Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Otton Nikodym

Quelques observations sur les intégrales générales des équations différentielles

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 6 (1935), p. 21-43

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1935__6__21_0>

QUELQUES OBSERVATIONS SUR LES INTÉGRALES GÉNÉRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par Otton Nikodym *à Varsovie*

1. La théorie classique de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

et celle du système d'équations

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

ou du système complètement intégrable

$$dy_\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_{\alpha i}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)\, dx_i \qquad (\alpha = 1, \ldots, m) \tag{3}$$

part du théorème de l'existence et de l'unicité locale de la solution passant par un point donné Mais ce sont surtout l'existence, l'unicité et quelques autres simples propriétés de la solution générale qui présentent le vrai point de départ pour la théorie qui développe les relations entre les équations en question et les équations partielles y correspondant. En effet, c'est la fonction $y = Y(x; \xi, \eta)$, (pour l'équation (1)), où l'on a

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y)$$

au voisinage du point $x = x^0$, $\xi = x^0$, $\eta = y^0$, et telle que $\eta = Y(\xi;\ \xi,\ \eta)$, qui dans ce cas, joue le rôle fondamental, et il en est d'analogue pour les systèmes (2) et (3). Dans les cas les plus importants, l'integrale $Y(x;\ \xi, \eta)$, qu'on appelle l'*intégrale générale* et *normale*, jouit de propriétés simples de continuité, unicité et *réciprocité*, cette dernière exprimant que la relation $y = Y(x;\ \xi,\ \eta)$ entraîne $\eta = Y(\xi;\ x,\ y)$. Dans les traités classiques on n'insiste pas, en général, sur la démonstration détaillée de ces propriétés et sur leur discussion. En outre, dans leur démonstrations, on utilise parfois des particularités des équations différentielles, quoique les propriétés en question ne dépendent pas du caractère de l'équation: elles s'appliquent aux cas (1), (2) ou (3).

Dans ce qui va suivre, je me propose d'examiner quelques propriétés fondamentales de l'intégrale générale et normale, en admettant un point de vue abstrait.

Abstraction faite de ce qu'il s'agit ici des solutions des équations différentielles ou de leurs systèmes, je considère, d'une manière générale, un problème (P) pour lequel je suppose que ses solutions satisfont à certains axiomes. Ensuite, j'étudie des relations logiques qui existent entre différentes propriétés qu'on peut imposer aux solutions générales du problème. Loin de vouloir épuiser les nombreuses propriétés qu'on peut imaginer ici, je me borne à celles qui m'ont paru importantes ou intéressantes.

Je ne considère que le problème *local*: tout se passe au voisinage d'un point donné. Le but du travail présent est de jeter de la lumière sur les principes de la théorie des équations différentielles. Pour fixer les idées, je suppose que les points qui figurent dans nos raisonnements appartiennent à des espaces à un nombre fini de dimensions, quoique on verra sans peine que nos considérations peuvent s'étendre à des espaces fonctionnels appropriés.

Voici quelques notations utilisées dans le texte.

Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (x_1, \ldots, x_m)$, $(n \geq m)$ des points variables et $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ un point fixe. Nous désignerons par $S_y(x^0;\ a)$ l'ensemble de tous les points $x = (x_1, .., x_n)$, pour lesquels la distance de $y = (x_1, \ldots, x_m)$ à $(x_1^0, \ldots, x_m^0)$ est inférieure à $a > 0$. L'indice y sera supprimé, si $n = m$, ou si aucun malentendu ne sera à craindre.

On dira qu'une propriété a lieu *au voisinage du point* x^0, s'il existe un nombre $a > 0$ tel, que ladite propriété subsiste pour tout x appartenant à la sphère $S_x(x^0, a)$; on s'exprimera aussi que la propriété a lieu *dans* (x^0).

$E \subset F$ signifie que l'emsemble E est contenu dans F. Par $x \varepsilon E$ on veut dire que le point x appartient à l'ensemble E. Le symbole $\overline{E}$ désigne l'ensemble composé de E et de tous ses points d'accumulation : on dira *la fermeture de* E.

$E \cdot F$ désigne l'ensemble de tous les points x pour lequels on a $x \varepsilon E$, $x \varepsilon F$.

$\langle A, B \rangle$ désigne le segment rectiligne et fermé dont les extremités sont les points A et B.

$\overline{\overline{df}}$ désigne : égal par définition.

2. Soit donné un problème (P) dont les solutions sont des fonctions $f(x)$ qui le satisfont aux points x'. Supposons que la nature du problème est telle que les *axiomes* suivants sont vérifiés :

1. *si* $f(x)$ *est une solution de* (P) *au voisinage du point* $x = x^0$, $f(x)$ *est continue dans* (x^0),

2. *si* $f(x)$ *est une solution de* (P) *dans* (x^0), *toute fonction* $g(x)$ *coïncidant avec* $f(x)$ *dans* (x^0), *en représente aussi une.*

L'espace des points x et des valeurs y de $f(x)$ peuvent être quelconques.

Nous nous proposons d'étudier d'abord des relations logiques qui existent entre les *conditions* suivantes :

1. *On peut trouver un nombre* $a > 0$ *tel que, si* $(\xi, \eta) \varepsilon S(x^0, y^0; a)$, *il existe unicitement* (1) *dans* (ξ) *une*

(1) Cela veut dire qu'il existe au moins une telle solution, et que si $f_1(x)$ et $f_2(y)$ sont deux solutions de (P) au voisinage de $x = \xi$, telles que $f_1(\xi) = f_2(\xi)$, on a $f_1(x) = f_2(x)$ dans (ξ).

solution $f(x)$ du problème (P) au voisinage de $x=\xi$ et telle que $\eta=f(\xi)$.

II. *Il existe une fonction $y=Y(x;\ \xi,\ \eta)$ basée* [2] *dans $(x^0;\ x^0,\ y^0)$, telle que*

1) *si on la considère comme fonction de x et des paramètres ξ, η, elle resoud le problème (P) au voisinage de $(x^0,\ x^0,\ y^0)$* [3],

2) *on a $\eta=Y(\xi;\ \xi,\ \eta)$ au voisinage de $\xi=x^0$, $\eta=y^0$.*

II.a *Il existe une fonction $y=Y(x;\ \xi,\ \eta)$ basée dans $(x^0,\ x^0,\ y^0)$, jouissant des propriétés* 1) *et* 2) *spécifiées dans II et continue dans le point $(x^0;\ x^0,\ y^0)$.*

II.b *Il existe une fonction $y=Y(x;\ \xi,\ \eta)$ comme plus haut, mais continue dans $(x^0;\ x^0,\ y^0)$.*

Remarquons d'abord, que la propriété II équivant à la suivante:

II'. Il existe deux nombres $a>0$ et $b>0$ tels que si $(\xi,\ \eta)\in S(x^0,\ y^0;\ b)$, il existe une fonction $y=f(x)$ basée dans $S(x^0;a)$, y resolvant le problème (P) et telle que $\eta=f(\xi)$.

