepsilon u_1$ ($u, u_1 \in G$) segue sempre $u = u_1$.

Ma vale anche il viceversa: cioè, se è soddisfatta la C^*), ε è operatore unitario. Infatti, per il coroll. 7′, esiste allora un Q-gruppo $\mathfrak{G}$ dei quozienti di G rispetto a $\Pi = \{\varepsilon\}$, nel quale si ha appunto (v. (56)) $\varepsilon\xi = \xi$ per ogni $\xi \in \mathfrak{G}$ (quindi $\mathfrak{G} = G$). Ciò è d'altronde suscettibile di una verifica diretta altrettanto immediata, la quale porge anzi più generalmente che:

Se Q è uno pseudogruppo dotato di un elemento unità destro ε ($a\varepsilon = a$ per ogni $a \in Q$) e G è un Q-gruppoide sinistro ([3], n.° 1), affinchè ε sia operatore unitario in G ($\varepsilon u = u$ per ogni $u \in G$) è necessario e sufficiente che vi sia in Q un elemento b tale che l'eguaglianza $bu = bu_1$ $(u, u_1 \in G)$ implichi sempre $u = u_1$.

E infatti (la necessità essendo evidente: $b = \varepsilon$), quanto alla sufficienza, $b(\varepsilon u) = (b\varepsilon)u = bu$ implica appunto $\varepsilon u = u$, qualunque sia $u \in G$.

14. - È evidente (cfr. [7], p. 163, o [5], p. 2) cosa debba intendersi per un Q-*pseudogruppo destro* (n.° 1) oppure per un R-*pseudogruppo destro* (n.° 9), Q ed R essendo risp. uno pseudogruppo (moltiplicativo) ed un anello. Detti *opposti* due anelli R, R' se sono opposti (n.° 11) i loro pseudogruppi moltiplicativi mentre coincidono le loro parti additive ([4], p. 116), è pure chiaro che (cfr. [5], p. 2, o [7], p. 164) ogni R-pseudogruppo sinistro è (rispetto alle sue due stesse leggi di composizione interna ed esterna — [4], pp. 1, 37 —) un R'-pseudogruppo destro (e viceversa). Così pure ogni Q-pseudogruppo sinistro è un Q'-pseudogruppo destro (e viceversa), Q' denotando lo pseudogruppo opposto di Q.

Sostituendo in un Q-pseudogruppo sinistro (risp. destro) G la legge di composizione interna (addizione) con la legge *opposta* ([4], p. 3), si ottiene ancora un Q-pseudogruppo sinistro (risp. destro), il quale ha dunque come parte additiva lo pseudogruppo opposto G' di G. E invero (nel 1° caso), se $a, a_1 \in Q$, $u, u_1 \in G$, $u', u_1' \in G'$, $u = u'$, $u_1 = u_1'$, si ha (n.° 1): $au' = au \in G = G'$, $a(u' + u_1') = a(u_1 + u) = au_1 + au = au' + au_1'$, $a(a_1u') = a(a_1u) = (aa_1)u = (aa_1)u'$.

Diremo perciò che due Q-pseudogruppi G e G', entrambi sinistri o entrambi destri, sono *opposti* (l'uno dell'altro) se sono opposti gli pseudogruppi G e G' mentre coincidono le rispettive leggi di composizione esterna. E continueremo a dire che questi due Q-pseudogruppi, ad es. sinistri, G e G' sono *opposti* anche se uno di essi venga considerato come un Q'-pseudogruppo destro (v. sopra), Q' denotando lo pseudogruppo opposto di Q.

Quanto detto nel penultimo capoverso può ripetersi parola per parola con l'unica variante: R invece di Q (R anello), e con l'aggiunta seguente: $(a + a_1)u' = (a_1 + a)u = a_1u + au = au' + a_1u'$. È lecita dunque la definizione (di R-pseudogruppi *opposti*) che si deduce dall'ultimo capoverso leggendo R, R' invece risp. di Q, Q', e anello opposto invece di pseudogruppo opposto.

