REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

TRAN VAN QUANG

Nomographie et statistique

Revue de statistique appliquée, tome 9, nº 3 (1961), p. 47-76
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1961__9_3_47_0>

NOMOGRAPHIE ET STATISTIQUE

TRAN VAN QUANG

Ingénieur à l'Institut d'Études et de Mesures de Productivité

INTRODUCTION

L'utilisation des graphiques descriptifs et des graphiques d'analyse en tant que moyens d'expression et moyens d'investigation est assez largement connue en statistique. Par contre, les graphiques de calcul, les nomogrammes ou abaques n'ont pas, jusqu'à présent, trouvé dans ce domaine une application semblable à celle de la nomographie dans plusieurs branches techniques (électricité, mécanique, construction, ...). L'une des raisons de cette carence se trouve certainement dans le développement récent du calcul automatique et l'extraordinaire perfectionnement des moyens électroniques qui le desservent.

Pour la plupart des utilisateurs du calcul automatique, le calcul graphique appartient déjà au passé et fait figure de moyen anachronique. Mais, à notre époque, l'automation n'est pas encore généralisée et le choix des moyens, en matière de calcul comme en toute chose, demeure conditionné par les considérations de coût et la question de rentabilité. Les moyens les plus perfectionnés de calcul sont certes bien séduisants à plusieurs points de vue mais ils sont coûteux. Les graphiques de calcul, par contre, sont réalisables à peu de frais. De plus, leur souplesse et leur faculté d'adaptation à des cas très divers plaident en faveur de leur utilisation lorsque la simplicité relative des opérations n'exige pas le recours aux moyens perfectionnés.

Dans toute analyse statistique, dès le début, il y a des calculs à faire : calculs des caractéristiques centrales d'une série (moyennes), des caractéristiques de dispersion (écart-type, variance, moments d'ordre supérieur). Or, souvent, en pratique, on a affaire à des séries d'effectif faible : 20 à 100 unités et ces calculs se font généralement à l'aide de simples machines comptables (additionneuse, multiplicatrice...). C'est là qu'intervient le calcul graphique qui, par des dispositifs simples, peut alléger notablement le travail.

Par ailleurs, on peut trouver dans divers problèmes les points de rencontre entre les méthodes de la nomographie et celles de la statistique. Ainsi, l'ajustement en statistique d'une distribution observée à la distribution normale par la droite de Henri s'appuie sur un procédé de la nomographie : l'anamorphose ou transformation d'échelles. L'anamorphose est double quand on étend ce mode d'ajustement à une distribution du type Galton-mac Alister. Elle pourrait être opérée graphiquement et permettre de simplifier le travail dans la normalisation des variables pratiquée fréquemment en psychologie. Dans certaines conditions, appliquée à une distribution quelconque qui n'est ni du type "normale" ni du type "log-normale", elle pourrait faciliter l'étude de l'action des divers facteurs dans la valeur d'une variable, facteurs dont la fluctuation peut être, non additive ou proportionnelle, mais plus que proportionnelle ou suivant une relation fonctionnelle simple quelconque.

En outre, dans une étude de régression, l'analyse graphique faite sur un système de représentation différent du système cartésien (système à axes parallèles par exemple) peut être riche d'enseignements. L'étude des relations linéaires à plus de 2 variables gagnera à être envisagée graphiquement sur un système autre que la représentation cartésienne (régression dans le cas de plus de 2 variables, programmation linéaire...).

Enfin la nécessité de présenter les formules obtenues au dénouement d'une étude statistique de régression sous une forme pratique, de construire des nomogrammes ou abaques permettant aux personnes non initiées aux calculs d'en tirer leur parti, exige le recours aux procédés de la nomographie. Ces procédés pourront, en outre, aider à envisager la présentation des abaques donnant les valeurs de certaines fonctions en statistique (loi de Poisson, loi binomiale...) sous d'autres formes que celle des nomogrammes cartésiens, formes offrant plus de facilité de lecture et peut-être plus de précision.

On examinera ci-après les points suivants :

- Calcul graphique des principales caractéristiques d'une série statistique.
- L'anamorphose dans la droite de Henri.
- La droite de régression sur un système d'axes parallèles.
- Perspectives d'application du système graphique à échelles parallèles.

I – CALCUL GRAPHIQUE DES PRINCIPALES CARACTÉRISTIQUES D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

CALCUL DE LA MOYENNE ARITHMETIQUE

1/ Principe - moyenne arithmétique simple de 2 nombres.