En effet, supposons que II subsiste, et soient $Y(x:\ \xi,\ \eta)$ et $a>0$ choisis conformément à l'énoncé de II. Envisageons un nombre $b>0$ tel que

$$S_x(x^0;\ x^0,\ y^0;\ b)\cdot S_{\xi,\eta}(x^0;\ x^0,\ y^0;\ b)\subset S_{x,\xi,\eta}(x^0;\ x^0,\ y^0;\ a).$$

Soit $(\xi',\ \eta')\in S(x^0,\ y^0;\ b)$ et définissons la fonction $f(x)\ \overline{\overline{df}}\ Y(x;\ \xi'\ \eta')$ dans $S_x(x^0;\ b)$, ce qui a évidemment un sens bien déterminé. La fonction représente une solution de (P) au

(2) Nous préférons de nous exprimer qu'une fonction *est basée dans un ensemble E* au lieu de dire, comme d'habitude, quelle soit *définie*, puisque on sait bien qu'il existe des fonctions qu'on ne sait pas définir effectivement.

(3) Cela veut dire qu'il existe un nombre $a>0$ tel que, si $(x'',\ x',\ y')\in S(x^0,\ x^0,\ y^0;\ a)$ la fonction $Y(x;\ x'\ y')$ resoud (P) au voisinage de $x=x''$.

voisinage de tout point $x \in S_x(x^0; b)$; donc elle est une solution de (P) dans $S_x(x^0; b)$. De plus on a $\eta' = f(\xi')$. Par conséquent II′ a lieu. Réciproquement supposons II′ et choisissons les nombres $a > 0$ et $b > 0$ conformément à son énoncé. Soit $(\xi, \eta) \in S(x^0, y^0; a)$. Il existe au moin une solution $f(x)$ de (P), telle que $f(\xi) = \eta$ est basée dans $S_x(x^0; b)$. En en choisissant une (à l' aide de l' axiome de Zermelo) définissons $Y(x; \xi, \eta)$ dans $S_x(x^0; b)$ comme égale à $f(x)$.

La fonction $Y(x; \xi, \eta)$ ainsi trouvée est basée dans $(x^0; x^0, y^0)$ et satisfait à la condition II.

On voit immédiatement que le condition IIb implique IIa et celle implique II.

Nous verrons un peu plut tard que l'implication inverse n'a pas lieu, même si l'on suppose I.

3. Les conditions I e II sont indépendantes mutuellement, ce qu'on peut prouver par des exemples très faciles:

Exemple: En considérant l' équation différentielle ordinaire $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$, posons $F(x, y) = 0$ pour $y \leq 0$; $F(x, y) = c$ pour $x > 0$, $y = cx$, où $0 < c \leq 1$; $F(x, y) = -c$ pour $x < 0$, $y = -cx$, où $0 < c \leq 1$, et $F(x, y) = \frac{x}{y}$ pour $y > 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$.

Cet exemple montre, que la propriété d' unicité I a lieu, tandis qu' il n' existe aucune fonction $Y(x; \xi, \eta)$ satisfaisant aux exigences de II.

Exemple: La fonction $Y(x; \xi, \eta) \overline{\overline{\scriptstyle df}} (x - \xi + \sqrt[3]{\eta})^3$, définie partout, représente une solution de l' équation $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y^2}$. La fonction Y jouit de la propriété IIb au voisinage du point $(0; 0, 0)$, mais I ne subsiste pas, puisque l' équation différentielle admet outre Y aussi la solution $y = 0$. Voici maintenant un exemple très simple qui montre que IIa n'implique pas IIb, même si l'on suppose I:

Exemple: Considérons le système d' equations:

$$\frac{dy_1}{dx} = F_1(x,\ y_1,\ y_2)\,, \qquad \frac{dy_2}{dx} = F_2(x,\ y_1,\ y_2)\,,$$

où $F_2(x,\ y_1,\ y_2) \underset{df}{=} 0$ partout, et $F_1(x,\ y_1,\ y_2) = 1$ pour $y_2 \geq 0$ et $= 1$ pour $y_2 < 0$. Les intégrales du système sont des droites $\alpha + x = y_1$, $y_2 = \text{const}$ pour $y_2 \geq 0$ et des droites $\alpha - x = y_1$, $y_2 = \text{const}$ pour $y_2 < 0$. On voit sans peine que l' unicité I a lieu au voisinage de $x = y_1 = y_2 = 0$. La fonction Y satisfaisant à II existe et est bien déterminée :

$$Y_2(x;\ \xi,\ \eta) = \text{const}$$

$$Y_1(x;\ \xi,\ \eta) = \begin{cases} x + (\eta_1 - \xi) & \text{pour } \eta_2 \geq 0 \\ -x + (\eta_1 + \xi) & \text{pour } \eta_2 < 0. \end{cases}$$

Y n' est continue que pour $x = \xi$. Par conséquant la propriété IIa subsiste pour $x = \xi = \eta_1 = \eta_2 = 0$ mais IIb n' y a pas lieu.

Un peu plus bas nous construirons un exemple montrant que I et II n'entraînent pas IIa.

4. Dans cette matière il est intéressant de remarquer que dans le cas de deux dimensions, donc en particulier dans le cas d' une seule équation différentielle $\frac{dy}{dx} = F(x,\ y)$ les propriétés I et II impliquent IIb. La source de ce fait est de nature topologique et est en connexion avec deux théorèmes de M^me^ S. Nikodym [4] qui peuvent être réunis dans l' énoncé suivant :

Soit D l'intérieur d'une courbe simple fermée C du plan. Supposons, qu'on ait décomposé D en des arcs simples ouverts $\{K\}$ jouissant des propriétés suivantes:

[4] *Fund. Math.* t. XVI, 1930, p. 7-16. *Sur la décomposition du cercle ouvert en arcs simples ouverts.* Voir aussi t. XV, p. 263-270.

1. leurs diamètres surpassent un nombre positif fixe,

2. ils sont disjoints deux-à-deux, même si on les ferme,

3. les deux bouts de chaque arc K ne coïncident jamais et appartiennent à C,

4. par tout point $p \varepsilon D$ passe une courbe K.