Consideriamo allora le tre condizioni seguenti:

A$_1$) Dati comunque $b \in Q$, $\alpha \in \Pi$, esistono $\alpha_1 \in \Pi$, $b_1 \in Q$ tali che $b\alpha_1 = \alpha b_1$;

B$_1$) Dati comunque $u \in G$, $\tau \in \Gamma$, esistono $\tau_1 \in \Gamma$, $u_1 \in G$ tali che $\tau_1 + u = u_1 + \tau$;

C$_1$) Da $u\alpha = u_1\alpha$ (u, $u_1 \in G$, $\alpha \in \Pi$) segue sempre $u = u_1$.

Vale il teorema che si deduce da quello del n.° 2 leggendo destro invece di sinistro, ed A$_1$), B$_1$), C$_1$), $\xi\alpha$, $-\tau + u$ *invece risp. di* A), B), C), $\alpha\xi$, $u - \tau$. Infatti (sufficienza della C$_1$)) al Q'-pseudogruppo sinistro G' opposto di G (Q' denotando lo pseudogruppo opposto di Q) è applicabile il teor. del n.° 2 (sufficienza); ebbene, il Q-pseudogruppo destro, opposto del sopra-Q'-pseudogruppo $\mathfrak{G}'$ di G' di cui quel teorema afferma l'esistenza, è appunto un sopra-Q-pseudogruppo di G soddisfacente alle condizioni richieste. Inoltre, se (essendo soddisfatte le ipotesi del teorema in discorso) $\mathfrak{G}_1$ e $\mathfrak{G}_2$ sono due qualsiasi sopra-Q-pseudogruppi di G soddisfacenti alle condizioni stesse, i Q'-pseudogruppi sinistri $\mathfrak{G}_1'$ e $\mathfrak{G}_2'$ risp. opposti di $\mathfrak{G}_1$ e $\mathfrak{G}_2$ sono Q'-isomorfi (per il teor. del n.° 2) e quindi risultano appunto Q-isomorfi $\mathfrak{G}_1$ e $\mathfrak{G}_2$.

Vale il teorema che si deduce da quello del n.° 2 leggendo B$_1$), $-\tau + u$ *invece risp. di* B), $u - \tau$. Infatti, ciò risulta immediatamente dal considerare G come un Q'-pseudogruppo destro (Q' pseudogruppo opposto di Q) e dall'applicare a questo il teor. del preced. capoverso.

Consideriamo ora la seguente equazione nell'incognita ξ:

$$(1_1) \qquad \xi\alpha = \xi_1 \qquad (\alpha \in \Pi, \ \ \xi_1 \in \mathfrak{G}).$$

Vale il teorema che si deduce da quello del n.° 2 leggendo destro invece di sinistro, ed A_1), C_1), $\xi\alpha$, (1_1) *invece risp. di* A), C), $\alpha\xi$, (1). Infatti, ciò risulta immediatamente dal considerare G come un Q'-pseudogruppo sinistro (Q' pseudogruppo opposto di Q) e dall'applicare a questo il teor. del n.° 2.

15. - Considerazioni analoghe a quelle svolte nel n.° preced. a proposito del teor. del n.° 2 potrebbero naturalmente farsi anche a proposito del coroll. 1 (n.° 1) e dei corollari successivi (n.i 9, 10, 12). Potrebbero pure esaminarsi le semplificazioni derivanti agli enunciati e alle costruzioni dal supporre commutativo uno dei due pseudogruppi Q e G (n.° 1) o addirittura entrambi. Limitiamoci per ora a quest'ultimo caso e al teor. del n.° 2, in vista di un esempio che esporremo subito dopo.

Con referenza al teor. del n.° 2, osserveremo dunque che, se gli pseudogruppi Q e G sono entrambi commutativi, nel qual caso le condizioni A) e B) sono automaticamente soddisfatte, nel Q-pseudogruppo $\mathfrak{G}$ (cfr. [5], p. 2, penult. capov.), denotato adesso col simbolo (cfr. n. 8)

$$\frac{1}{\alpha}\ (u-\tau)$$

l'elemento ξ di $\mathfrak{G}$ soluzione dell'equazione (49), valgono manifestamente (cfr. n.° 2) le seguenti consuete regole di calcolo ($b \in Q$):

