

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

R. CALAPSO

Alcune esplicitazioni intorno ad una trasformazione di Lie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 6 (1935), p. 44-56

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1935__6__44_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

ALCUNE ESPLICITAZIONI INTORNO AD UNA TRASFORMAZIONE DI LIE.

di R. CALAPSO, a Messina.

Nel presente lavoro ci riferiamo alla trasformazione di LIE delle sfere in rette ed alle relative applicazioni alla teoria delle trasformazioni delle superficie, a norma di quanto è riportato nell'opera del DARBOUX ai nn. 157, 168, 978 e seguenti (1).

Noi siamo stati invogliati a ripigliare questa teoria dal fatto che lo stesso DARBOUX dichiara (vol. IV pag. 176 anno 1896) che il soggetto merita di essere ancora studiato, e noi crediamo di poterlo ulteriormente sviluppare trattando la seguente questione:

Nella trasformazione di LIE (che porta da una superficie riferita alle asintotiche in una superficie riferita alle linee di curvatura) esplicitare i legami che passano tra gl' invarianti della prima - rispetto al gruppo proiettivo - e gl' invarianti dell'altra - rispetto al gruppo conforme (2).

(1) È bene riportare quanto dice il DARBOUX alla fine del n. 157:

«La trasformazione di LIE fa corrispondere all'insieme delle rette tangenti ad una superficie (S') l'insieme delle sfere tangenti a una superficie (S). A tutte le rette tangenti ad (S') in un suo punto M' corrispondono tutte le sfere tangenti ad (S) in un suo punto M . Quando il punto M' descrive un'asintotica di (S'), il punto M descrive una linea di curvatura di (S). Segue che ad ogni superficie di cui si sanno determinare le linee asintotiche si può far corrispondere - per trasformazione di LIE - un'altra superficie di cui si conosceranno le linee di curvatura e viceversa ».

(2) Vedi: P. CALAPSO - *Sugli invarianti del gruppo delle trasformazioni conformi dello spazio* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1906).

Cfr. FUBINI e CECCH - *Geometria proiettiva differenziale* (Tomo I, pag. 94).

Ora, la trattazione del DARBOUX si presta poco a questo ulteriore sviluppo, sicchè noi abbiamo ripreso la trattazione della detta trasformazione di LIE (per le superficie) deducendola dalla teoria delle trasformazioni di RIBAUCCOUR, nel seguente modo:

Partendo da una superficie S , riferita alle linee di curvatura, alla totalità delle congruenze di sfere di RIBAUCCOUR, aderenti alla S , corrisponde - per la trasformazione di LIE delle sfere in rette - la totalità delle congruenze W aderenti ad una stessa superficie S' . D'altra parte, considerata la sfera avente il centro in uno dei centri principali di curvatura e passante per il generico punto M della superficie, si riconosce che questa descrive (al variar del punto sulla superficie) una congruenza di RIBAUCCOUR, aderente alla S , da dirsi congruenza - limite perchè le focali coincidono nell'unica superficie S . Ne segue che trasformando - secondo LIE - la detta sfera in retta, si ottiene una congruenza W le cui focali pure coincidono e l'unico fuoco M' sul generico raggio, descrive la superficie trasformata S' della data superficie S (secondo LIE).

Seguendo questa via si determinano, in modo rapido, le formole del passaggio (in termini finiti) della S nella S' e viceversa ⁽³⁾ e si è in grado di *esplicitare* i legami tra gl'invarianti proiettivi della S' e gl'invarianti conformi della S .

In ultimo applichiamo la detta esplicitazione alla determinazione delle trasformate di LIE delle superficie N di GUICHARD ⁽⁴⁾ e riconosciamo che le dette trasformate costituiscono una classe di superficie R ⁽⁵⁾, precisamente quella stessa da noi determinata in altro lavoro ⁽⁶⁾, per la quale cioè tra la funzione θ che individua la generica superficie N e gl'invarianti proiettivi B

⁽³⁾ Cfr. le nostre formole (8) e (9) del passaggio della S nella S' con quelle riportate dal DARBOUX a pg. 172 e 175 del vol. IV.

⁽⁴⁾ Vedi: P. CALAPSO - *Alcune superficie di GUICHARD e le relative trasformazioni* (Annali di Matematica 1905).

