

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ERNESTO LAURA

## **La teoria delle matrici e il metodo dell' $n$ . edro mobile**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 1 (1930), p. 85-109

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1930\\_\\_1\\_\\_85\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1930__1__85_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# LA TEORIA DELLE MATRICI E IL METODO DELL' $n$ · EDRO MOBILE

Memoria 1<sup>a</sup> di ERNESTO LAURA.

Il metodo dell' $n$ . edro mobile, applicato alla teoria delle varietà riemanniane, acquista particolare semplicità allorchando è sviluppato sfruttando sistematicamente l'algoritmo di sostituzione lineare o di matrice, questa considerata come segno di funzione lineare.

Questo concetto, già stato largamente applicato da diversi autori, si presta bene alla rappresentazione di una rotazione istantanea in uno spazio a più dimensioni (Cfr. il § III dove è introdotto il concetto di matrice rotazione). Valendomi poi delle ricerche del VOLTERRA riprendo il concetto, come già ho fatto in altre pubblicazioni, di derivata parziale a destra (o a sinistra) di una matrice, i cui elementi sono funzioni di due o più variabili e quello di integrale a destra (o a sinistra) lungo una linea di una espressione differenziale del tipo

$$\sum_i \sigma_i du^i,$$

nella quale le  $\sigma_i$  sono matrici funzioni delle  $u^i$ . Questa integrazione eseguita lungo un cammino chiuso infinitesimo, e posta in relazione con il trasporto per parallelismo del LEVI-CIVITA, induce, con facili considerazioni, alla formula di RIEMANN della curvatura di un  $V_n$  relativa ad una orientazione. Di questo argomento, come della relazione dei simboli  $\sigma'_i$  introdotti con i simboli di RIEMANN, mi occuperò in una Memoria susseguente.

Il metodo, di carattere essenzialmente cinematico, seguito per la rappresentazione di una  $V_n$  immersa in un  $S_{m+n}$  è in ultima analisi il seguente. È considerato il moto rigido di un  $(m+n)$  edro ortogonale dipendente da  $n$  variabili ed è mostrato come esso

possa rappresentarsi in modo completo (a meno ben si intende di un moto rigido) a mezzo di  $n$  vettori (che dico *traslazioni*) e di  $n$  matrici (che dico *rotazioni*), riferiti all' $n + m$ . edro mobile. Questo è supposto, per ragioni ovvie di semplicità, disposto in modo che l' $n$ . edro, facente parte di esso,  $x_1 x_2 \dots x_n$  sia costantemente tangente alla  $V_n$  descritta dalla sua origine. Si assumono allora come elementi rappresentativi della data  $V_n$  i detti  $n$  vettori e le suddette  $n$  matrici-rotazione. Questi elementi sono determinati per ogni  $V_n$  a meno di rotazioni dell' $S_n$  tangente e a meno di rotazioni dell' $S_n$  normale. Converrà però in un primo tempo lasciare arbitrari sia l' $n$ . edro cui è riferito l' $S_n$  tangente, sia l' $m$ . edro cui è riferito l' $S_n$  normale, riservando la particolareggiatura di questi riferimenti solo in vista dello studio di particolari  $V_n$ .

Gli  $n$  vettori traslazione e le  $n$  matrici rotazione non sono però qualunque; esse sono legate da condizioni di monodromia che costituiscono la naturale generalizzazione di quelle equazioni date da DARBOUX nel caso delle superficie ordinarie e che tengono luogo delle equazioni di GAUSS CODAZZI.

Dalle matrici-rotazione (che sono di ordine  $m + n$ ) si possono estrarre delle matrici di ordine  $n$ , che si possono interpretare come le loro proiezioni sopra l' $S_n$  tangente. Queste si dimostra che sono determinate (a meno di una rotazione dell' $S_n$  tangente) quando sia nota la metrica (e quindi gli  $n$  vettori traslazione) della  $V_n$  considerata. Il trasporto per parallelismo di LEVI-CIVITA dipende da questa possibilità ed è legato in modo semplice con queste matrici proiezioni delle matrici sopra l' $S_n$  tangente. Queste  $n$  matrici di ordine  $n$  tengono il posto, in questa teoria, dei simboli di CHRISTOFFEL; esse però, a differenza di questi, costituiscono un sistema covariante semplice.

Saranno pure estratte dalle matrici rotazione le matrici proiezione sull' $S_n$  normale. Le rotazioni che avvengono nei piani  $x_i x_k$  ( $i = 1, 2, \dots, n$   $k = 1, 2, \dots, m$ ) danno luogo a  $n$  gruppi di  $m$  vettori legati ai vettori traslazione da relazioni di reciprocità. Discende quasi immediatamente la possibilità di formare  $m$  quadriche differenziali invarianti per le rotazioni dell' $S_n$  tangente e per trasformazioni di coordinate, le quali individuano una direzione nell' $S_m$  normale. Si ha per tal modo una corrispondenza tra

le direzioni  $du^i$  dell' $S_n$  tangente e le direzioni dell' $S_{n-1}$  normale, corrispondenza suscettibile di una semplice interpretazione geometrica a cagione del teorema di MEUSNIER generalizzato.

La ricerca in questa 1<sup>a</sup> Memoria è limitata alla rappresentazione cinematica di una  $V_n$  e allo studio degli elementi del 1<sup>o</sup> ordine delle linee tracciate sulla  $V_n$ .

Circa la Bibliografia dell'argomento, senza voler dare menomamente una lista completa delle memorie che direttamente si riattaccano all'argomento studiato, citerò, oltre la *Théorie de surfaces* di G. DARBOUX :

THOMAS CRAIG - *Displacements depending on One, Two and Three parameters in a Space of Four Dimensions* - American Journal of Math. 1898 - Vol. XV.

F. N. COLE - *On Rotations of Four Dimensions* - Ibidem, Vol. XXI.

HATZIKADIS - *Displacements depending on One, Two, k parameters in a Space of n Dimensions* - Ibidem, 1900, Vol. XXII.

TONOLO - *Una generalizzazione della teoria del triedro mobile* - Atti del R. Istituto Veneto - Tomo LXXII - Parte 2<sup>a</sup> - 1912.

Relativamente alla teoria delle sostituzioni lineari o matrici nell'aspetto da me considerato, rimando a :

G. PEANO - *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnung lehre di H. Grassmann* - Torino, F.lli Bocca, 1888.

G. PEANO - *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari* - Atti R. Accademia di Scienze di Torino - Vol. XXII, pagg. 437-446.

V. VOLTERRA - *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari* - Società dei XL, Serie 3<sup>a</sup>, t. VI e VII.