$$(62) \qquad \frac{1}{\alpha}(u-\tau)=\frac{1}{\alpha_1}(u_1-\tau_1) \ \text{ se e solo se } \ \alpha_1 u+\alpha\tau_1=\alpha_1\tau+\alpha u_1,$$

$$(63) \qquad \frac{1}{\alpha}(u-\tau)+\frac{1}{\alpha_1}(u_1-\tau_1)=\frac{1}{\alpha\,\alpha_1}\ (\alpha_1 u+\alpha u_1-(\alpha_1\tau+\alpha\tau_1)),$$

$$(64) \qquad b\cdot\frac{1}{\alpha}\ (u-\tau)=\frac{1}{\alpha}\ (bu-b\tau),$$

le quali possono dedursi (oltre che direttamente) anche dalle (51), (52), (53) (ricordando il lemma del n.° 3 e) particolarizzando opportunamente la scelta degli elementi ausiliari. La stessa particolarizzazione permette pure di concludere che, *se gli pseudogruppi Q e G sono commutativi, le definizioni* (9), (13), (38) *sono risp. equivalenti alle seguenti:*

$(\bar{9})$ $[(\alpha, u, \tau)] = [(\alpha_1\ u_1, \tau_1)]$ se e solo se $\alpha_1 u + \alpha\tau_1 = \alpha_1\tau + \alpha u_1$.

$(\overline{13})$ $[(\alpha, u, \tau)] + [(\alpha_1, u_1, \tau_1]] = [(\alpha\alpha_1, \alpha_1 u + \alpha u_1, \alpha_1\tau + \alpha\tau_1)]$,

$(\overline{38})$ $b \cdot [(\alpha, u, \tau)] = [(\alpha, bu, b\tau)]$.

Detto N il semigruppo moltiplicativo dei numeri naturali, l'esempio cui sopra alludevamo si ottiene assumendo $\Pi = Q = G = \Gamma = N$ e come legge di composizione esterna (moltiplicazione fra Q e G) l'ordinaria operazione di elevamento a potenza in N con esponente naturale. Del gruppo moltiplicativo dei numeri reali non nulli consideriamo il sottogruppo $\mathfrak{G}$ costituito da tutti i numeri (reali) positivi ξ del tipo

$$(65) \qquad \left(\frac{u}{\tau}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \sqrt[\alpha]{\frac{u}{\tau}} \qquad (\alpha,\ u,\ \tau \text{ num. naturali}),$$

il simbolo a 1° membro della (65) denotando l'ordinaria potenza (nel corpo reale) del numero razionale positivo u/τ all'esponente (razionale) $1/\alpha$, cioè (2° membro della (65)) l'unica soluzione reale positiva dell'equazione $\xi^\alpha = u/\tau$. Il Q-gruppo, che ha come « parte additiva » questo gruppo $\mathfrak{G}$ e come legge di composizione esterna l'ordinaria operazione di elevamento a potenza con esponente naturale nel corpo reale, è evidentemente un sopra-Q-pseudogruppo del Q-pseudogruppo G considerato, che soddisfa alle quattro condizioni i), ii), j), jj), ed è perciò univocamente determinato da N a meno di isomorfismi (teor. del n.° 2). Dunque questo sopragruppo $\mathfrak{G}$ del semigruppo N (si noti che $\mathfrak{G}$ è un'estensione propria del gruppo dei quozienti di N) può anche essere costruito direttamente (a meno di isomorfismi) col metodo esposto (nel corso della dimostrazione del teor. del n.° 2) nei n.[i] 2-7, mediante cioè l'insieme delle terne ordinate di numeri naturali (α, u, τ), con le regole di calcolo $(\bar{9})$, $(\overline{13})$, (scritte in notazione moltiplicativa). Questa costruzione fornisce una definizione molto semplice (classi di equivalenza di terne ordinate di numeri naturali) dei numeri reali positivi del tipo (65) (limitatamente però alle loro proprietà moltiplicative).