Soit à calculer la moyenne arthmétique simple de 2 nombres a et b :

$$m = \frac{a + b}{2}$$

On porte sur un axe Ox un segment OA = a et sur O'y parallèle à Ox un segment OB = b (figure 1) : on joint les extrémités des segments A et B, AB coupe un axe O"P parallèle à OA et à O'B passant par le milieu O" de OO' en un point P :

$$O''P = \frac{OA + OB}{2} = \frac{a + b}{2} = m$$

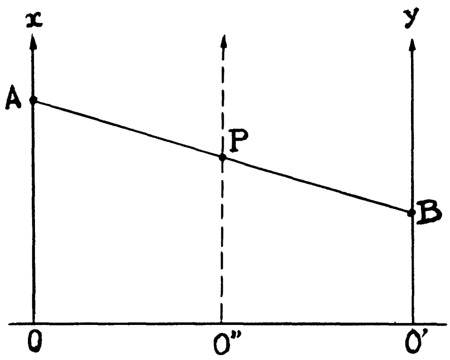


Figure I-1

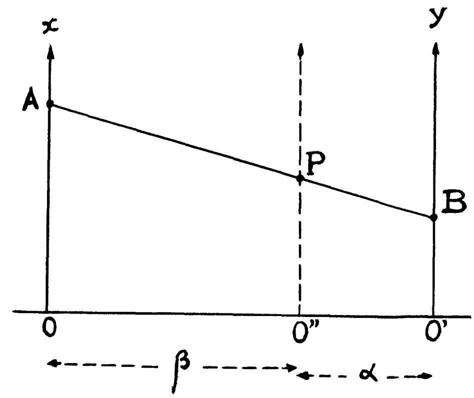


Figure I-2

Moyenne arithmétique pondérée de 2 nombres.

Soit à calculer la moyenne pondérée de 2 nombres a et b :

$$m = \frac{\alpha a + \beta b}{\alpha + \beta}$$

(Figure 2). On opère exactement comme dans le dispositif précédent ; toutefois l'axe de la moyenne ne passera pas par le milieu de OO' mais par un point O'' tel que :

$$OO'' = \beta$$

$$O''O' = \alpha$$

On démontre facilement que :

$$O''P = \frac{\overline{O''O'}\quad a + \overline{OO''}\quad b}{OO'} = \frac{\alpha a + \beta b}{\alpha + \beta} = m$$

2/ Application au calcul de la moyenne arithmétique de plusieurs nombres.

Soit à calculer la moyenne arithmétique de 5 nombres, par exemple :

$$m = \frac{a + b + c + d + e}{5} \qquad \text{(Figure 3)}$$

On porte sur des axes verticales parallèles O_1x, O_3y, O_5z, O_7t, O_9u des segments :

$$O_1A = a$$

$$O_3B = b$$

$$O_5C = c$$

$$O_7D = d$$

$$O_9E = e$$

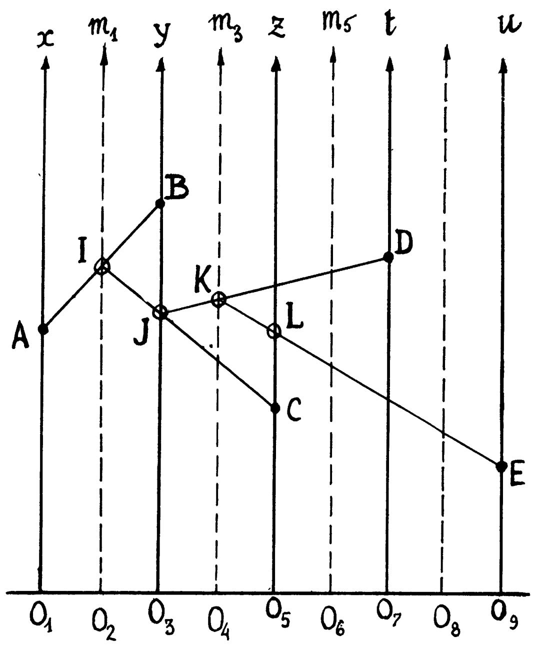


Figure I-3

Les axes O_2m_1, O_4m_3, O_6m_5, O_8m_7, étant parallèles aux axes O_1x, O_3y, O_5z, O_7t et O_9u et tels que :

$$O_1O_2 = O_2O_3$$

$$O_3O_4 = O_4O_5 \qquad \text{etc.}$$

On joint A et B ; AB coupe O_2m_1 en I ; on joint I et C. IC coupe O_3y en J ; on joint J et D : JD coupe O_4m_3 en K ; on joint enfin K et E ; KE coupe O_5z en L. O_5L est la moyenne des 5 nombres a, b, c, d, e : en effet :

$$\overline{O_2I} = \frac{\overline{O_1A} + \overline{O_3B}}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\overline{O_3J} = \frac{2\ \overline{O_2I} + \overline{O_5C}}{3} = \frac{2\ \dfrac{(a+b)}{2} + c}{3} = \frac{a+b+c}{3}$$

$$\overline{O_4K} = \frac{3\ \overline{O_3J} + \overline{O_7D}}{4} = \frac{3\ \dfrac{(a+b+c)}{3} + d}{4} = \frac{a+b+c+d}{4}$$

$$\overline{O_5L} = \frac{4\ \overline{(O_4K)} + \overline{O_9E}}{5} = \frac{4\ \dfrac{(a+b+c+d)}{4} + e}{5} = \frac{a+b+c+d+e}{5}$$