A questa memoria rimandiamo il lettore per le formole e per alcuni risultati di cui ci serviamo in merito alle dette superficie N .

⁽⁵⁾ Vedi: FUBINI e CÈCH - *Geometria proiettiva differenziale*.

⁽⁶⁾ R. CALAPSO - *Alcune superficie di GUICHARD e loro trasformazione in superficie R* (Bollettino della Unione Matem. It. 1935, N. 2).

e P della corrispondente superficie R ⁽⁷⁾ intercede il legame:

$$B = -i \frac{\partial \theta}{\partial u}; \quad P = i \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

In questa nota abbiamo ommesso qualche procedimento d'inversione e qualche dimostrazione e ciò per non accrescere la mole del lavoro; ma diamo gli elementi per poter dedurre tutto.

Sarà oggetto di un prossimo lavoro uno studio più dettagliato e sistematico della detta trasformazione di LIE specialmente in relazione al modo di trasformarsi della S quando S' subisce una trasformazione proiettiva ed in relazione alla trasformazione per congruenza W esplicitata sugli invarianti proiettivi ⁽⁸⁾.

§ 1 - Nuova trattazione della trasformazione di LIE

1. Assumiamo una superficie S dello spazio euclideo ordinario e sia (K_1) la famiglia delle linee di curvatura di un sistema, (K_2) quella dell'altro sistema. Per il punto generico M della superficie S facciamo passare la sfera L_1 , tangente in M alla superficie ed avente contatto tripunto con la linea K_1 passante per M ; avremo così definito un sistema ∞^2 di sfere, una per ogni punto della superficie.

Il sistema $[L_1]$ di sfere, così costruito, si cambia per trasformazione di LIE in un sistema $[G_1]$ di rette, interpretabili come le tangenti alle asintotiche (K'_1) - di uno stesso sistema - di una superficie S' (perfettamente determinata e costruibile in termini finiti)

⁽⁷⁾ FUBINI e CĚCH, l. c. ⁽⁵⁾ Cap. V (ed. 1926).

⁽⁸⁾ Cfr. con FUBINI e CĚCH, l. c. Cap. V (ed. 1926) e con PICONE: *Sulle congruenze rettilinee W* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Tomo XXXVII, I sem. 1914).

Costruiamo similmente per il punto P la sfera L_2 tangente in M alla superficie S ed avente contatto tripunto con la linea K_2 passante per M ; il sistema $[L_2]$ di sfere, così costruito, si cambia per trasformazione di LIE in un sistema $[G_2]$ di rette, che sono le tangenti alle asintotiche (K'_2) dell'altro sistema della stessa superficie S' .

Per dimostrare questi teoremi (a norma del seguente n. 2 e del n. 3) notiamo anzitutto che le dette sfere L_1 ed L_2 sono proprio quelle che hanno i centri nei centri principali di curvatura della data superficie (e passano per M).

Infatti consideriamo per M la linea K_1 , il centro C di curvatura della sezione normale tangente a K_1 ed il centro di curvatura C' della linea K_1 .

Sia C_1 il simmetrico di M rispetto a C e sia C'_1 il simmetrico di M rispetto a C' . La sfera di centro C e passante per M contiene evidentemente il punto C_1 ; ma contiene anche C'_1 perchè per il teorema di MEUSNIER il triangolo PC'_1C_1 è rettangolo in C'_1 . Frattanto il circolo sezione di questa sfera col piano passante per la tangente a K_1 e per C'_1 coincide col circolo osculatore a K_1 ; la sfera costruita contiene dunque il circolo osculatore alla curva K_1 ed è quindi in contatto tripunto (almeno) con la curva K_1 . Vedremo che il contatto è tripunto e non più, eccetto il caso in cui il punto M della superficie sia immagine di un flecnodo⁽⁹⁾ di S' o addirittura che la superficie S' sia rigata; in tal caso se (K'_1) sono le generatrici rettilinee, ogni sfera L_1 è in contatto quadripunto con la relativa curva K_1 .