Soit $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ une suite infinie de points de D, telle que $\lim p_n = p_0$. Désignons par K_n, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ l'arc de la décomposition passant par p_n. Dans ces conditions:

I. il existe un nombre $a > 0$ tel que *ens d'acc* $\{K_n \cdot S(p_0, a)\} \subset K_0$,

II. il existe un sous-arc ouvert L contenu dans K_0, contenant p_0 et tel que [5] $L \subset$ *ens lim* K_n.

Nous citerons les deux thèses par I°) et II°).

5. En procédant au problème qui nous occupe, supposons, qu'on ait un problème (P) satisfaisant aux axiomes admis et dont les solutions sont des fonctions $y = f(x)$ réelles de la variable réelle x. Soit (x_0, y_0) un point du plan. Supposons que les conditions I et II sont réalisées dans

$$(1) \qquad |x - x_0| < a, \quad |\xi - x_0| < a, \quad |\eta - y_0| < a$$

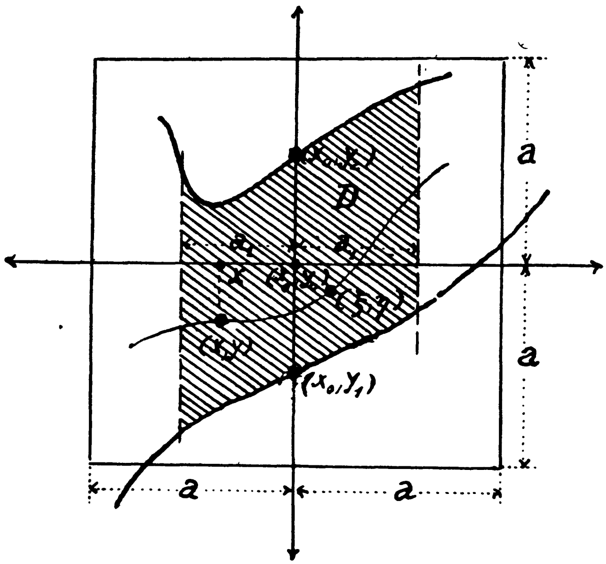
pour $y = Y(x; \xi, \eta)$.

Nous utilisons les théorèmes I°) et II°) à la démonstration que $Y(x; \xi, \eta)$ est continue dans $(x_0; x_0, y_0)$.

Soient (x_0, y_1), (x_0, y_2) deux points du carré ouvert (1) tels que

$$y_1 < y_0 < y_2.$$

[5] D'après Z. Janiszewski par *ensemble d'accumulation* d'une suite $\{E_n\}$ d'ensembles on entend l'ensemble composé de toutes les limites de suites de points $x_{k_n} \varepsilon E_{k_n}$ où $k_n \to \infty$: par *l'ensemble limite* de $\{E_n\}$ on entend l'ensemble composé de toutes les limites de suites de points $x_n \varepsilon E_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Z. Janiszewski. *Thèse.*



Les fonctions $Y(x;\ x_0,\ y_1)$ et $Y(x;\ x_0,\ y_2)$ étant continues d'après l'axiome admis, on peut trouver un nombre $a_1 > 0$ où $a_1 < a$, tel que dans $x_0 - a_1 \leq x \leq x_0 + a_1$ leurs valeurs diffèrent de y_0 moins que de a. En vertu de I on y a :

$$Y(x;\ x_0,\ y_1) < Y(x;\ x_0,\ y_2),$$

de maniére que le domaine ouvert D:

$$x_0 - a_1 < x < x_0 + a_1, \quad Y(x;\ x_0,\ y_1) < y < Y(x;\ x_0,\ y_2)$$

se trouve contenu, même après la fermeture, dans le carré ouvert.

Par tout point $(\xi,\ \eta) \varepsilon D$ passe une courbe, définie par $y = Y(x;\ \xi,\ \eta)$. Elle est unique en vertu de l'unicité supposée I. On voit, que nous nous trouvons dans les conditions des théorèmes de M$^{\text{me}}$ S. Nikodym.

Désignons par $\{K\}$ les courbes de la décomposition de D. Fixons un point $(x,\ \xi,\ \eta)$, où $(\xi,\ \eta) \varepsilon D$ et $x_0 - a_1 < x < x_0 + a_1$. Il s'agit de démontrer que Y y est continue. Soit donc $(x_n,\ \xi_n,\ \eta_n)$ une suite de points satisfaisant aux mêmes conditions et tendant vers (x, ξ, η). Soient K et K_n les arcs simples ouverts de la décomposition, passant respectivement par (ξ, η) et (ξ_n, η_n). Je dis que :

$$K \subset ens\ lim\ K_n. \tag{2}$$

En effet, d'aprés le théorème II°, si un point de K appartient à l'ensemble limite de K_n, il en est de même pour tous les points de K se trouvant au voisinage de ce point. Mais l'ensemble limite est un ensemble fermé; par conséquent il contient K, puisqu'il contient (ξ, η). La relation (2) est ainsi démontrée.

Je dis maintenant, que

$$D \cdot ens\ lim\ K_n \subset K. \tag{3}$$

Supposons, par impossible, que le point (ξ', η') n'appartienne pas à K et soit contenu dans $D \cdot ens\ lim\ K_n$. Si l'on pose

$$\eta'' \overline{\overline{df}}\, Y(\xi'; \xi, \eta),$$

on a $\eta' \neq \eta''$. Posons :

$$a_2 \overline{\overline{df}}\, |\eta' - \eta''|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ un nombre $< a_2$ et $< a_1$, et choisi conformément au théorème I°) de manière, que si l'on désigne par Q le carré ouvert, centré en (ξ', η') et de côté 2ε, on a

$$ens\ d'acc\ (K_n, \overline{Q}) \subset K. \tag{4}$$

La courbe K, c'est-à-dire $y = Y(x; \xi, \eta)$ étant continue, on peut trouver un nombre $\delta > 0$ tel que $\delta < \varepsilon$ et que la relation $|x - \xi'| \leq \delta$ implique $|Y(x; \xi, \eta) - \eta''| < \frac{\varepsilon}{2}$ quel que soit x.

Comme $(\xi', \eta'') \in ens\ lim\ K_n$, il existe une suite infinie de points $(\xi''_n, \eta''_n) \in K_n$, telle que $lim\ (\xi''_n, \eta''_n) = (\xi', \eta')$.