Consideriamo adesso anche il caso in cui è commutativo G, senza che lo sia necessariamente Q, e riferiamoci al coroll. 1 (n.° 1). La condizione B) essendo allora automaticamente soddisfatta, nel $\mathfrak{Q}$-pseudogruppo complementare destro $\mathfrak{G}$ di G rispetto a Π, Γ (supposto naturalmente che questo esista, e che sian soddisfatte tutte le ipotesi del coroll. 1) valgono la (57) e le altre due seguenti regole di calcolo (deducibili subito, o direttamente, o dalle (51), (52) particolarizzando in modo evidente la scelta degli elementi ausiliari):

$$(66) \qquad \alpha^{-1}(u - \tau) = \alpha_1^{-1}(u_1 - \tau_1)$$

se e solo se esistono s, $s_1 \in Q$, $\gamma \in \Pi$ tali che $s\alpha = s_1\alpha_1 = \gamma$, $su + s_1\tau_1 = s\tau + s_1u_1$;

$$(67) \quad \alpha^{-1}(u - \tau) + \alpha_1^{-1}(u_1 - \tau_1) = \beta^{-1}(ru + r_1u_1 - (r\tau + r_1\tau_1)),$$

dove $\beta \in \Pi$, r, $r_1 \in Q$ soddisfano alle (5).

Supponiamo che un semianello S contenga un sottinsieme Π moltiplicativamente chiuso, costituito da elementi semplificabili in S ([2], n.° 1) e soddisfacente alla cond. A) (n.° 1), denotandosi con Q lo pseudogruppo moltiplicativo di S. Vedremo nel n.° successivo che esiste allora un anello complementare sinistro $\mathfrak{A}$ di S rispetto a Π ([2], n.° 2). L'insieme $\mathfrak{S}$ degli elementi di $\mathfrak{A}$ della forma $\alpha^{-1}b$ ($\alpha \in \Pi$, $b \in S$) è evidentemente (rispetto alle stesse due operazioni definite in $\mathfrak{A}$) un semianello dei quozienti a sinistra di S rispetto a Π (cfr. [2], n.° 9, 2° capov., ricordando la cond. A)), il cui pseudogruppo moltiplicativo (che risulta uno pseudogruppo dei quozienti a sinistra di Q rispetto a Π) denoteremo con $\mathfrak{Q}$. Il gruppo additivo $\mathfrak{G}$ di $\mathfrak{A}$, considerato come un $\mathfrak{Q}$-modulo sinistro (la moltiplicazione fra $\mathfrak{Q}$ e $\mathfrak{G}$ essendo quella definita in $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}$), è allora evidentemente un $\mathfrak{Q}$-pseudogruppo complementare destro di G rispetto a Π (n.° 1 : $\Gamma = G$), ove G denota il semigruppo additivo (commutativo) di S, considerato come un Q-pseudogruppo sinistro (la moltiplicazione fra Q e G essendo quella definita in $Q = S = G$). Ne segue che, se $\mathfrak{G}'$ è un qualsiasi $\mathfrak{Q}$-pseudogruppo complementare destro di G

rispetto a Π, nel modulo (cfr. n.° 5, 2° e 4° capov.) $\mathfrak{G}'$ può essere immediatamente definita, sfruttando l'isomorfismo col modulo $\mathfrak{G}$ (coroll. 1) che associa (penult. capov. del n.° 8) gli elementi ammettenti una medesima rappresentazione $\gamma^{-1}(a-b)$, con $\gamma \in \Pi$, a, $b \in S = G = \Gamma$ (e che subordina quindi su G l'identità), una moltiplicazione in modo che esso diventi la parte additiva di un anello complementare sinistro $\mathfrak{A}'$ di S rispetto a Π.

Se un semianello S contiene elementi semplificabili ed è commutativo ([2], n.° 1), esso è certamente complementarizzabile (ad es.) a sinistra ([2], n.i 2, 9) e la cond. A) è soddisfatta; onde si presenta la situazione del precedente capoverso. Con le stesse notazioni, si può dunque dire che la parte additiva di un qualunque $\mathfrak{Q}$-p.c.d. di G (n.° 1) non è altro che la parte additiva di un a.c.s. di S ([2], n.° 2). Ciò accade ad es. se S è il semianello dei numeri naturali (e quindi $\mathfrak{A}$ il corpo dei numeri razionali).