2. Ciò premesso denotiamo con x, y, z le coordinate ortogonali del generico punto M della superficie S , con u e v i parametri delle linee di curvatura di S e con X_r, Y_r, Z_r ($r=1, 2, 3$) i coseni direttori degli spigoli del triedro principale; introducendo le consuete notazioni per gli elementi della superficie si hanno le equazioni:

(9) Vedi FUBINI e CĚCH, l. c. pag. 89.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial x}{\partial u} = h X_1 & \frac{\partial x}{\partial v} = l X_2 \\ \frac{\partial X_1}{\partial u} = -p X_2 - a X_3 & \frac{\partial X_1}{\partial v} = q X_2 \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} = p X_1 & \frac{\partial X_2}{\partial v} = -q X_1 - b X_3 \\ \frac{\partial X_3}{\partial u} = a X_1 & \frac{\partial X_3}{\partial v} = b X_2 \end{array} \right.$$

per la cui integrabilità sono necessarie e sufficienti le equazioni (di CODAZZI e di GAUSS) :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial h}{\partial v} = pl & \frac{\partial l}{\partial u} = qh \\ \frac{\partial a}{\partial v} = pb & \frac{\partial b}{\partial u} = qa \\ \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u} + ab = 0. \end{array} \right.$$

Se $v = \text{cost.}$ è la famiglia di linee di curvatura sopra indicata con (K_1) , le coordinate del centro di curvatura C sono :

$$x - \frac{h}{a} X_3; \quad y - \frac{h}{a} Y_3; \quad z - \frac{h}{a} Z_3;$$

quindi se con

$$(3) \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \quad i = \sqrt{-1}$$

indichiamo le coordinate della sfera di centro C e passante per M , avremo :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = X_3 - \frac{a}{h} x; \quad \alpha_2 = Y_3 - \frac{a}{h} y; \quad \alpha_3 = Z_3 - \frac{a}{h} z \\ \alpha_4 + i\alpha_5 = \frac{a}{h}; \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 - 1 = 0. \end{array} \right.$$

3. Interpretiamo le (3) come coordinate di KLEIN di una retta G_1 dello spazio, per il che le coordinate raggio p_r , hanno le espressioni :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{14} = \alpha_1 - 1 = (X_3 - 1) - \frac{a}{h} x \\ p_{24} = \alpha_2 + i \alpha_3 = (Y_3 + i Z_3) - \frac{a}{h} (y + i x) \\ p_{34} = \alpha_4 + i \alpha_5 = \frac{a}{h} \end{array} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{23} = \alpha_1 + 1 = (X_3 + 1) - \frac{a}{h} x \\ p_{31} = \alpha_2 - i \alpha_3 = (Y_3 - i Z_3) - \frac{a}{h} (y - i x) \\ p_{12} = \alpha_4 - i \alpha_5 \end{array} \right.$$

e le equazioni della retta sono :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{24} x' - p_{34} y' = p_{23} \\ p_{34} x' - p_{14} x' = p_{31} \end{array} \right.$$

Consideriamo allora il punto M' (di questa retta) le cui coordinate (x', y', x') siano date dalle formole :

$$(8) \quad x' = \frac{1 + X_3}{Y_3 + i Z_3} \quad \left(\text{ossia } x' = \frac{Y_3 - i Z_3}{1 - X_3} \right)$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = -(y - i x) - x x' \\ y' = x - (y + i x) x' \end{array} \right.$$

e dimostriamo che questo punto genera una superficie per cui $v = \text{cost}$ ed $u = \text{cost}$ sono le asintotiche e le rette $[G_1]$ sono le tangenti alla famiglia di asintotiche $v = \text{cost}$.

Per derivazione da (8) e (9), tenendo conto delle (1) e (2) e delle identità relative all'ortogonalità del determinante dei nove coseni X_r, Y_r, Z_r , segue, con un procedimento che omettiamo, il seguente gruppo di formule:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta} \frac{\partial x'}{\partial u} = -a x - h (1 - X_3) \\ \bar{\theta} \frac{\partial x'}{\partial v} = -i b x - i l (1 - X_3) \end{array} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta} \frac{\partial y'}{\partial u} = h (Y_3 + i Z_3) - a (y + i x) \\ \bar{\theta} \frac{\partial y'}{\partial v} = i l (Y_3 + i Z_3) - i b (y + i x) \end{array} \right.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\theta} \frac{\partial x'}{\partial u} = a \\ \bar{\theta} \frac{\partial x'}{\partial v} = b i \end{array} \right.$$