V. VOLTERRA - *Leçons sur les fonctions de lignes* - Paris, 1914, pag. 38 e segg.

Gli elementi della teoria delle matrici si trovano esposti, ad es., in :

H. HILTON - *Homogeneous linear substitutions* - Oxford, 1914.

M. BORN e P. JORDAN - *Elementare Quanten Mechanik* - Berlin, Springer, 1930.

Quanto infine alla teoria delle varietà riemanniane rimando

solamente alle due opere originali (e fondamentali insieme per il loro punto di vista):

T. LEVI-CIVITA - *The absolute differential Calculus*. - Londra, 1927.

CARTAN - *La Géométrie des espaces de Riemann* - Paris, 1925, non essendo possibile far cenno, senza commettere dimenticanze, della ampia bibliografia riguardante l'argomento.

### § 1. - Derivate parziali ed integrale di Volterra di una matrice <sup>(1)</sup>.

Sia  $S$  una matrice, i cui elementi sono funzioni di più variabili indipendenti  $u^1 u^2 \dots u^n$  derivabili rispetto a queste variabili quelle tante volte che sarà richiesto dalla validità delle formule che si stabiliscono. Con

$$\frac{\partial S}{\partial u^i}$$

intenderemo la matrice, i cui elementi sono le derivate parziali rispetto ad  $u^i$  degli elementi della matrice  $S$ . Seguendo il VOLTERRA e supponendo che il determinante della matrice  $S$  non sia nullo e quindi esista la matrice inversa  $S^{-1}$ , considereremo le due matrici:

$$S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i}, \quad \frac{\partial S}{\partial u^i} S^{-1}$$

che indicheremo rispettivamente come derivata parziale di Volterra a sinistra (o a destra) della sostituzione  $S$ .

Si ponga:

$$(1) \quad \sigma_i = S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i}.$$

(<sup>1</sup>) Per una esposizione meno sommaria dell'argomento rimando alle mie due Note: *Sulle derivate parziali di Volterra di una sostituzione lineare - Integrale di Volterra ecc.* - Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Vol. LV, 1922.

Le  $\sigma_i$  soddisfano allora a condizioni che si ricavano facilmente. Dalle (1) discende inverso :

$$(2) \quad S \sigma_i = \frac{\partial S}{\partial u^i}.$$

Da cui :

$$\frac{\partial}{\partial u^k} (S \sigma_i) - \frac{\partial}{\partial u^i} (S \sigma_k) = 0.$$

Esplicitando e valendosi della (2) si ha poi :

$$S \sigma_k \sigma_i + S \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} - S \sigma_i \sigma_k - S \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^i} = 0.$$

Operando con  $S^{-1}$  si ottiene infine:

$$(3) \quad \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^i} - \sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i = 0.$$

Se queste  $\frac{n(n-1)}{2}$  relazioni tra matrici sussistono, allora esiste una matrice  $S$ , riducendosi ad una matrice data  $S_0$  quando le  $u^i$  assumono i valori  $u_0^i$ , e che inoltre verifica le  $n$  equazioni

$$S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i} = \sigma_i.$$

Per la dimostrazione rimando alle mie due note citate a pag. 88.

La matrice  $S$  così determinata si dirà l'integrale di Volterra a sinistra del differenziale

$$\sum_i \sigma_i du^i;$$

le relazioni (3) rappresentano inoltre le condizioni di completa integrabilità del differenziale stesso. Se esse non sono verificate e se il punto  $u^i$  percorre la linea  $AB$

$$u^i = u^i(t),$$

diremo integrale di Volterra (a sinistra) lungo la linea  $AB$ , la matrice  $S$  che soddisfa nei punti di  $AB$  all'equazione (sistema differenziale lineare) :

$$\frac{dS}{dt} = S \sum_i \sigma_i \frac{du^i}{dt} dt$$

e che si riduce ad un'assegnata matrice  $S_0$  nel punto  $A$ . Il valore di  $S$  in  $B$  dipende allora dal cammino di integrazione; le condizioni (3) possono quindi chiamarsi condizioni di monodromia del dato differenziale.

Possiamo ora procedere, nel caso in cui non sono verificate le (3), alla integrazione lungo un cammino infinitesimo chiuso poligonale  $PP_1P_2P_3P$ , il punto  $P$  essendo di coordinate  $u^i$ ,  $P_1$  di coordinate  $u^i + du^i$ ,  $P_2$  di coordinate  $u^i + du^i + \delta u^i$ ,  $P_3$  di  $u^i + \delta u^i$ .

La matrice  $S$  debba coincidere con la matrice unità  $U$  (matrice i cui elementi sono tutti nulli, esclusi quelli della diagonale principale che sono uguali all'unità); integrando lungo  $PP_1$ , la matrice  $S$  acquisterà in  $P_1$  il valore

$$U + \sum_i \sigma_i du^i.$$

Integriamo allora lungo  $P_1P_2$  e notiamo che nei punti di questo segmento le  $u^i$  vanno sostituite con  $u^i + du^i$  e le matrici  $\sigma_i$  con  $\sigma_i + \sum_k \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} du^k$ . La matrice  $S$ , che in  $P_1$  ha il valore  $U + \sum_i \sigma_i du^i$ , avrà allora in  $P_2$  il valore:

$$\begin{aligned} & U + \sum_i \sigma_i du^i + \left( U + \sum_i \sigma_i du^i \right) \left( \sum_i \sigma_i \delta u^i + \sum_{ik} \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} du^k \delta u^i \right) = \\ & = U + \sum_i (\sigma_i du^i + \sigma_i \delta u^i) + \sum_{ik} \left( \sigma_i \sigma_k du^i \delta u^k + \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} du^k \delta u^i \right) = \\ (4) \quad & = U + \sum_i \sigma_i (du^i + \delta u^i) + \frac{1}{2} \sum_{ik} \left[ \left( \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} + \sigma_k \sigma_i \right) du^k \delta u^i + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^i} + \sigma_i \sigma_k \right) du^i \delta u^k \right]. \end{aligned}$$

Integrando lungo il cammino  $P P_3 P_2$  e prendendo ancora come valore iniziale di  $S$  in  $P$  la sostituzione unità  $U$ , otterremo come valore di  $S$  in  $P_2$ :

$$(5) \quad U + \sum_i \sigma_i (d u^i + \delta u^i) + \frac{1}{2} \sum_{ik} \left[ \left( \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} + \sigma_k \sigma_i \right) d u^i \delta u^k + \left( \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^i} + \sigma_i \sigma_k \right) \delta u^i d u^k \right].$$

Discende evidentemente che l'integrazione lungo il cammino chiuso  $P P_1 P_2 P_3 P$  dà in  $P$  alla matrice  $S$  come valore il prodotto della matrice (4) per l'inversa della matrice (5).