Pour la même raison, il existe une suite infinie $(\xi'_n, \eta'_n) \in K_n$, telle que $lim\ (\xi'_n, \eta'_n) = (\xi', \eta')$. Donc, à partir d'un indice n on a :

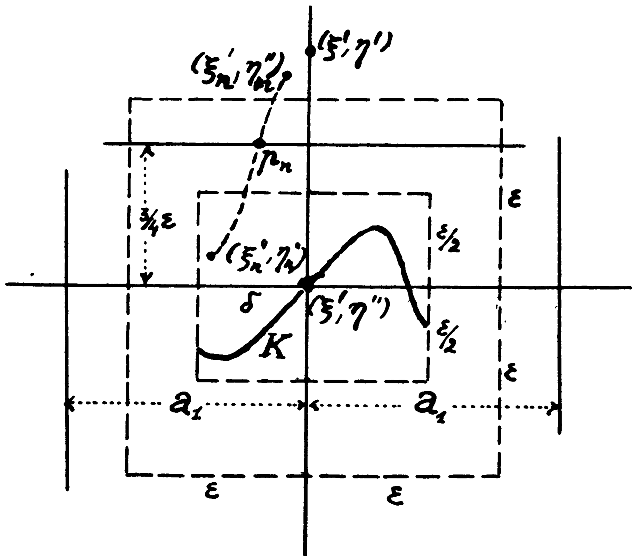
$$(5)\qquad \begin{cases} \xi' - \delta < \xi'_n < \xi' + \delta, & \xi' - \delta < \xi''_n < \xi' + \delta \\ \eta'_n > \eta' + \varepsilon, & \eta''_n < \eta' + \dfrac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Pour les dits indices, le sous-arc de K_n déterminé par ses bouts (ξ'_n, η'_n) et (ξ''_n, η''_n) coupe nécessairement le segment

$$(6)\qquad y = \frac{3}{4}\varepsilon + \eta', \quad \xi' - \delta < x < \xi' + \delta$$

puisque $Y(x, \xi_n, \eta_n)$ est une fonction continue de x.

Soient $\{p_n\}$ une suite de points d'intersection, où $p_n \in K_n$



et situés sur (6). En en extrayant une suite convergente $\{p_{s_n}\}$, on obtient une limite, soit p, qui est située sur le segment (fermé) (6) et, par conséquent, on a, d'après (6), pour ses coordonnées

$$(7)\qquad \xi' - \delta \leq x_p \leq \xi' + \delta, \quad y_p > \eta' + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais, d'autre part, on a $p \varepsilon$ *ens d'acc* $(K_n \cdot \overline{Q})$, ce qui, d'après (4), entraîne que $p \varepsilon K$. Il en résulte que $y_p < \eta' + \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui est en contradiction avec (7). La relation (3) est ainsi démontrée.

On voit que (2) et (3) subsistent aussi pour n'importe quelle suite partielle $\{K_{s_n}\}$ extraite de $\{K_n\}$;

$$(8) \qquad \begin{cases} D \cdot ens \lim\limits_{n \to \infty} K_{s_n} \subset K \\ K \subset ens \lim\limits_{n \to \infty} K_{s_n} . \end{cases}$$

Cela étant posé, revenons au problème de la continuité de la fonction Y, c'est-à-dire à la démonstration de la relation:

$$y = Y(x;\ \xi,\ \eta) = \lim_{n \to \infty} Y(x_n;\ \xi_n,\ \eta_n),$$

si l'on suppose que $(x_n;\ \xi_n,\ \eta_n) \to (x;\ \xi,\ \eta)$.

Posons $y_n \underset{df}{=} Y(x_n;\ \xi_n,\ \eta_n)$ et extrayons de la suite de points $(x_n,\ y_n)$ une suite convergente $(x_{s_n},\ y_{s_n})$. En soit $(\overline{x},\ \overline{y})$ la limite. On a: $\overline{x} = \lim x_{s_n} = x \varepsilon (x_0 - a_1,\ x_0 + a_1)$, donc $(\overline{x},\ \overline{y}) \varepsilon D. ens \lim\limits_{n \to \infty} K_{s_n}$. Donc, on a, en tenant compte de (8): $(\overline{x},\ \overline{y}) \varepsilon K$.

Il en résulte que $\overline{y} = Y(x;\ \xi,\ \eta) = y$ indépendemment du choix de la suite convergente $(x_{s_n},\ y_{s_n})$. Par conséquant on a: $\lim\limits_{n \to \infty} Y(x_n;\ \xi_n,\ \eta_n) = y = Y(x;\ \xi,\ \eta)$, ce qui démontre la continuité en question.

Il est bien probable que la continuité de Y a toujours lieu (si on suppose I et II) si les solutions du problème (P) sont des variétés à $n-1$ dimensions plongées dans l'espace à n dimensions. Mous n'insistont pas sur ce point.

6. Etablissons maintenant deux conséquences de I et II.a

Théorème [6] Supposons que I et II subsistent. Dans ces conditions toute fonction $\overline{Y}(x; \xi, \eta)$ jouissant dans $(x^0; x^0, y^0)$ des propriétés spécifiées dans l'énoncé de II, coïncide avec $Y(x; \xi, \eta)$ dans $(x^0; x^0, y^0)$.

Démonstration. Supposons que la thèse n'est pas vraie. Il existe alors une suite de points $(x_n; \xi_n, \eta_n) \rightarrow (x^0; x^0, y^0)$ telle que

$$(0) \qquad \overline{Y}(x_n; \xi_n, \eta_n) \neq Y(x_n; \xi_n, \eta_n).$$

Soit $a > 0$ un nombre tel, que la propriété I ainsi que les propriétés conformes à II′ subsistent pour Y et pour $\overline{Y}$ [7] dans $x \in S(x^0, a)$; $\xi \in S(x^0, a)$; $\eta \in S(y^0, a)$. En vertu de la continuité de la fonction Y au point $(x^0; x^0, y^0)$, on peut trouver un nombre $b > 0$, où $b < a$, de manière qu'on ait :

$$(1) \qquad Y(x; \xi, \eta) \in S_y(y^0; a)$$

dès que

$$x \in S(x^0; b), \quad \xi \in S(x^0; b), \quad \eta \in S(y^0; b).$$

A partir d'un indice n on a

$$(x_n; \xi_n, \eta_n) \in S_x(x^0; x^0, y^0; b) \cdot S_\xi(x^0; x^0, y^0; b) \cdot S_\eta(x^0; x^0, y^0; b),$$

donc

$$(2) \qquad Y(x_n; \xi_n; \eta_n) \in S_y(y^0; a).$$

Puisque

$$(3) \qquad \eta_n = \overline{Y}(\xi_n: \xi_n, \eta_n) = Y(\xi_n; \xi_n, \eta_n),$$

[6] C'est le théorème de l'unicité locale pour l'intégrale générale et normale.