in cui si è posto

$$(13) \quad \bar{\theta} = \frac{(Y_3 + i Z_3) (1 - X_3)}{X_1 - i X_2}.$$

Confrontando queste con le (5) risulta:

$$(14) \quad \frac{\partial x'}{\partial u} : \frac{\partial y'}{\partial u} : \frac{\partial x'}{\partial v} = p_{14} : p_{24} : p_{34}$$

cioè le rette $[G_1]$ sono le tangenti alle linee $v = \text{cost}$ della superficie S' . Questa risulta riferita alle asintotiche.

Infatti da (10) (11) (12) si trae che i coseni direttori della normale alla S' sono dati dalle formole:

$$(15) \quad X' = Y_3 + i Z_3; \quad Y' = 1 - X_3; \quad Z' = x (Y_3 + i Z_3) + \\ + (y + i x) (1 - X_3)$$

e da queste per derivazione si ricava

$$(16) \quad \Sigma \frac{\partial x'}{\partial u} \frac{\partial X'}{\partial u} = 0; \quad \Sigma \frac{\partial x'}{\partial v} \frac{\partial X'}{\partial v} = 0$$

$$(17) \quad \theta \Sigma \frac{\partial x'}{\partial v} \frac{\partial X'}{\partial u} = \\ = [i(Y_1 + iZ_1)(1 - X_3) + iX_1(Y_3 + iZ_3)](bh - al).$$

Le (16) dimostrano appunto che sulla superficie S' le linee $u = \text{cost}$ e $v = \text{cost}$ sono le asintotiche; in quanto alla (17) si osserva che l'espressione in parentesi quadra è diversa da zero, giacchè alle condizioni iniziali

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ha il valore -1 ; quindi deduciamo

$$(18) \quad \Sigma \frac{\partial x'}{\partial v} \frac{\partial X'}{\partial u} \neq 0.$$

Eccezione si ha soltanto nel caso in cui $bh - al = 0$; si può dimostrare che questo caso si presenta quando la superficie di partenza S è una sfera.

§ 2. - I legami fra l'invarianti.

Possiamo ora formare le espressioni degl'invarianti proiettivi di S' mediante gl'invarianti di S rispetto al gruppo conforme.

Gl'invarianti fondamentali di S rispetto alle trasformazioni conformi sono ⁽¹⁰⁾

⁽¹⁰⁾ P. CALAPSO I. c. (2).

$$(19) \quad \omega = b - \frac{al}{h}; \quad \Omega = a - \frac{bh}{l}$$

$$(20) \quad W = -\omega\Omega + 2\frac{\Omega}{\omega} \left[2\frac{\partial^2 \log h}{\partial v^2} - 2\frac{\partial \log h}{\partial v} \frac{\partial \log l}{\partial v} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \log h}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{1}{h} \frac{\partial l}{\partial u} \right)^2 + b^2 \right]$$

e questi invarianti ω , Ω , W sono caratterizzati dalle equazioni

$$(21) \quad \begin{cases} 4\frac{\partial}{\partial u} \left[\omega \left(\frac{\partial^2 \log \Omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log \omega}{\partial u} \cdot \frac{\partial \log \Omega}{\partial v} \right) \right] = -\frac{\omega}{\Omega} \frac{\partial}{\partial v} \left(\Omega^2 - \frac{\Omega}{\omega} W \right) \\ 4\frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\Omega}{\omega} \left(\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log \omega}{\partial u} \cdot \frac{\partial \log \Omega}{\partial v} \right) \right] = -\frac{\Omega}{\omega} \frac{\partial}{\partial u} \left(\omega^2 + \frac{\omega}{\Omega} W \right). \end{cases}$$

D'altra parte, essendo la superficie S' riferita alle asintotiche, le funzioni x' , y' , z' soddisfano ad un sistema della forma ⁽¹⁾

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x'}{\partial u^2} = A \frac{\partial x'}{\partial u} + B \frac{\partial x'}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x'}{\partial v^2} = P \frac{\partial x'}{\partial u} + Q \frac{\partial x'}{\partial v}. \end{cases}$$