Notiamo ora che se  $h_1$  è infinitesimo del 1° ordine e  $h_2, k'_2$  sono infinitesimi del 2° ordine, a meno di infinitesimi del 3° ordine si ha:

$$(1 + h_1 + k_2)(1 + h_1 + k'_2)^2 = 1 + k_2 - k'_2,$$

e che inoltre la stessa relazione vale se 1 è sostituito con la matrice unità  $U$ , e le  $h_1, k_2, k'_2$  sono sostituite con matrici infinitesime di 1° e 2° ordine rispettivamente.

Integrando dunque il differenziale

$$\sum_i \sigma_i d u^i,$$

lungo il cammino chiuso  $P P_1 P_2 P_3 P$ , con la condizione che  $S$  acquisti inizialmente il valore  $U$ , si otterrà per  $S$  l'espressione:

$$U + \frac{1}{2} \sum_{ik} \left( \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^i} - \sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i \right) (d u^i \delta u^k - d u^k \delta u^i).$$

Poniamo:

$$(6) \quad \sigma_{ik} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^i} - \sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i.$$

Si deduce, conformemente a quanto precede, che

$$\sigma_{ik} = 0$$

sono le condizioni di monodromia del differenziale

$$\sum_i \sigma_i d u^i.$$

Sopra le matrici  $\sigma_{ik}$  si possono poi fare le osservazioni seguenti: 1° Le matrici  $\sigma_i$  formano un sistema semplice covariante



di matrici; le  $\sigma_{ik}$  formano un sistema doppio covariante. La Dm è pressochè evidente data la definizione (6) delle  $\sigma_{ik}$ .

2° Se poniamo (indicando con  $A$  una matrice a determinante non nullo):

$$\sigma'_i = A^{-1} \sigma_i A + A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^i}$$

e indichiamo con  $\sigma'_{ik}$  delle matrici formate con le  $\sigma'_i$  al modo stesso con cui le  $\sigma_{ik}$  sono formate con le  $\sigma_i$ , si ha:

$$\sigma'_{ik} = A^{-1} \sigma_{ik} A;$$

cioè le  $\sigma'_{ik}$  sono le trasformate delle  $\sigma_{ik}$  a mezzo della matrice  $A$ .

La dimostrazione è immediata se si osserva che:

$$A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^k} = - \frac{\partial A^{-1}}{\partial u^k} A$$

e che inoltre, poichè le  $A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^i}$  sono le derivate a sinistra di  $A$ , vale l'identità:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u^i} \left( A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^k} \right) - \frac{\partial}{\partial u^k} \left( A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^i} \right) - A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^k} A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^i} + \\ + A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^i} A^{-1} \frac{\partial A}{\partial u^k} = 0. \end{aligned}$$

In particolare se  $A$  è costante, si ha contemporaneamente

$$\begin{cases} \sigma'_i = A^{-1} \sigma_i A \\ \sigma'_{ik} = A^{-1} \sigma_{ik} A \end{cases}$$

3° Se  $i, h, k$  sono tre indici diversi, si formi l'espressione

$$\frac{\partial \sigma_{ih}}{\partial u^k} + \frac{\partial \sigma_{hk}}{\partial u^i} + \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial u^h} = \frac{\partial}{\partial u^k} (\sigma_i \sigma_h - \sigma_h \sigma_i) + \dots$$

Raccogliendo nel 2° membro a fattore comune a sinistra  $\sigma_i$ , o poscia a destra pure  $\sigma_i$ , si hanno i termini:

$$\sigma_i \left( \frac{\partial \sigma_h}{\partial u^k} - \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^h} \right) - \left( \frac{\partial \sigma_h}{\partial u^k} - \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^h} \right) \sigma_i.$$

Questa espressione, quando si tenga conto delle equazioni di definizione delle  $\sigma_{hk}$ , diventa:

$$\sigma_i(\sigma_{hk} + \sigma_h \sigma_k - \sigma_k \sigma_h) - (\sigma_{hk} + \sigma_h \sigma_k - \sigma_k \sigma_h) \sigma_i.$$

Permutando ciclicamente gli indici  $i, h, k$  si perviene quindi facilmente alla identità:

$$\frac{\partial \sigma_{ih}}{\partial u^k} + \frac{\partial \sigma_{hk}}{\partial u^i} + \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial u^h} = \sigma_i \sigma_{hk} - \sigma_{hk} \sigma_i + \sigma_h \sigma_{ki} - \sigma_{ki} \sigma_h + \sigma_k \sigma_{ih} - \sigma_{ih} \sigma_k,$$

la quale, come discenderà nel seguito (II<sup>a</sup> Memoria), ha una stretta affinità con le identità del BIANCHI.

## § 2. — Vettore-traslazione e matrice-rotazione.

Consideriamo un moto rigido di uno spazio a  $(n+m)$  dimensioni dipendente da  $n$  variabili indipendenti  $u^1 u^2 \dots u^n$ . Sia  $S$  una matrice ortogonale funzione delle stesse variabili,  $(X_1 X_2 \dots X_{n+m})$  un sistema di assi ortogonali fissi,  $(x_1 x_2 \dots x_{n+m})$  un sistema di assi ortogonali mobili; indichi inoltre  $X$  un complesso di ordine  $(n+m)$  i cui elementi si possano interpretare come coordinate di un punto  $P$  riferito agli assi fissi  $(X_1 X_2 \dots X_{n+m})$ , o come le componenti di un vettore riferito agli assi stessi;  $x$  indichi lo stesso vettore, quando le sue componenti sono calcolate rispetto agli assi mobili; infine  $X_0$  sia un vettore <sup>(1)</sup> funzione delle  $u^i$  e riferito agli assi fissi.

Una equazione del tipo:

$$(1) \quad X = X_0 + Sx$$

rappresenterà un moto rigido di un  $S_{n+m}$ , dipendente dalle  $n$  variabili  $u^1 \dots u^n$ .

Si potranno considerare  $n$  diversi vettori velocità del punto  $P$  in corrispondenza della variazione corrispondente delle  $u^1 u^2 \dots u^n$ .

(<sup>1</sup>) Nel seguito un complesso  $(a_1 \dots a_{n+m})$  si dirà un vettore riferito agli assi  $(x_1 \dots x_{n+m})$ , quando le componenti  $(a'_1 \dots a'_{n+m})$  dello stesso complesso riferite a nuovi assi  $(x'_1 \dots x'_{n+m})$  sono legate alle  $(a_1 \dots a_{n+m})$  dalle formule di passaggio dai primitivi assi agli assi nuovi (supposta comune l'origine di entrambi).