[7] On sait, que II et II′ son équivalentes.

on à nécessairement $x_n \neq \xi_n$. Par conséquent le rayon

$$(4) \qquad x = \xi_n + t(x_n - \xi_n), \quad t \geq 0$$

issu de ξ_n et passant par x_n est bien déterminé. Le segment rectiligne et fermé $\langle \xi_n, x_n \rangle$ est contenu dans $S_x(x^0; b)$.

D'après (3) on a : $\overline{Y}(x; \xi_n, \eta_n) = Y(x; \xi_n, \eta_n)$ pour $t = 0$, si l'on remplace x par l'expression (4). Comme, d'après (1) :

$$(\xi_n, \eta_n) \in S_x(x^0; y^0; b) \cdot S_y(x^0, y^0; b) \subset S_x(x^0, y^0; a) \cdot S_y(x^0, y^0; a),$$

la fonction $Y(x; \xi_n, \eta_n)$ ainsi que $\overline{Y}(x; \xi_n, \eta_n)$ représentent au voisinage de $x = \xi_n$ des solutions du problème (P), solutions, passant par le point (ξ_n, η_n), (voir (3)). En vertu de I cette solution est localement unique. Par conséquent on a :

$$Y(x; \xi_n, \eta_n) = \overline{Y}(x; \xi_n, \eta_n)$$

au voisinage de $x = \xi_n$.
Donc il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, si $0 \leq t \leq \varepsilon$, on a

$$\overline{Y}(\xi_n + t(x_n - \xi_n); \xi_n, \eta_n) = Y(\xi_n + t(x_n - \xi_n); \xi_n, \eta_n).$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$ la borne supérieure des nombres ε. Je dis que $\varepsilon_0 > 1$. En effet, dans le cas contraire, considérons le point $x' \overline{\overline{df}}\, \xi_n + \varepsilon_0(x_n - \xi_n)$, $0 \leq \varepsilon_0 \leq 1$.

Les fonctions $\overline{Y}(x; \xi_n, \eta_n)$ et $Y(x; \xi_n, \eta_n)$ satisfont au problème (P) dans $S_x(x^0; b)$ donc, en vertu de l'axiome elles y sont continues. D'autre part, le segment $\langle \xi, x' \rangle$ appartient à $S_x(x^0; b)$. Par conséquent :

$$\lim_{\substack{t \to \varepsilon_0 \\ 0 < t < \varepsilon_0}} \overline{Y}(\xi_n + t(x_n - \xi_n); \xi_n, \eta_n) = \lim_{\substack{t \to \varepsilon_0 \\ 0 < t < \varepsilon_0}} Y(\xi_n + t(x_n - \xi_n); \xi_n, \eta_n),$$

c'est-à-dire,

$$(5) \qquad \overline{Y}(x'; \xi_n, \eta_n) = Y(x'; \xi_n, \eta_n).$$

En désignant le nombre (5) par y', on a d'après (1): $y' \varepsilon S(y^0, a)$ d'où :

$$(6) \qquad x' \varepsilon S(x^0, a), \quad y' \varepsilon S(y^0, a).$$

$\overline{Y}(x; \xi_n, \eta_n)$, $Y(x; \xi_n, \eta_n)$ satisfaisant à (P) au voisinage de $x = x'$ et admettant des valeurs égales y' pour $x = x'$, on a, d'après (6) et I: $\overline{Y}(x; \xi_n, \eta_n) = Y(x; \xi_n, \eta_n)$ au voisinage de $x = x'$, ce qui montre qu'il existe un nombre $\varepsilon > \varepsilon_0$, tel que

$$(7) \qquad \overline{Y}(\xi_n + t(x_n - \xi_n); \xi_n, \eta_n) = Y(\xi_n + t(x_n - \xi_n); \xi_n, \eta_n)$$

pour $0 \leq t \leq \varepsilon$.

Il y a donc contradiction avec la supposition que ε_0 est la borne supérieure. Nous avons ainsi démontré que $\varepsilon_0 > 1$ et, par conséquent (7) pour $t = 1$. Donc $\overline{Y}(x_n; \xi_n, \eta_n) = Y(x_n; \xi_n, \eta_n)$ contrairement à (0). Le théorème est ainsi démontré.

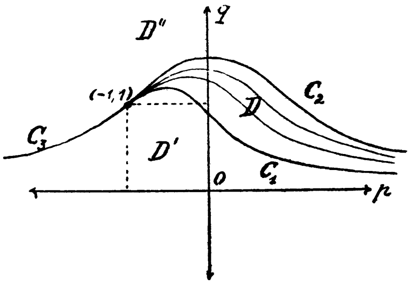
7. Voici maintenant un exemple qui montre que les propriétés I et II n'impliquent pas l'unicité exprimée dans le théorème que nous venons de démontrer. Le même exemple montre en même temps que I et II n'impliquent pas IIa.

Construisons d'abord sur le plan (p, q) un faisceau de courbes différentes dont la forme rappelle celle de la courbe

$$q = a \cdot e^{-b(p+c)^2},$$

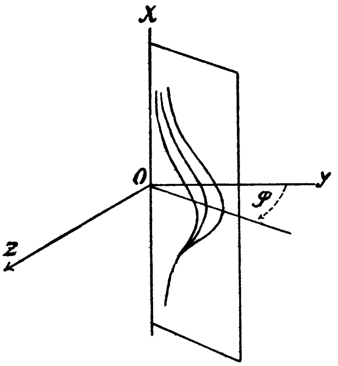
où a, b, c, sont des constantes positives. Le faisceau soit tel, que toutes ces courbes soient tangentes au point $(-1, 1)$. Elles s'approchent asymtotiquement à l'axe x dans les deux directions de l'infini. Sopposons que toutes les courbes, si l'on ne considère que leurs parties à droite du point $(-1, 1)$ n'ont pas de points communs deux-à-deux, qu'elles se trouvent contenues entre deux courbes extrêmes, désignées par C_2 et C_1 (courbe supérieure, resp. inférieure) et qu'elles remplissent sans lacune la partie D du plan enfermée entre C_1 et C_2.

Désignons par C_3 la partie gauche de la courbe dont C_2 est la partie droite. Remplissons maintenant le domaine D' entre l'axe p et la courbe C_3+C_1 par les courbes qu'on obtient de C_3+C_1 au moyen des transformations: $p_1=p$, $q_1=\lambda\cdot q$ où λ parcourt les nombres $0<\lambda<1$. Remplissons le domaine restant D'' se trouvant au delà de C_3+C_2 par les courbes provenant de C_3+C_2 par les translations: $p_2=p$, $q_2=q+\mu$, où μ admet toutes les valeurs positives. Le demiplan $q>0$ est ainsi rempli sans lacunes par les courbes construites de cette manière et forme une configuration, désignée par II.