16. - Dal teor. del n.° 2 e dai suoi corollari 1, 3 (p.to 2) e 11' si trae facilmente il seguente

COROLLARIO 13: *Affinchè esista un semianello dei quozienti a sinistra* $\mathfrak{S}$ *di un semianello* S *rispetto ad un suo sottinsieme* Π, *moltiplicativamente chiuso e costituito da elementi semplificabili in* S, *(n.° 9) è necessario e sufficiente che sia soddisfatta la condizione* A) *(n.° 1), ove si legga* S *invece di* Q. *Il semianello* $\mathfrak{S}$, *se esiste, è univocamente determinato da* S *e* Π *a meno di isomorfismi.*

Infatti (sufficienza della A)), detto Q lo pseudogruppo moltiplicativo di S, e considerato il semigruppo additivo G di S come un Q-pseudogruppo sinistro (la moltiplicazione fra Q e G essendo quella definita in $Q = S = G$), poichè esiste, per il coroll. 11', uno pseudogruppo $\mathfrak{Q}'$ dei quozienti a sinistra di Q rispetto a Π, esiste pure, per il coroll. 1, un $\mathfrak{Q}'$-p.c.d. $\mathfrak{G}'$ di G rispetto a Π. Il sottinsieme $\mathfrak{G}$ del modulo (n.° 5, 2° e 4° capov.) $\mathfrak{G}'$ costituito da tutti i prodotti del tipo $\alpha^{-1}u$ ($\alpha \in \Pi$, $u \in G$) è additivamente chiuso in $\mathfrak{G}'$ (per la cond. A)) e quindi è un semigruppo (commutativo). La corrispondenza biunivoca fra $\mathfrak{Q}'$ e $\mathfrak{G}$ che associa gli elementi che ammettono una medesima rappresentazione $\alpha^{-1}u$ $(\alpha \in \Pi,\ u \in Q = G)$ permette di definire nel semigruppo $\mathfrak{G}$ una moltiplicazione rispetto alla quale esso diventa un sopra-pseudogruppo $\mathfrak{Q}$ di Q, isomorfo a $\mathfrak{Q}'$. Identificato $\mathfrak{Q}'$ con $\mathfrak{Q}\,(= \mathfrak{G})$, $\mathfrak{G}'$ diventa allora un $\mathfrak{Q}$-pseudogruppo sinistro, la cui moltiplicazione fra $\mathfrak{Q}$ e $\mathfrak{G}$ $(\subseteq \mathfrak{G}')$ coincide con quella dello pseudogruppo $\mathfrak{Q} = \mathfrak{G}$; quindi la moltiplicazione definita nel semigruppo $\mathfrak{G}$ è distributiva a sinistra rispetto all'addizione. D'altra parte, poichè dell'S-pseudogruppo sinistro G esiste (per il p.to 2 del coroll. 3) un sopra-S-pseudogruppo Q-isomorfo (per il teor. del n.° 2) al Q-pseudogruppo sinistro $\mathfrak{G}'$, in $\mathfrak{G}$ vale la (61), donde segue immediatamente la distribuitività a destra rispetto all'addizione della moltiplicazione definita nel semigruppo $\mathfrak{G}$. Quest'ultimo è dunque appunto la parte additiva di un semianello dei quozienti a sinistra di S rispetto a Π.

Se esiste un semianello dei quozienti a sinistra di un semianello S rispetto ad un suo sottinsieme Π, *moltiplicativamente chiuso e costituito da elementi semplificabili in S, allora esiste pure un anello complementare sinistro di S rispetto a* Π. Infatti, vale allora (coroll. preced.) la condizione A) del n.° 1 (ove si legga S invece di Q). Basta perciò provare che questa condizione implica la condizione A) di [2], n.° 2 (ove si legga Π invece di M). E invero, dati comunque $a,\ b \in S$, $\gamma \in \Pi$, per la A) del n.° 1 esistono $\beta,\ \delta \in \Pi$, $c,\ d \in S$ tali che

$$\beta a = c\gamma, \qquad \delta b = d\gamma. \tag{68}$$

D'altra parte (sempre per la A) del n.° 1) esistono pure $r,\ s \in S$, $\gamma_1 \in \Pi$ tali che $r\beta = s\delta = \gamma_1$. Da qui e dalle (68), posto $rc = a_1$, $sd = b_1$, segue allora $\gamma_1 a = a_1\gamma$, $b_1\gamma = \gamma_1 b$, donde appunto

$$\gamma_1 a + b_1\gamma = \gamma_1 b + a_1\gamma,$$

con $a_1,\ b_1 \in S$, $\gamma_1 \in \Pi$.