Queste  $n$  velocità, riferite agli assi fissi, saranno rappresentate dagli  $r$  complessi:

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Dalla (1) discende poi:

$$(2) \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i} = \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial u^i} + \frac{\partial S}{\partial u^i} \boldsymbol{x}.$$

Gli stessi vettori velocità riferiti agli assi mobili saranno rappresentati dai complessi:

$$S^{-1} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i}.$$

Avremo pertanto per la (2):

$$(3) \quad S^{-1} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u^i} = S^{-1} \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial u^i} + S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i} \boldsymbol{x}.$$

Sicchè: lo stato di velocità dei punti del sistema (moto istantaneo) si compone di un vettore che non varia al variare del punto  $\boldsymbol{x}$  e di un vettore che dipende linearmente dal punto  $\boldsymbol{x}$  stesso.

Si dimostra facilmente che  $S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i}$ , cioè la derivata di VOLTERRA a sinistra di una matrice ortogonale, è una matrice emisimmetrica. Si ha invero

$$S^{-1} S = U$$

dove  $U$  è la matrice unità; derivando rispetto ad  $u^i$ , si ha:

$$(4) \quad \frac{\partial S^{-1}}{\partial u^i} S + S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i} = 0.$$

Poichè  $S$  è una matrice ortogonale,  $S^{-1}$  è la sua trasposta (cioè la matrice il cui determinante è quello di  $S$  nel quale le verticali sono sostituite con le orizzontali). E poichè la trasposta di  $\frac{\partial S^{-1}}{\partial u^i} S$  è  $S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i}$ , discende dalla (4) quanto si è asserito.

Porremo

$$(5) \quad \sigma_i = S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i}$$

e indicheremo questa matrice (a determinante emisimmetrico) con il nome di *matrice-rotazione* per l'analogia che il vettore  $\sigma_i x$  presenta con la velocità dovuta ad una rotazione istantanea nella Cinematica dei sistemi rigidi dello spazio ordinario.

Porremo inoltre :

$$(6) \quad \alpha_i = S^{-1} \frac{\partial X_0}{\partial u^i}$$

ed indicheremo questi vettori con il nome di *vettori-traslazione*.

Consegue: il moto istantaneo di un sistema rigido dipendente da  $n$  variabili indipendenti è completamente rappresentato da  $n$  vettori-traslazione e da  $n$  matrici-rotazione (a determinante emisimmetrico).

Questi  $n$  vettori e queste  $n$  matrici non sono però indipendenti, ma sono legati da relazioni che si ricavano agevolmente.

Le  $\sigma_i$ , essendo le derivate di Volterra di una matrice (ortogonale), soddisferanno alle relazioni :

$$(7) \quad \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^i} - \sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i = 0.$$

Dalle equazioni di definizione (6) dei vettori  $\alpha_i$  discende poi :

$$\frac{\partial}{\partial u^k} (S \alpha_i) - \frac{\partial}{\partial u^i} (S \alpha_k) = 0.$$

Da cui :

$$S \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial u^i} \right) + \frac{\partial S}{\partial u^k} \alpha_i - \frac{\partial S}{\partial u^i} \alpha_k = 0.$$

Operando a sinistra con  $S^{-1}$  e tenendo conto delle equazioni di definizione delle  $\sigma_i$ , si ottiene :

$$(8) \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \alpha_k}{\partial u^i} + \sigma_k \alpha_i - \sigma_i \alpha_k = 0.$$

Le (7) e (8) costituiscono le relazioni necessarie e sufficienti,

cui devono soddisfare i vettori  $\alpha_i$  e le matrici emisimmetriche  $\sigma_i$ , affinché esista un moto rigido dipendente da  $n$  variabili, che ammette come vettori traslazione i vettori  $\alpha_i$  e come matrici-rotazione le matrici  $\sigma_i$ .

Soddisfatte invero le (7), si potrà determinare una matrice  $S$ , le cui derivate parziali a sinistra siano le  $\sigma_i$  e che si riduca per  $u^i = u_0^i$  ad una matrice ortogonale costante, assegnata arbitrariamente,  $S_0$ . La  $S$  sarà allora, per il fatto che le  $\sigma_i$  sono emisimmetriche, una matrice ortogonale.

Le (8) inoltre assicurano che il differenziale:

$$\sum_i S \alpha_i d u^i,$$

è un differenziale esatto (nel senso ordinario della parola): per quadrature perciò si potrà determinare il vettore  $X_0$  tale che:

$$d X_0 = \sum_i S \alpha_i d u^i$$

e che inoltre si riduca ad un vettore arbitrariamente dato per  $u^i = u_0^i$ .

Per individuare un moto rigido dipendente da  $n$  variabili, basterà dunque dare  $n$  vettori  $\alpha_i$  e  $n$  matrici  $\sigma_i$ , legate dalle relazioni (7) e (8), e fissare la posizione iniziale dell' $m+n$ . edro mobile di riferimento.

### § 3. - Rappresentazione intrinseca di una $V_n$ immersa in un $S_{m+n}$ .

Ogni punto di un  $S_{m+n}$  che si muove di moto rigido dipendente da  $n$  variabili, descrive una  $V_n$ . Consideriamo in particolare la  $V_n$  descritta dall'origine dell' $m+n$ . edro mobile.

Per rappresentare questa  $V_n$  potremo valerci delle considerazioni del n. precedente. Gioverà però, invece che considerare un  $m+n$ . edro generico, scegliere un  $m+n$ . edro di cui gli assi  $x_1 x_2 \dots x_n$  giacciono nell' $S_n$  tangente alla  $V_n$  considerata e di cui perciò, gli assi rimanenti  $x_{n+1} \dots x_{n+m}$  nell' $S_n$  normale.

Il moto rigido sarà individuato a mezzo delle  $n$  traslazioni  $\alpha_i$  e delle  $n$  rotazioni  $\sigma_i$  legate dalle relazioni:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial u^i} = \sigma_i \mathbf{a}_k - \sigma_k \mathbf{a}_i \\ \frac{\partial \sigma_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \sigma_k}{\partial u^i} = \sigma_i \sigma_k - \sigma_k \sigma_i. \end{array} \right.$$

Per l'ipotesi posta, i vettori  $\mathbf{a}_i$  appartengono all' $S_n$   $x_1 x_2 \dots x_u$ , quindi le componenti  $n+1$ .esima  $\dots$   $n+m$ .esima di questi  $n$  vettori saranno nulle. Nel seguito i vettori  $\mathbf{a}_i$  si penseranno in generale rappresentati da complessi di ordine  $n$ .