Cela étant préparé, considérons dans l'espace à trois dimensions tous les demi-plans E_φ:

$$y=s\cos\varphi \quad z=s\sin\varphi,\quad \text{où } s>0,\quad 0\leq\varphi\leq\pi.$$



Plaçons sur E_φ la configuration provenant de II par la transformation: $p_3=q\,(2\pi-\varphi)$, $q_3=q$, et ajoutons l'axe de x au système de courbes ainsi obtenues dans l'espace. Tout l'espace sera comblé de courbes, qui peuvent être considérées comme des intégrales d'un système d'équations

$$\frac{dy}{dx}=F(x,\ y,\ z);\quad \frac{dz}{dx}=G(x,\ y,\ z).$$

On voit, qu'au voisinage suffisamment petit de $x=y=z=0$

par tout point passe une intégrale et une seule. La condition I est donc réalisée.

Définissons les fonctions

$$(1) \qquad y = \overline{Y}_1(x;\ \xi,\ \eta,\ \zeta), \quad z = \overline{Y}_2(x;\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$$

de la manière suivante:

si $\eta = \zeta = 0$, (1) représente la ligne droite coincidant avec l'axe x;

si $\eta^2 + \zeta^2 > 0$ et si le point (ξ, η, ζ) possède l'azimut φ, $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$, trouvons dans la configuration II du plan p, q le point (p, q) qui corresponde au point (ξ, η, ζ) de l'espace; le point (p, q) est bien déterminé. Alors, si $(p, q) \varepsilon \overline{C}_3$, définissons (1) de manière qu'il représente la courbe cerrespondant à $C_3 + C_1$. Dans le cas restant définissons (1) de manière qu'il représente ce qui correspond dans II à la courbe entière, s'étendant de $-\infty$ jusqu'au $+\infty$, et passant par (p, q).

D'une manière analogue définissons les fonctions

$$y = \overline{\overline{Y}}_1(x;\ \xi,\ \eta,\ \xi), \quad z = \overline{\overline{Y}}_2(x;\ \xi,\ \eta,\ \zeta),$$

mais en échangeant $C_3 + C_1$ contre $C_3 + C_2$. On voit que $\overline{Y}$, et $\overline{\overline{Y}}$ sont deux fonctions qui ne coincident pas das $(0;\ 0,\ 0,\ 0)$ et malgré cela, elles satisfont à la condition II.

8. Voici une autre propriété importante qui résulte de I et IIa. C'est ce qu'on appelle loi de réciprocité pour les intégrales générales et normales.

Théorème: Dans le cas, où I et IIa subsistent, la fonction $y = Y(x;\ \xi,\ \eta)$ dont il est parlé dans l'énoncé de IIa jouit de la propriété suivante: il existe un nombre $b > 0$, tel que, si $x'' \varepsilon S(x^0;\ b)$, $x' \varepsilon S(x^0;\ b)$, $y' \varepsilon S(x^0;\ b)$, la relation

$$(1) \qquad y'' = Y(x'';\ x',\ y')$$

entraîne

$$y' = Y(x';\ x'',\ y'').$$

Démonstration. Choisissons un nombre $a > 0$ tel que

1) $Y(x;\ \xi,\ \eta)$ est basée dans

$$S_x(x^0;\ x^0,\ y^0;\ a) \cdot S_\xi(x^0;\ x^0,\ y^0;\ a) \cdot S_\eta(x^0;\ x^0,\ y^0;\ a)$$

et y satisfait aux conditions de II,

2) I est satisfaite dans $S_\xi(x^0,\ y^0;\ a) \cdot S_\eta(x^0,\ y^0;\ a)$.

En vertu de la continuité de Y au point $(x^0;\ x^0,\ y^0)$ on peut trouver un nombre $b < a$ positif, tel que, si $x \varepsilon S(x^0;\ b)$, $\xi \varepsilon S(x^0;\ b)$, $\eta \varepsilon S(y^0;\ b)$, on a $Y(x;\ \xi,\ \eta) \varepsilon S_y(y^0;\ a)$.

Soit maintenant $(x'';\ x',\ y') \varepsilon S(x^0;\ x^0,\ y^0;\ b)$, et supposons que $y'' = Y(x'';\ x',\ y')$.

Je vais démontrer qu' alors $y' = Y(x';\ x'',\ y'')$.

Il suffit de supposer que $x' \neq x''$.

Montrons d'abord que l'expression $Y(x;\ x'',\ y'')$ n'est pas depourvue de sens, si $x \varepsilon S(x^0,\ a)$. En effet, on a, d' après ce qui précède: $y'' \varepsilon S_y(y^0;\ a)$; donc, puisque $x \varepsilon S_x(x^0;\ a)$ et $x'' \varepsilon S_x(x^0;\ a)$, le point $(x;\ x'',\ y'')$ se trouve dans la base de la fonction Y.

Considérons maintenant le rayon $x = x'' + t(x' - x'')$, $t \geq 0$ issu de x'' et passant par x'. Le segment rectiligne et fermé $0 \leq t \leq 1$ est contenu dans $S_x(x^0;\ b)$. La fonction $Y(x;\ x'',\ y'')$ représente une solution du problème (P) au voisinage de $x = x''$ et passant par $(x'',\ y'')$, puisque $y'' = Y(x'';\ x''\ y'')$.

La fonction $Y(x;\ x',\ y')$ est d'après (1) aussi une solution passant par $(x'',\ y'')$. Par conséquant, d' après (1) on a

$$Y(x;\ x'',\ y'') = Y(x;\ x',\ y')$$

au voisinage de $x = x''$. Il en resulte, qu' il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que, si $0 \leq t \leq \varepsilon$,

$$(2)\qquad Y(x'' + t(x' - x'');\ x'',\ y'') = Y(x'' + t(x' - x'');\ x',\ y').$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$ la borne supérieure de tels nombres ε. Je dis que $\varepsilon_0 > 1$. Supposons le contraire : $\varepsilon_0 \leq 1$. Faisons tendre les deux membres de l'équation (2) vers la limite pour $t < \varepsilon_0$, $t \to \varepsilon_0$. En vertu de la continuité de Y par rapport à x, on trouve ainsi : $Y[x'' + \varepsilon_0(x' - x''); x'', y''] = Y[x'' + \varepsilon_0(x' - x''); x', y']$. Posons : $\xi \overline{\overline{\scriptstyle df}}\, x'' + \varepsilon_0(x' - x'')$. On a $\xi \varepsilon S(x^0; b)$, d'où $Y(\xi; x'', y'') \varepsilon S(y_0; a)$ et $Y(\xi; x'', y'') = Y(\xi; x', y')$.