Sostituendo in queste espressioni (10) e (12) si ha :

⁽¹⁾ Cfr. con FUBINI e ČEŤH l. c. pg. 94. Per accordare le notazioni ricordiamo che basta porre $b = B$; $p = P$; $W_1 = L + \frac{\partial b}{\partial v}$; $W_2 = M + \frac{\partial p}{\partial u}$.
Noi assumiamo gl' invarianti proiettivi della S' con le denominazioni :

$$B; P; W_1; W_2.$$

I simboli b e p di cui ora parliamo non sono da confondere con le quantità già adoperate nel sistema (1) e (2).

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial u} + A \bar{\theta} \right) \frac{\partial x'}{\partial u} + B \bar{\theta} \frac{\partial x'}{\partial v} = -\frac{\partial a}{\partial u} x - \frac{\partial h}{\partial u} (1 - X_3) \\ \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial u} + A \bar{\theta} \right) \frac{\partial x'}{\partial u} + B \bar{\theta} \frac{\partial x'}{\partial v} = \frac{\partial a}{\partial u} . \end{array} \right.$$

Se ne deduce:

$$(24) \quad B i \left(\frac{b}{l} - \frac{a}{h} \right) = \frac{h}{l} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{a}{h} \right) .$$

Similmente

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} P \bar{\theta} \frac{\partial x'}{\partial u} + \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial v} + Q \bar{\theta} \right) \frac{\partial x'}{\partial v} = -i \frac{\partial b}{\partial v} x - i \frac{\partial l}{\partial v} (1 - X_3) \\ P \bar{\theta} \frac{\partial x'}{\partial u} + \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial v} + Q \bar{\theta} \right) \frac{\partial x'}{\partial v} = i \frac{\partial b}{\partial v} , \end{array} \right.$$

e si trova

$$(24 \text{ bis}) \quad P i \left(\frac{b}{l} - \frac{a}{h} \right) = \frac{l}{h} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{b}{l} \right) .$$

Ciò posto, gl' invarianti proiettivi della S' , con riferimento al sistema (22) sono [cfr. l. c. (18)]

$$B; P; W_1 = \frac{\partial A}{\partial u} - \frac{1}{2} A^2 - BQ; W_2 = \frac{\partial Q}{\partial v} - \frac{1}{2} Q^2 - AP$$

e si tratta di esprimere questi in funzione di ω , Ω , W (vedi le (19) (20) (21)).

Per i primi due, ricordando le (1) e (2) si trae

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = -l \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{a}{h} \right) .$$

Ma si ha pure

$$\frac{\omega}{l} = \frac{b}{l} - \frac{a}{h}; \quad -\frac{\Omega}{h} = \frac{b}{l} - \frac{a}{h}$$

perciò segue

$$\frac{h}{l} = -\frac{\Omega}{\omega}$$

e quindi la (24) da :

$$(26) \quad Bi = \frac{\Omega}{\omega} \frac{\partial \log \Omega}{\partial u}.$$

Similmente

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = -h \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{b}{l} \right)$$

e per conseguenza

$$(27) \quad Pi = -\frac{\omega}{\Omega} \frac{\partial \log \Omega}{\partial v}.$$

Molto laborioso è il procedimento per mezzo del quale si ricavano le altre due formole relative a W_1 e W_2 . Ci limitiamo a trascrivere il risultato finale, cioè :

$$(28) \quad W_1 - \frac{\partial B}{\partial v} = \frac{\partial^2 \log \Omega}{\partial u^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log \Omega}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\Omega^2 - \frac{\Omega}{\omega} W \right)$$

$$(29) \quad W_2 - \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial v^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \log \omega}{\partial v} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\omega^2 + \frac{\omega}{\Omega} W \right)$$

Le formole (26) - (27) - (28) - (29) esprimono appunto gl' invarianti proiettivi B , P , W_1 e W_2 di S' per mezzo degl' invarianti conformi ω , Ω , W della superficie S .

Rimandiamo ad altro lavoro l' inversione delle dette formole.

§ 3. - Deduzione di una classe di superficie R .