Dans la pratique, ce dispositif permet de calculer la moyenne de plus d'une vingtaine de nombres. Le papier millimétré peut être utilisé avantageusement pour ce calcul.

CALCUL DE LA MOYENNE GEOMETRIQUE.

La moyenne géométrique se calcule de la même façon : seulement, les échelles verticales sont logarithmiques.

Dans le dispositif de la figure 3 si les échelles O_1x, O_3y, O_5z, O_7t et O_9u étaient logarithmiques, on aurait :

$$\text{Log } L = \frac{\text{Log } a + \text{Log } b + \text{Log } c + \log d + \log e}{5}$$

d'où

$$L = \sqrt[5]{a \times b \times c \times d \times e}$$

La moyenne géométrique de plusieurs nombres sera de cette façon calculée beaucoup plus rapidement qu'avec une machine comptable et une table des logarithmes. Le papier semi-logarithmique qui est en vente courante dans le commerce est tout indiqué pour ce calcul.

CALCUL DES SOMMES CUMULEES DE PLUSIEURS NOMBRES.

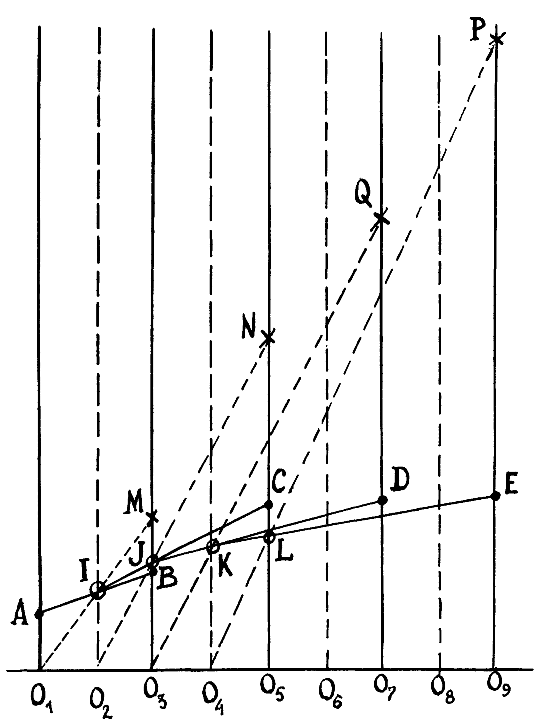


Figure I-4

Le calcul des sommes cumulées de plusieurs nombres est également laborieux sur une machine comptable : répétition des totaux successifs. Ce calcul peut avantageusement s'appuyer sur le dispositif de la figure 3. Soient 5 nombres a, b, c, d, e classés par ordre croissant. On les place sur le dispositif de la figure 4, semblable en tout à celui de la figure 3, et on commence par calculer les moyennes successives comme il est indiqué précédemment. Pour faire les sommes successives, on joint O_1I et on prolonge ; soit M l'intersection de cette droite avec O_3y, on a :

$$O_3M = OA + O_3B = a + b$$

De même :

$$O_5N = a + b + c$$

$$O_7Q = a + b + c + d$$

$$O_9P = a + b + c + d + e$$

CALCUL DE L'ECART-TYPE ET DE LA VARIANCE

Le calcul graphique de l'écart-type d'une série d'une vingtaine de nombres peut se faire plus rapidement par les graphiques qu'avec des machines comptables et une table des carrés.

Principe - Considérons sur l'axe verticale (figure 5) un point A d'ordonnée a ; menons de A une droite quelconque AK qui coupe l'axe horizontal en K.