Il en résulte, comme auparavant, que $Y(x; x'', y'') = Y(x; x', y')$ au voisinage du point $x = \xi$, ce qui prouve que ε_0 n'est pas la borne supérieure des nombres ε dont nous avons parlé plus haut. La contradiction obtenue ainsi nous montre que $\varepsilon_0 > 1$. Par conséquent, on peut poser $t = 1$ dans (2), ce qui donne : $Y(x'; x'', y'') = Y(x'; x' y')$, c'est-à-dire $Y(x': x'', y'') = y'$. Le théorème est ainsi démontré.

9. Voici maintenant un exemple qui montre que *la propriété de réciprocité peut être en défaut, si l'on ne suppose que I et II, et cela même, si l'unicité locale de la fonction $Y(x; \xi, \eta)$ est garantie.*

Considérons le système d'équations :

$$\frac{dy_i}{dx} = F_i(x, y_1, y_2), \quad (i = 1, 2),$$

où

$$F_i(x, y_1, y_2) = -2n\left(x - \frac{1}{n}\right) y_i$$

dans le cas, où

$$\frac{y_2}{y_1} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}, \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

et où $y_1 > 0$ et $y_2 > 0$, en outre, où $F_i(x, y_1, y_2) = 0$ dans le cas restant.

Notre système d'équations, considéré comme le problème (P), jouit des propriétés I et II au voisinage du point $x = y_1 = y_2 = 0$. Les intégrales générales et normales sont localement bien déterminées, donc localement uniques :

$$Y_i(x;\ \xi,\ \eta_1,\ \eta_2) = \eta_i \cdot e^{n\left(\xi - \frac{1}{n}\right)^2 - n\left(x - \frac{1}{n}\right)^2},$$

si $\eta_2 = \eta_1 \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4_n}$, $\eta_1^2 + \eta_2^2 > 0$, et $y_i(x;\ \xi,\ \eta_1,\ \eta_2) = \eta_i$ dans le cas restant.

Soit $b > 0$ un nombre positif donné, et posons

$$x'' \overset{=}{\scriptstyle df} \frac{1}{n},\quad x' \overset{=}{\scriptstyle df} \frac{b}{2} + \frac{1}{n},\quad y_1' \overset{=}{\scriptstyle df} \frac{b}{2},\quad y_2' = \frac{b}{2}\,\mathrm{tg}.\,\frac{\pi}{4n}.$$

À partir d'un indice n on a

$$(1) \qquad |x'| < b,\quad |y_1'| < b,\quad |y_2'| < b,$$

et on trouve

$$Y_1(x'';\ x',\ y_1',\ y_2') = \frac{b}{2} \cdot e^{n\left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

donc une expression, qui tend vers ∞ pour $n \to \infty$.

Il existe donc un indice suffisamment grand n tel que

$$(2) \qquad y'' \overset{=}{\scriptstyle df} Y_1(x'';\ x',\ y_1',\ y_2') > b.$$

Cela est vrai, quel que soit $b > 0$.

Donc, si l'on envisage un nombre quelconque $b > 0$, les fonctions $\overline{Y}_1$ et $\overline{Y}_2$ ne définies que dans (1), comme ci-dessus, jouissent de la propriété II et de l'unicité locale au voisinage de $x = y_1 = y_2 = 0$. L'unicité, exprimée par la condition I subsiste aussi.

Néamoins, si $y_i'' = \overline{Y}_i(x'';\ x',\ y_1',\ y_2')$, on ne peut pas dire que $y_i' = \overline{Y}_i(x;\ x'',\ y_1'',\ y_2'')$, puisque $\overline{Y}_2(x;\ x'',\ y_1'',\ y_2'')$ est depourvu de sens, d'après (2) et la définition de $\overline{Y}$.

10. Occupons nous maintenant des propriétés suivantes:

III. A *Il existe une fonction* $Y(x;\ \xi,\ \eta)$ *satisfaisant à IIa, et, en outre, jouissant de la propriété suivante:*

A) *On peut trouver un nombre* $b_0 > 0$ *tel que pour chaque* b, *où* $0 < b < a_0$ *il existe un nombre* $a > 0$, *tel que si* $(x', y') \in S(x^0, y^0; a)$ *et si* $f(x)$ *est une solution de* (P) *au voisinage du point* $x = x'$, *telle que* $y' = f(x')$, *il existe un point* $(x'', y'') \in S(x^0, y^0; b)$ *tel que* $f(x) = Y(x; x'', y'')$ *dans* (x').

III B. *Il existe une fonction* $Y(x; \xi, \eta)$, *comme auparavant, mais jouissant de la propriété qui diffère de la précédente seulement dans ce qu'on remplace le cortège de quantificateurs de* A) *par le suivant :*

B) « *Il existe dex nombres* $a > 0$, $b > 0$ *tels que* ».

En outre, nous examinerons les propriétés analogues provenant de IIIa, si l'on remplace A) par :

C) « *Il existe un nombre* $b_0 > 0$, *tel que pour chaque* b *où* $0 < b < b_0$, *il existe un nombre* $a_0 > 0$, *tel que pour chaque* a, *où* $0 < a < a_0$ »,

ou par :

D) « *Il existe deux nombres* $a > 0$ *et* $b_0 > 0$, *tels que pour chaque* b, *où* $0 < b < b_0$ ».

Remarquons, que ce sont toutes les combinaisons possibles de deux quantificateurs, si on veut se placer au point de vue des propriétés locales.

11. On voit tout de suite que IIIA implique IIIB et que IIIC implique IIID. Montrons que IIID ne peut pas avoir lieu, donc, à fortiori, il en est de même pour IIIC.

Pour démontrer cela, supposons que III D subsiste, et trouvons des nombres $a > 0$ et $b_0 > 0$ conformément à son énoncé. Soit $(x^0, y') \in S(x^0, y^0; a)$, où $y' \neq y^0$ et soit $f(x)$ une solution (P) au voisinage de $x = x^0$, telle que $y' = f(x^0)$. Considérons une suite infinie de nombres $\{b_n\}$, où $0 < b_n < b_0$, $lim\ b_n = 0$.