Gli  $n$  vettori  $\mathbf{a}_i$  e le  $n$  matrici  $\sigma_i$  legate dalle (A) si potranno assumere per rappresentare la  $V_n$  descritta dall'origine degli assi mobili. Questa rappresentazione della  $V_n$  è però largamente arbitraria.

Diamo invero nell' $S_n$  tangente una rotazione  $A$  ( $A$  è dunque una matrice ortogonale di ordine  $n$ ) all' $n$ .edro  $x_1 x_2 \dots x_u$  e nell' $S_m$  normale una rotazione  $B$  all' $m$ .edro  $x_{n+m} \dots x_{n+n}$ .

La  $A$  si può pensare matrice d'ordine  $n+m$ , basterà aggiungere  $m$  colonne e altrettante orizzontali di elementi tutti nulli esclusi gli elementi diagonali uguali ad 1; così pure  $B$  si potrà immaginare come matrice di ordine  $(m+n)$ .

Se  $\mathbf{x}'$  sono i complessi rappresentativi dei vettori  $\mathbf{x}$  a rotazione avvenuta, si ha:

$$\mathbf{x}' = A B \mathbf{x}; \quad \mathbf{x} = B^{-1} A^{-1} \mathbf{x}'.$$

L'equazione del moto rigido diviene ora:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + S B^{-1} A^{-1} \mathbf{x}';$$

per modo che se  $\mathbf{a}'_i, \sigma'_i$  rappresentano i nuovi vettori traslazione e le nuove matrici-rotazione avremo:

$$\mathbf{a}'_i = (S B^{-1} A^{-1})^{-1} \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial u^i} = A B S^{-1} \frac{\partial \mathbf{X}_0}{\partial u^i} = A B \mathbf{a}_i = A \mathbf{a}_i$$

poichè la rotazione  $B$  lascia inalterato lo spazio tangente, cui appartengono i vettori  $\mathbf{a}_i$ .

Si ha inoltre:

$$\sigma'_i = (S B^{-1} A^{-1})^{-1} \frac{\partial}{\partial u^i} (S B^{-1} A^{-1}) = A B S^{-1} \frac{\partial}{\partial u^i} (S B^{-1} A^{-1}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= A B S^{-1} \left[ \frac{\partial S}{\partial u^i} B^{-1} A^{-1} + S \frac{\partial B^{-1}}{\partial u^i} A^{-1} + S B^{-1} \frac{\partial A^{-1}}{\partial u^i} \right] = \\
 &= A B S^{-1} \frac{\partial S}{\partial u^i} B^{-1} A^{-1} + A B \frac{\partial B^{-1}}{\partial u^i} A^{-1} + A \frac{\partial A^{-1}}{\partial u^i}.
 \end{aligned}$$

Ponendo :

$$A \frac{\partial A^{-1}}{\partial u^i} = \alpha_i, \quad B \frac{\partial B^{-1}}{\partial u^i} = \beta_i;$$

indicando cioè con  $\alpha_i, \beta_i$  le rotazioni istantanee corrispondenti alle rotazioni finite  $A^{-1}, B^{-1}$  e notando che le  $\beta_i$  operano sull' $S_m$  normale e quindi  $A \beta_i A^{-1} = \beta_i$ , avremo

$$\sigma'_i = A B \sigma_i B^{-1} A^{-1} + \alpha_i + \beta_i.$$

Le formule di passaggio dai vettori e matrici  $\alpha_i, \sigma_i$  ai vettori e matrici  $\alpha'_i, \sigma'_i$  divengono :

$$(B) \quad \begin{cases} \alpha'_i = A \alpha_i \\ \sigma'_i = A B \sigma_i B^{-1} A^{-1} + \alpha_i + \beta_i. \end{cases}$$

Si conclude quindi:  $n$  vettori  $\alpha_i$  e  $n$  matrici  $\sigma_i$  a determinante emisimmetrico verificanti le relazioni (A), individuano, a meno di moti rigidi, una  $V_n$ , quella descritta dall'origine degli assi cui sono riferiti i dati vettori e le date matrici. Se  $A, B$  sono rotazioni rispettivamente dello spazio tangente e dello spazio normale, le formule (B) forniscono  $n$  vettori-traslazione e  $n$  matrici-rotazione atte a rappresentare la stessa  $V_n$ .

È poi ovvio che le  $\alpha'_i$  e le  $\sigma'_i$  soddisfano ancora alle relazioni (A).

Per il passaggio dalle variabili indipendenti  $u^i$  ad un sistema di nuove variabili  $v^i$ , valgono le formule seguenti, semplici deduzioni delle equazioni di definizione dei simboli  $\alpha_i, \sigma_i$  :

$$\alpha'_i = \sum_j \alpha_j \frac{\partial u_j}{\partial v^i}, \quad \sigma'_i = \sum_j \sigma_j \frac{\partial u^j}{\partial v^i}.$$

Queste formole mettono in evidenza il carattere covariante degli  $n$  vettori  $\alpha_i$  e delle  $n$  matrici  $\sigma_i$ .

#### § 4. - Il teorema fondamentale nella teoria dell'*n*. edro mobile.

Le componenti del vettore  $\mathbf{a}_i$  saranno indicate con

$$a_{(r)i} \quad r = 1, 2, \dots, n \quad i = 1, 2, \dots, u$$

lasciando fuor parentesi l'indice di covarianza. Analogamente gli elementi delle matrici  $\sigma_i$  saranno indicati con

$$p_{(r,s)i} \quad \begin{array}{l} r = \text{numero d'ordine dell'orizzontale} \\ s = \text{» » della verticale.} \end{array}$$

Agli accrescimenti  $du^i$  delle variabili  $u^i$  corrisponde lo spostamento del punto sulla  $V_n$  rappresentato dal vettore

$$\sum_i \mathbf{a}_i du^i.$$

Consegue che l'elemento lineare della  $V_n$  sarà rappresentato da :

$$ds^2 = \sum_i (\mathbf{a}_i du^i)^2 = \sum_i \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_i du^i du^i.$$

Porremo sempre nel seguito :

$$a_{ik} = \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_k.$$

I coefficienti  $a_{ik}$  di questa forma sono evidentemente invarianti per una rotazione qualunque dello spazio tangente.

Nota la 1<sup>a</sup> forma fondamentale, note cioè le  $a_{ik}$ , i vettori  $\mathbf{a}_i$  restano individuati a meno di rotazioni dello spazio tangente.

Se, ad es., non tutte le  $a_{ii}$  sono nulle, si potrà porre :

$$\begin{aligned} a_{(1)1} &= \sqrt{a_{11}} & a_{(2)1} &= \dots = a_{(n)1} = 0 \\ a_{(1)2} &= \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} & a_{(2)2} &= \sqrt{\frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}}} & a_{(3)2} &= \dots = a_{(1)2} = 0 \end{aligned}$$

ecc.