S essendo un semianello qualsiasi, un anello $\mathfrak{C}$, estensione di S, si dirà un *anello delle differenze di S* se ogni elemento di $\mathfrak{C}$ è rappresentabile nella forma $a - b$, con $a,\ b \in S$. Dal coroll. 11 discende facilmente il seguente

COROLLARIO 14: *Di ogni semianello S esiste un anello delle differenze, univocamente determinato da S a meno di isomorfismi.*

Infatti, del semigruppo additivo (commutativo) G di S esiste (coroll. 11) uno pseudogruppo delle differenze $\mathfrak{D}$ $(\Gamma = G)$, che evidentemente è un gruppo commutativo. Mediante la posizione

$$(a - b)(a_1 - b_1) = (aa_1 + bb_1) - (ab_1 + ba_1)$$

$(a, b, a_1, b_1 \in S)$, resta allora definita nel modulo $\mathfrak{D}$ una moltiplicazione (cfr. [2], p. 503) che lo rende appunto (come agevolmente si verifica) il gruppo additivo di un anello, estensione del semianello S. È poi chiaro (cfr. le regole (64), (65). (66) in [2], n.° 14) che due qualsiasi anelli delle differenze di S risultano isomorfi, mediante la corrispondenza che associa gli elementi che ammettono una medesima rappresentazione $a - b$ $(a, b \in S)$.

Evidentemente *l'anello delle differenze di un semianello S è il più piccolo fra gli anelli che sono estensioni di S,* nel senso che ogni anello che sia estensione di S è pure estensione di un anello delle differenze di S.

Dalle precedenti considerazioni segue che, se i simboli S, Π e Q hanno il significato detto all'inizio del penult. capov. del n.° 15, allora esiste un anello complementare sinistro $\mathfrak{A}$ di S rispetto a Π il quale anello è un'estensione sia di un anello delle differenze di S, sia di un semianello dei quozienti a sinistra di S rispetto a Π.

17. - Aggiungeremo qualche considerazione riguardante le definizioni adattate, per comodità espositiva, in questo e nel precedente lavoro [3].

Premettiamo un'osservazione riguardante la definizione (dovuta ad altri) di « pseudogruppo $\mathfrak{Q}$ dei quozienti a sinistra di uno pseudogruppo Q rispetto a Π » (n.° 1), Π essendo un sotto-pseudogruppo di Q costituito da elementi semplificabili in Q. Si potrebbe in tale definizione, per avere la maggiore generalità possibile, supporre Π un qualsiasi sottinsieme (non vuoto) costituito da elementi semplificabili in Q. Ma il supporre (come sempre si è fatto) Π inoltre moltiplicativamente chiuso diminuisce solo apparentemente la generalità del problema d'immersione nella sua essenza (che, com'è noto, consiste nel trovare un sopra-pseudogruppo di Q che sia dotato di elemento unità e nel quale ogni elemento di Π abbia reciproco). Infatti, se H è un qualsiasi sottinsieme costituito da elementi semplificabili in Q, se esiste un'estensione Q' di Q dotata di elemento unità e in cui ogni elemento di H ha reciproco, in Q' ha pure reciproco ogni elemento del sotto-pseudogruppo (H) di Q *generato* da H ((H) ha invero per elementi i prodotti finiti $h_1 h_2 \cdots h_n$, con $h_1, h_2, \ldots, h_n \in H$); e viceversa. In questo senso la definizione più generale suaccennata non offrirebbe quindi molto interesse.