Quel que soit n, il existe, en vertu de l'hypothèse, un point $(x''_n, y''_n) \in S(x^0, y^0; b_n)$, tel que $f(x) = Y(x; x''_n, y''_n)$ dans (x^0); donc $y' = Y(x^0; x''_n, y''_n)$.

D' autre part, la fonction Y étant continue au point $(x^0;\ x^0,\ y^0)$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} Y(x;\ x_n'',\ y_n'') = Y(x^0;\ x^0,\ y^0) = y^0$.

Il en résulte que $y^0 = y'$ ce qui n' a pas lieu. La proposition est ainsi démontrée.

12. En procédant aux conditions IIIA et IIIB, montrons que IIIB n'implique pas IIIA, et cela subsiste même, si l'on suppose les propriétés IIb.

En voici un exemple.

Soit donnée l' équation différentielle ordinaire: $\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt[3]{y^2}$ qui représente le problème (P). Définissons la fonction

$$y = Y(x;\ \xi,\ \eta),$$

en posant $Y(x;\ 1,\ 0) \underset{df}{=} 0$ pour tout x, et si $(\xi,\ \eta) \neq (1,\ 0)$ posons

$$Y(x;\ \xi,\ \eta) \underset{df}{=} (x - \xi + \sqrt[3]{\eta})^3. \tag{1}$$

La fonction Y définie ainsi, est continue dans $(0;\ 0,\ 0)$. En effet si $(x_n;\ \xi_n,\ \eta_n) \to (0;\ 0,\ 0)$, où

$$(x_n;\ \xi_n,\ \eta_n) \in S\left(0;\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right),$$

on a à partir d' un indice, le cas, où $(\xi_n,\ \eta_n) \neq (1,\ 0)$ et, par conséquent, la formule:

$$Y(x_n;\ \xi_n,\ \eta_n) = (x_n - \xi_n + \sqrt[3]{\eta_n^2})^3 \to 0$$

ce qui montre la continuité en question.

(1) représente une solution de (P) pour tout x et cela quels que soient ξ et η. La condition IIIB et verifiée: il suffit de poser $b = 2$ et $a = \dfrac{1}{2}$ pour s' en convaincre.

Néamoins III A n'a pas lieu, si l'on pose $0 < b < \frac{1}{2}$. En effet, quel que soit $a > 0$, si l'on envisage le point $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ et la solution $y = 0$ passant par ce point, il n'existe aucun point (x'', y'') dans $S(0, 0; b)$ pour lequel on aurait $0 = Y(x; x'', y'')$ au voisinage de $x = \frac{a}{2}$. La proposition est ainsi établie.

13. Démontrons maintenant que, si l'on admet I et IIa, il en résulte IIIA. Soit $b^0 > 0$ un nombre tel que I est satisfaite pour $\xi \varepsilon S(x^0, b^0)$, $\eta \varepsilon S(y^0; b^0)$ et supposons que $Y(x; \xi, \eta)$ jouit dans $x \varepsilon S(x^0; b^0)$, $\xi \varepsilon S(x^0; b^0)$, $\eta \varepsilon S(y^0; b^0)$ des propriétés, spécifiées dans IIa.

Soit $0 < b < b^0$ et posons $a \underset{df}{=} b$. Choisissons le point $(x', y') \varepsilon S(x^0, y^0; a)$ et soit $f(x)$ une solution du problème (P) au voisinage de $x = x'$, et telle que $y' = f(x')$. On a $(x', y') \varepsilon S(x^0, y^0; b)$. Mais $Y(x; x', y')$ représente une solution de (P) telle que $y' = X(x'; x', y')$. Par conséquent, en vertu de I on a:

$$Y(x; x', y') = f(x) \text{ au voisinàge de } x = x'.$$

Nous avons ainsi démontré l'existence d'un nombre $b_0 > 0$, tel que, si $0 < b < b_0$, ou peut trouver un nombre $a > 0$ de maniére que, si $(x', y') \varepsilon S(x^0, y^0; b)$, il existe un point $(x'', y'') \varepsilon S(x^0, y^0; a)$ - à savoir $(x'', y'') \underset{df}{=} (x', y')$, tel que $Y(x; x'', y'')$ coïncide localement avec $f(x)$ au voisinage de $x = x'$. La proposition est donc établie.

14. La dernière propriété qui va nous occuper est la suivante:

IV. Il existe une fonction $Y(x; \xi, \eta)$ basée dans $(x^0; x^0, y^0)$, y représentant une solution du problème (P) et telle que: on peut trouver un nombre $a_0 > 0$ de manière que, si $0 < a < a_0$, il existe un nombre $b > 0$ tel que, si $(x', y') \varepsilon S(x^0, y^0; b)$ il existe un point $y'' \varepsilon S(y^0; a)$ pour lequel $Y(x; x^0, y'') =$ $= Y(x; x', y')$ au voisinage de $x = x'$.

Démontrons que IV subsiste, si l'on suppose I et IIa.

Soit $a_0 > 0$ un nombre tel que I et IIa sont satisfaites dans le a_0-voisinage du point $(x^0; x^0, y^0)$. Soit $0 < a < a_0$. Trouvons, en vertu de continuité de Y au point $(x^0; x^0, y^0)$, un nombre $b > 0$ de manière que, si

$$x \in S(x^0; b), \quad \xi \in S(x^0; b), \quad \eta \in S(y^0; b),$$

on ait toujours

$$Y(x; \xi, \eta) \in S(y^0; a).$$

Cela étant posé, prenons un point $(x', y') \in S(x^0; y^0; b)$. On a $Y(x^0; x', y') \in S(y^0; a)$. Donc, si l'on pose

(1) $$y'' \underset{df}{=} Y(x^0; x', y'),$$

on a

$$(x^0, y'') \in S_x(x^0, y^0; a) \cdot S_y(x^0, y^0; a).$$

Le nombre b une fois trouvé, comme plus haut, il est évident que, si l'on diminue b, la raisonnement peut être repris sans changement.

On sait que I et IIa entraîne la loi de réciprocité. Diminuons donc le nombre b de manière qu'il soit conforme à l'énoncé de cette propriété. Par conséquant, (1) entraîne: $y = Y(x'; x^0, y'')$.

Il en rèsulte, que $Y(x; x^0, y'')$ et $Y(x; x', y')$ coïncident dans (x').

15. En résumant les études que nous venons d'exécuter, on peut dire, que ce sont les propriétés indépendantes I et IIa qui entraînent toutes les conséquences dont on a besoin dans les principes de la théorie locale des équations différentielles. Pour obtenir le cas régulier, jusqu'au superflu, il suffit d'admettre I et IIb.