Decomponiamo ora le  $\sigma_i$  in tre matrici che diremo rispettivamente  $\sigma'_i, \sigma''_i, \sigma'''_i$  definite nel seguente modo.



Le  $\sigma'_i$  applicate ad un vettore dell'  $S_n$  tangente danno un vettore ancora dell'  $S_n$  tangente; applicate ad un vettore dell'  $S_n$  normale danno un vettore nullo. Le  $\sigma'_i$  si possono considerare come le proiezioni delle  $\sigma_i$  sopra l'  $S_n$  tangente. I determinanti di queste matrici sono :

$$\begin{vmatrix} p_{(11)i} \cdots p_{(1n)i} 0 \cdots 0 \\ p_{(n1)i} \cdots p_{(nn)i} 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 0 \cdots 0 \end{vmatrix}$$

Le  $\sigma'_i$  saranno nel seguito considerate come matrici di ordine  $n$ .

Le  $\sigma''_i$  trasformano vettori dell'  $S_m$  normale in vettori ancora dell'  $S_m$  normale; applicate a vettori dell'  $S_n$  tang. danno vettori nulli. Le  $\sigma''_i$  si possono considerare come le proiezioni delle matrici  $\sigma_i$  sopra l'  $S_m$  normale. I determinanti di queste matrici sono :

$$\begin{vmatrix} 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 \cdots 0 & p_{(n+1, n+1)i} & p_{(n+1, n+2)i} \cdots p_{(n+1, n+m)i} \\ 0 \cdots 0 & p_{(n+2, n+1)i} & p_{(n+2, n+2)i} \cdots p_{(n+2, n+m)i} \\ 0 \cdots 0 & p_{(n+m, n+1)i} & p_{(n+m, n+2)i} \cdots p_{(n+m, n+m)i} \end{vmatrix}$$

Le  $\sigma''_i$  saranno nel seguito considerate come matrici di ordine  $m$ .

Le matrici  $\sigma''_i$  infine trasformano i vettori dell'  $S_n$  tangente in vettori dell'  $S_m$  normale e viceversa. Queste matrici saranno nel seguito eliminate e sostituite con gruppi di vettori.

Si ha ora il seguente teorema :

*Le matrici  $\sigma'_i$  sono univocamente determinate, tosto che siano fissati gli  $n$  vettori-traslazione; sono cioè determinate, a meno di rotazioni dello spazio tangente dalla metrica della varietà. Gli elementi delle  $\sigma'_i$  dipendono bilinearmente dagli  $n$  vettori-traslazione e da  $n$  matrici simmetriche.*

La 1<sup>a</sup> delle relazioni fondamentali (A), si scinde in base alla definizione delle  $\sigma'_i$  e al fatto che i vettori  $\mathbf{a}_i$  appartengono all' $S_n$  tangente nelle due relazioni:

$$(1) \quad \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial u^i} = \sigma'_i \mathbf{a}_k - \sigma'_k \mathbf{a}_i$$

$$(2) \quad 0 = \sigma''_i \mathbf{a}_k - \sigma''_k \mathbf{a}_i.$$

Dalla 1<sup>a</sup> di queste relazioni, nell'ipotesi tacitamente fatta dell'indipendenza dei vettori  $\mathbf{a}_i$ , discende la 1<sup>a</sup> parte del teorema. La (1) esplicitata dà luogo a  $n \frac{n(n-1)}{2}$  relazioni e gli elementi delle  $\sigma_i (i = 1, 2 \dots n)$ , poichè queste matrici sono a determinante emisimmetrico, sono altrettanti. Discende da quanto segue che il determinante di questo sistema è diverso da zero, anzi è una potenza del determinante  $E$  i cui elementi sono le componenti dei vettori  $\mathbf{a}_i$ .

Siano  $i, j, k$  diversi. Dalle tre relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial u^h} - \frac{\partial \mathbf{a}_h}{\partial u^i} = \sigma'_i \mathbf{a}_h - \sigma'_h \mathbf{a}_i \\ \frac{\partial \mathbf{a}_h}{\partial u^k} - \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial u^h} = \sigma'_h \mathbf{a}_k - \sigma'_k \mathbf{a}_h \\ \frac{\partial \mathbf{a}_k}{\partial u^i} - \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial u^k} = \sigma'_k \mathbf{a}_i - \sigma'_i \mathbf{a}_k \end{array} \right.$$

si ricava, moltiplicando internamente la 1<sup>a</sup> per  $\mathbf{a}_k$ , la 2<sup>a</sup> per  $-\mathbf{a}_i$ , la 3<sup>a</sup> per  $-\mathbf{a}_h$  e tenendo conto dell'identità (con  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  vettori):

$$\mathbf{a} \times \sigma'_i \mathbf{b} = -\sigma'_i \mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

dedotta dal fatto che  $\sigma'$  è una matrice a determinante emisimmetrico:

$$2 \sigma'_k \mathbf{a}_h \times \mathbf{a}_i = \frac{\partial a_{ih}}{\partial u^k} - \frac{\partial a_{hk}}{\partial u^i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial u^h} - 2 \mathbf{a}_i \times \frac{\partial \mathbf{a}_h}{\partial u^k}.$$

Introducendo i simboli di CHRISTOFFEL di 1<sup>a</sup> specie:



Consideriamo ora le (2) e dimostriamo dapprima che gli elementi delle verticali delle matrici  $\sigma_i''$ :

$$(7) \quad p_{(1, n+r)i} \cdots p_{(n, n+r)i}$$

sono le componenti di un vettore dell' $S_n$  tangente (cioè la posizione e la grandezza del vettore le cui componenti sono le (7) non dipende dagli assi di riferimento  $x_1 x_2 \dots x_n$ ).

Siano perciò  $m_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ) gli elementi di una matrice ortogonale  $m$  (caratterizzante una rotazione dello spazio tangente  $S_n$ ) e siano

$$m_i = m^{-1} \frac{\partial m}{\partial u^i}$$

le  $n$  matrici rotazioni corrispondenti.

La matrice  $\sigma_i' + \sigma_i''$  per effetto di questa rotazione, a norma delle (B) del prec. n., diviene:

$$m \sigma_i' m^{-1} + m_i + m \sigma_i'' m^{-1}.$$

Della matrice qui scritta i primi due termini rappresentano matrici che trasformano i vettori dell' $S_n$  tangente in vettori dell' $S_n$  tangente; il 3° termine invece rappresenta una matrice che trasforma vettori dell' $S_n$  tangente in vettori dell' $S_n$  normale e viceversa.