Per quanto riguarda la definizione di «$\mathfrak{S}$-gruppoide dei quozienti di un P-gruppoide sinistro G rispetto ad M» ([3], p. 191, e nota [2]) del presente lavoro), essa avrebbe potuto porsi, più generalmente, così:

Sia G un P-gruppoide sinistro, e lo pseudogruppo P contenga un sotto-pseudogruppo M costituito da elementi semplificabili in P. Diremo che un P'-gruppoide sinistro $\mathfrak{G}$, *estensione* di G (cioè P' sopra-pseudogruppo di P, e $\mathfrak{G}$ di G, e la moltiplicazione fra P' e $\mathfrak{G}$ subordina fra P e G la preesistente), è un *P'-gruppoide dei quozienti di G rispetto ad M* se: 1°) P' è dotato di elemento unità; 2°) ogni $\beta \in M$ ha reciproco β^{-1} in P'; 3°) ogni $\xi \in \mathfrak{G}$ è rappresentabile nella forma $\xi = \beta^{-1} v$, con $\beta \in M$, $v \in G$.

Si osservi che, se si suppone ulteriormente (come fatto in [3]) che esista uno pseudogruppo $\mathfrak{S}$ dei quozienti a sinistra di P rispetto ad M, ogni sopra-pseudogruppo P' di P soddisfacente a 1°) e 2°) è un'estensione di un'immagine isomorfa di $\mathfrak{S}$ (v. coroll. 11'), e quindi la definizione data in [3] e quella data qui sopra risultano equivalenti.

Anche la definizione di «$\mathfrak{Q}$-pseudogruppo complementare destro di un Q-pseudogruppo sinistro G rispetto a Π, Γ» (n.° 1) avrebbe potuto avere la formulazione più generale seguente:

Di uno pseudogruppo moltiplicativo Q sia Π un sotto-pseudogruppo costituito da elementi semplificabili in Q. Sia inoltre G un Q-pseudogruppo sinistro, di cui sia Γ un sottinsieme additivamente chiuso e costituito da elementi semplificabili (rispetto all'addizione) in G. Diremo allora che un Q'-pseudogruppo sinistro $\mathfrak{G}$, estensione di G, è un *Q'-pseudogruppo complementare destro* (*Q'-p.c.d.*) *di G rispetto a* Π, Γ se: I°) Q' è dotato di elemento unità e (la parte additiva di) $\mathfrak{G}$ di zero; II°) ogni $\alpha \in \Pi$ ha reciproco α^{-1} in Q' ed ogni $\tau \in \Gamma$ ha opposto $-\tau$ in $\mathfrak{G}$; III°) ogni $\xi \in \mathfrak{G}$ è rappresentabile nella forma $\xi = \alpha^{-1}(u - \tau)$, con $\alpha \in \Pi$, $u \in G$, $\tau \in \Gamma$.

Anche questa definizione è tuttavia equivalente a quella del n.° 1, ove naturalmente si supponga inoltre (come fatto in quel n.°): 1) che esista uno pseudogruppo $\mathfrak{Q}$ dei quozienti a sinistra di Q rispetto a Π, 2) che Γ sia un sotto-Q-pseudogruppo di G. 3) che valga la cond. B).

BIBLIOGRAFIA

[1] ASANO, K.: *Über die Quotientenbildung von Schiefringen*, Journ. Math. Soc. Japan, vol. 1 (1949), pp. 73-78.

[2] BOCCIONI, D.: *Semianelli complementarizzabili*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 24 (1955), pp. 474-509.

[3] BOCCIONI, D.: *$\mathfrak{F}$-gruppoide dei quozienti di un gruppoide con operatori*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 25 (1956), pp. 176-195.

[4] BOURBAKI, N.: *Algèbre*, Act. scient. ind. 1144, Hermann (1951).

[5] BOURBAKI, N.: *Algèbre*, Act. scient. ind. 1236, Hermann (1955).

[6] DUBREIL, P.: *Algèbre, I*, Gauthier-Villars (1946).

[7] JACOBSON, N.: *Lectures in Abstract Algebra, Vol. I*, Van Nostrand (1951).

[8] MURATA, K.: *On the Quotient Semi-group of a Noncommutative Semi-group*, Osaka Math. Journ., vol. 2 (1950), pp. 1-5.

[9] ORE, O.: *Linear equations in non-commutative fields*, Ann. of Math., vol. 32 (1931), pp. 463-477.