La formazione delle superficie R è equivalente alla formazione delle reti O isoterme di uno spazio a quattro dimensioni ⁽¹²⁾. Qui, valendoci della trasformazione di LIE - e dopo fatta l'anzidetta esplicitazione sugli invarianti - possiamo - p. es. - dedurre una classe di superficie R , senza uscire dallo spazio a tre dimensioni.

Partiamo da una superficie N di GUICHARD ⁽¹³⁾ che riferiamo alle linee di curvatura; per queste superficie, le funzioni fondamentali introdotte mediante le (1) hanno le espressioni [l. c. (4)]

$$(30) \quad \begin{cases} h = e^{\omega} \operatorname{sen} h \theta; & l = e^{\omega} \operatorname{cosh} h \theta \\ a = -\cos h \theta - H \operatorname{sen} h \theta; & b = -\operatorname{sen} h \theta - H \cos h \theta \end{cases}$$

[in queste, che riportiamo dal l. c. ⁽⁴⁾, le funzioni trigonometriche sono *iperboliche*; la θ non è da confondere con quella introdotta nelle (10) (11) (12)] ⁽¹⁴⁾.

Se introduciamo l'invariante conforme W , ponendo:

$$(31) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} + \frac{1}{2 \operatorname{sen} h^2 \theta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial u} \right)^2 - \frac{1}{2 \cos h^2 \theta} \left(\frac{\partial \omega}{\partial v} \right)^2 + \operatorname{tg} h \theta \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \\ & + \cot h \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + \frac{1}{2} \cos h 2 \theta (1 + H^2) + 2H \operatorname{sen} h \theta \cos h \theta + W = 0 \end{aligned}$$

le funzioni θ e W soddisfano alle equazioni [P. CALAPSO l. c. ⁽⁴⁾]:

⁽¹²⁾ Il detto passaggio è stato da me esplicitato nella nota: R. CALAPSO - *Riduzione della deformazione proiettiva di una superficie R alla trasformazione C_m delle superficie isoterme* (Rend. della R. Acc. de. Lincei, vol. VII, serie 6^a 1928).

⁽¹³⁾ Vedi: P. CALAPSO l. c. ⁽⁴⁾.

⁽¹⁴⁾ In questo paragrafo la lettera h posta dopo il nome di una funzione trigonometrica sta ad indicare che questa è *iperbolica*.

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial u} &= \frac{1}{\cos^2 h \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{1}{\operatorname{sen} h^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} \\ &\quad - \frac{1}{\operatorname{sen} h \theta \cos h \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v^2} - 2 \operatorname{tg} h \theta \frac{\partial \theta}{\partial u} W, \\ \frac{\partial W}{\partial v} &= - \frac{1}{\cos h^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} - \frac{1}{\operatorname{sen} h^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} \\ &\quad + \frac{1}{\operatorname{sen} h \theta \cos h \theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2 \partial v} - 2 \operatorname{cot} h \theta \frac{\partial \theta}{\partial v} W. \end{aligned} \right.$$

Per avere gl'invarianti proiettivi della superficie trasformata di N secondo LIE, basta applicare le nostre formole (24) e (24 bis).

Partiamo dalla (24), cioè

$$(33) \quad Bi(bh - al) = h \frac{\partial a}{\partial u} - a \frac{\partial h}{\partial u}.$$

Si ha per le (30)

$$bh - al = e^\omega$$

$$h \frac{\partial a}{\partial u} - a \frac{\partial h}{\partial u} = e^\omega \frac{\partial \theta}{\partial u} + e^\omega \operatorname{sen} h^2 \theta \left[(H + \operatorname{cot} h \theta) \frac{\partial \omega}{\partial u} - \frac{\partial H}{\partial u} \right].$$

Ma l'espressione in parentesi al 2° membro è nulla [vedasi P. CALAPSO l. c. (*) § II formole (B)] quindi rimane:

$$h \frac{\partial a}{\partial u} - a \frac{\partial h}{\partial u} = e^\omega \frac{\partial \theta}{\partial u}$$

e dalla (33) segue

$$Bi = \frac{\partial \theta}{\partial u}$$

similmente

$$Pi = - \frac{\partial \theta}{\partial v}$$

e perciò le trasformate (secondo LIE) delle superficie N di GUICHARD costituiscono una classe di superficie R .