Indicando cioè con  $\underline{\sigma}_i''$  le trasformate delle  $\sigma_i''$  per effetto della rotazione  $m$ , si ha:

$$\underline{\sigma}_i'' = m \sigma_i'' m^{-1}$$

da cui discende, c. d. d.:

$$\underline{p}_{(r, n+s)i} = \sum_k m_{rk} p_{(k, n+s)i},$$

dove le  $p$  (sottolineate) sono gli elementi secondo i nuovi assi delle  $\sigma_i''$ .

I vettori (dell' $S_n$  tangente) le cui componenti sono

$$p_{(1, n+s)i} \cdots p_{(n, n+s)i} \quad \begin{array}{l} s = 1, \dots, m \\ i = 1, \dots, n \end{array}$$

saranno in seguito indicati con  $P_{(s)i}$ .

Si dimostra agevolmente che per una rotazione dell' $S_n$  normale i suddetti vettori divengono

$$\sum_{s=1}^m n_{1s} P_{(s)i} \dots \sum_{s=1}^m n_{ms} P_{(s)i}$$

dove le  $n_{ik}$  sono gli elementi di una matrice ortogonale (di ordine  $m$ ).

Per effetto delle posizioni ora fatte, le (2) divengono

$$P_{(s)i} \times \mathbf{a}_k - P_{(s,k)} \times \mathbf{a}_i = 0.$$

Ponendo quindi

$$a_{(s)ik} = P_{(s)i} \times \mathbf{a}_k = P_{(s,k)} \times \mathbf{a}_i,$$

le  $m$  matrici che hanno come elemento variabile

$$a_{(1)ik} \dots a_{(m)ik}$$

sono simmetriche. Indicando, ad es., con  $A_{(r)}$  la matrice i cui elementi sono  $a_{(r)ik}$  discende dalle precedenti relazioni:

$$E P_{(s)} = A_{(s)},$$

dove  $E$  è la matrice di ordine  $n$  già stata considerata e  $P_{(s)}$  è una matrice, gli elementi dell' $r$ -esima verticale della quale sono le componenti del vettore  $P_{(s)r}$ .

Resta così pure dimostrata la 2<sup>a</sup> parte del Teorema fondamentale.

Le  $a_{(s)ik}$  sono invarianti per una rotazione dello spazio tangente, e gli indici  $i, k$  sono indici di covarianza. Ciò discende immediatamente dalle equazioni di definizione.

Converrà considerare le  $n$  quadriche differenziali

$$\varphi_i = \sum a_{(i)rs} du^r du^s \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Esse sono invarianti sia per trasformazione di coordinate, sia per le rotazioni dell' $S_n$  tangente.

Per effetto di una rotazione dell' $S_m$  normale si trasformano come le componenti di un vettore (dell' $S_m$  normale). Nasce così una corrispondenza tra le direzioni  $du^i$  dello spazio tangente (cioè le direzioni dei vettori  $\sum a_i du^i$ ) e la direzione del vettore dello spazio normale di componenti  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ .

La considerazione di questa direzione, la cui interpretazione

geometrica discende dalle considerazioni del n. seguente, può essere utile per la introduzione di speciali normali, suscettibili di una definizione assoluta.

§ 5. - **Trasporto per parallelismo. - Elementi del I.º ordine delle linee tracciate sulla  $V_n$ .**

Il trasporto per parallelismo di LEVI-CIVITA è contenuto in ultima analisi nella 1ª parte del teorema precedente. Quando è nota la metrica della  $V_n$ , sono determinati, a meno di una rotazione dello spazio tangente, i vettori-traslazione  $\alpha_i$  e per il precedente teorema le proiezioni  $\sigma'_i$  delle matrici rotazione sull' $S_n$  tangente.

Integriamo, secondo VOLTERRA, il differenziale

$$\sum_i \sigma'_i du^i$$

lungo una linea  $l$ , appartenente alla  $V_n$  e congiungente due punti  $P_1 Q_1$ ; determiniamo cioè una matrice ortogonale  $A$ , tale che soddisfi all'equazione

$$A^{-1} \frac{dA}{dt} = \sum_i \sigma'_i \frac{du^i}{dt},$$

dove  $t$  è il parametro che individua il punto sulla linea  $l$  e che nella posizione iniziale si riduce alla matrice unità.

Poichè le condizioni di completa integrabilità per le  $\sigma'_i$  non sono in generale soddisfatte (a meno che la  $V_n$  non sia euclidea), cioè non sono in generale nulle le

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial \sigma'_i}{\partial u^k} - \frac{\partial \sigma'_k}{\partial u^i} - \sigma'_i \sigma'_k + \sigma'_k \sigma'_i,$$

la matrice  $A$  dipenderà dal cammino di integrazione. Ad ogni vettore  $\alpha$  appartenente all' $S_n$  tangente in  $P$ , possiamo associare in  $Q$  il vettore  $A\alpha$  (dell' $S_n$  tangente in  $Q$ ), dove  $A$  è la matrice ortogonale prima determinata. Il vettore  $A\alpha$  è il vettore dell' $S_n$  tangente in  $Q$  ottenuto per parallelismo dal vettore  $\alpha$ , quando il trasporto avviene lungo la linea  $PQ$ . Il vettore  $A\alpha$

dipende poi, come la matrice  $A$ , dal cammino d'integrazione. La determinazione della matrice  $A$  dipende poi ovviamente dalla integrazione di un sistema lineare a determinante emmissimetrico.

Il significato cinematico del trasporto è poi dato dalla definizione delle matrici-rotazione  $\sigma'_i$ , considerate come proiezioni delle matrici  $\sigma_i$  sull' $S_n$  tangente.

Siamo ora in grado di determinare gli elementi del 1° ordine delle linee tracciate sulla  $V'_n$ .

Consideriamo perciò il vettore unitario :

$$\sum_i \mathbf{a}_i \frac{du^i}{ds},$$

tangente alla linea tracciata sulla  $V'_n$ , il cui arco è  $s$ .

Lo spostamento subito dall'estremo di questo vettore (supposto spiccato dalla posizione attuale del punto sulla linea di coordinate curvilinee  $u^i$ ), quando le  $u^i$  subiscono gli accrescimenti  $du^i$ , è

$$\frac{N}{\rho} ds,$$

dove  $N$  è un vettore unitario diretto lungo la 1ª normale principale alla linea e  $\frac{1}{\rho}$  è la 1ª curvatura.

Questo spostamento si comporrà di due parti, l'una dovuta alla variazione del vettore  $\sum_i \mathbf{a}_i \frac{du^i}{ds}$ , considerati gli assi di riferimento come fissi (spostamento relativo) e l'altro dovuto al trascinarsi degli assi.

Si avrà dunque :

$$(1) \quad \frac{N}{\rho} = \frac{d}{ds} \sum_i \mathbf{a}_i \frac{du^i}{ds} + \sum_i \sigma'_i \frac{du^i}{ds} \sum_k \mathbf{a}_k \frac{du^k}{ds}.$$

Usiamo le notazioni del n. precedente; ricordando che i vettori  $\mathbf{a}_i$  appartengono all' $S_n$  tangente, si ricava facilmente:

$$\frac{N}{\rho} = \frac{d}{ds} \sum_i \mathbf{a}_i \frac{du^i}{ds} + \sum_{ik} \sigma'_i \mathbf{a}_k \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} + \sum_{ik} \sigma''_{i'} \mathbf{a}_k \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds}.$$

I primi due termini del 2° membro di questa relazione rappresentano vettori dell' $S_n$  tangente; l'ultimo termine è invece un vettore dell' $S_n$  normale. Se  $N_1$ ,  $N_2$  sono le proiezioni del vettore  $N$  rispettivamente sull' $S_n$  tangente e sull' $S_n$  normale, si hanno allora le equazioni:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{N_1}{\rho} = \frac{d}{ds} \sum_i \mathbf{a}_i \frac{du^i}{ds} + \sum_{ik} \sigma'_i \mathbf{a}_k \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \\ \frac{N_2}{\rho} = \sum_{ik} \sigma'_i \mathbf{a}_k \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} \end{array} \right.$$

Nella 2ª di queste relazioni è contenuta la generalizzazione del teorema di MEUSNIER, il vettore  $\frac{N_2}{\rho}$  dell' $S_n$  normale riuscendo comune a tutte le linee della  $V_n$  aventi una stessa direzione  $du^i$ .

Si ha poi:

$$\begin{aligned} \sigma'_i \mathbf{a}_k &= (0 \dots 0, -\mathbf{P}_{(1)i} \times \mathbf{a}_k, \dots, -\mathbf{P}_{(m)i} \times \mathbf{a}_k) = \\ &= (0 \dots 0, -a_{(1)ik}, \dots, -a_{(m)ik}), \end{aligned}$$

perciò il vettore  $\frac{N_2}{\rho}$  è di componenti secondo gli assi  $(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$

$$\frac{\varphi_1}{ds^2} \dots \frac{\varphi_m}{ds^2}$$

dove ho posto come precedentemente:

$$\varphi_i = \sum_{r,s} a_{(i)rs} du^r du^s.$$

La direzione del vettore  $N_2$  è dunque la direzione dell' $S_n$  normale che nel precedente n. ho chiamato associata alla direzione  $du^i$ .

Se la linea è geodetica si ha  $N_1 = 0$ ; le equazioni delle geodetiche con le nostre notazioni assumono la forma:

$$(3) \quad \frac{d}{ds} \sum_i \mathbf{a}_i \frac{du^i}{ds} + \sum_{ik} \sigma'_{ik} \mathbf{a}_k \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} = 0$$

e il passaggio da questa forma a quella data correntemente alle equazioni delle geodetiche è quasi immediato, se si moltiplica in-



ternamente per  $\alpha_k$  il 1° membro delle (3) e si fa uso delle formule (4) del n. precedente.

Nella 1ª delle (2) è poi contenuta una osservazione del ЛИРКА (1), poichè

$$(4) \quad d \sum_i \alpha_i \frac{du^i}{ds} + \sum_{ik} \sigma'_i \alpha_k \frac{du^i}{ds} du^k = \frac{N_1}{\rho} ds$$

è lo spostamento dell'estremo del raggio vettore unitario

$$\sum_i \alpha_i \frac{du^i}{ds}$$

quando esso venga trasportato per parallelismo lungo l'arco  $ds$ .

Quando la linea è geodetica il vettore  $N_2$  è unitario, e il vettore  $\rho N_2$  è di componente :

$$\frac{\varphi_i ds^2}{\varphi_1^2 + \dots + \varphi_m^2} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Ponendo cioè

$$(5) \quad \psi_i = \sum_{h,k} a_{(i)hk} \frac{du^h}{ds} \frac{du^k}{ds}$$

ed indicando con  $(x_{n+1} \dots x_{n+m})$  le coordinate del centro di curvatura della geodetica di direzione  $\frac{du_i}{ds}$ , avremo come equazioni parametriche della  $V_{n-1}$  luogo di questi centri di curvatura

$$(6) \quad x_{n+r} = \frac{\psi_r}{\psi_1^2 + \dots + \psi_m^2} \quad r = 1, 2, \dots, m$$

e alle equazioni (5) di definizione delle  $\psi_i$ , si deve aggiungere la seguente :

$$(7) \quad 1 = \sum_{h,k} a_{hk} \frac{du^h}{ds} \frac{du^k}{ds}.$$

Le (6) sono le equazioni di una trasformazione per raggi vettori reciproci. In luogo di considerare la  $V_{n-1}$  luogo dei cen-

(1) Sulla curvatura geodetica delle linee appartenenti ad una varietà qualunque (Rendic. Acc. Lincei, Vol. XXXI).

tri di curvatura si può considerare la  $V_{n-1}$  luogo dei punti di coordinate  $\psi_1 \dots \psi_m$ , queste essendo legate dalle (5) e dalla (7). Per  $n = m = 2$ , ad es., il luogo di questo punto è una conica. Per  $m = \frac{n(n-1)}{2}$ , in generale, questa  $V_{n-1}$  giace in un  $S_{m-1}$  generico, per  $m > \frac{n(n-1)}{2}$  giace in un  $S_{m-1}$  passante per l'origine. Si deduce che in questi casi la  $V_{n-1}$  luogo dei centri di curvatura delle geodetiche uscenti da un punto giace rispettivamente sopra una ipersfera o sopra un iperpiano. Questi risultati già furono dati dal VITALI (1) come applicazione del metodo di ricerca da lui sviluppato.

Rimando ad una 2<sup>a</sup> Memoria sia la considerazione della curvatura secondo una orientazione, fatta partendo dalle matrici  $\sigma'_{ik}$  considerate al n. 1, sia la riduzione delle equazioni di compatibilità cui soddisfano gli elementi caratteristici  $\alpha_i, \sigma_i$ , come lo studio degli elementi di ordine superiore al 1° delle linee tracciate sulla varietà.

---

(1) G. VITALI, *Geometria dello spazio hilbertiano*, Bologna. N. Zanichelli, 1926, p. 286.