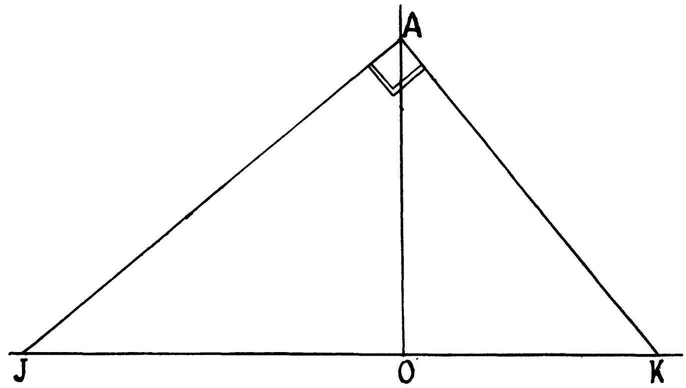


Figure I-5

La droite AJ perpendiculaire à AK coupe l'axe horizontal en un autre point J. On sait que :

$$\overline{OA}^2 = \overline{OJ} \times \overline{OK}$$

ou

$$\overline{OJ} = \frac{1}{OK} \times \overline{OA}^2$$

Cette sorte de "projection coudée" donnera sur l'axe horizontal :

$$OJ = \overline{OA}^2, \text{ si } \overline{OK} = 1$$

où OJ = longueur proportionnelle à $\overline{OA}^2$, si OK est quelconque, le coefficient de proportionnalité étant $\frac{1}{OK}$.

Application au calcul de la variance d'une série de plusieurs nombres.

Soit à calculer la variance de 5 nombres a, b, c, d, e dont on a déjà déterminé la moyenne arithmétique.

On représente sur une échelle verticale ces 5 nombres ainsi que leur moyenne arithmétique M par des points (figure 6). On trace un axe horizontal passant par M. On considère le point le plus éloigné de M (soit F dans le cas de la figure 6). On choisit le point de repère Ω de telle sorte que F' "projection coudée" de F soit le plus éloigné de M mais demeure dans les limites du graphique.

On projette de la même façon tous les autres points, ce qui se fait facilement avec une équerre et on obtient sur l'échelle horizontale les nombres proportionnels aux carrés des écarts par rapport à la moyenne arithmétique :

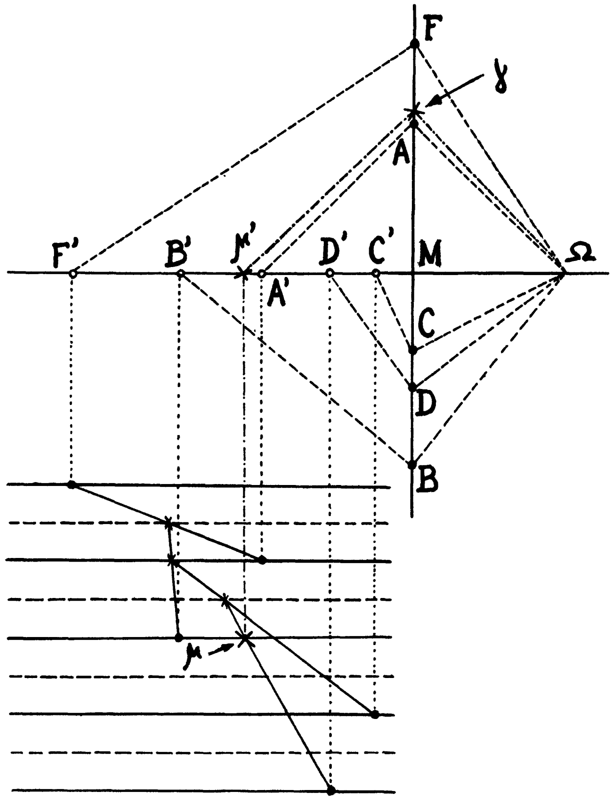


Figure I-6

$$MF' = \frac{1}{M\Omega} \times \overline{MF^2} \qquad MB' = \frac{1}{M\Omega} \times \overline{MB^2} \qquad \text{etc.}$$

On fait ensuite la moyenne μ de ces nombres sur des horizontales parallèles de la même façon que précédemment. Cette moyenne est :

$$\frac{1}{M\Omega} \times \frac{\sum (x - \overline{x})^2}{5} = \frac{1}{M\Omega} \quad \text{variance}$$

Pour calculer l'écart-type, on projette μ en μ' sur l'axe horizontal ; le chemin inverse de la "projection coudée" détermine le point α ; on a :

$$\overline{M\gamma^2} = \overline{M\mu'} \times M\Omega$$

Comme

$$\overline{M\mu'} = \frac{1}{M\Omega} \times \text{variance},$$

on a donc :

$$\overline{M\gamma^2} = \frac{1}{M\Omega} \times \text{variance} \times M\Omega = \text{variance}$$

d'où

$$\overline{M\gamma} = \sqrt{\text{variance}} = \text{écart-type}$$

CALCUL DES MOMENTS DU 3e ET DU 4e ORDRE (Moments par rapport à la moyenne).

Principe - Soit un point A sur l'axe vertical (figure 7) ; la "projection coudée" donne le point J sur l'axe horizontal tel que :

$$\overline{OJ} = \frac{1}{OK} \times \overline{OA^2}$$

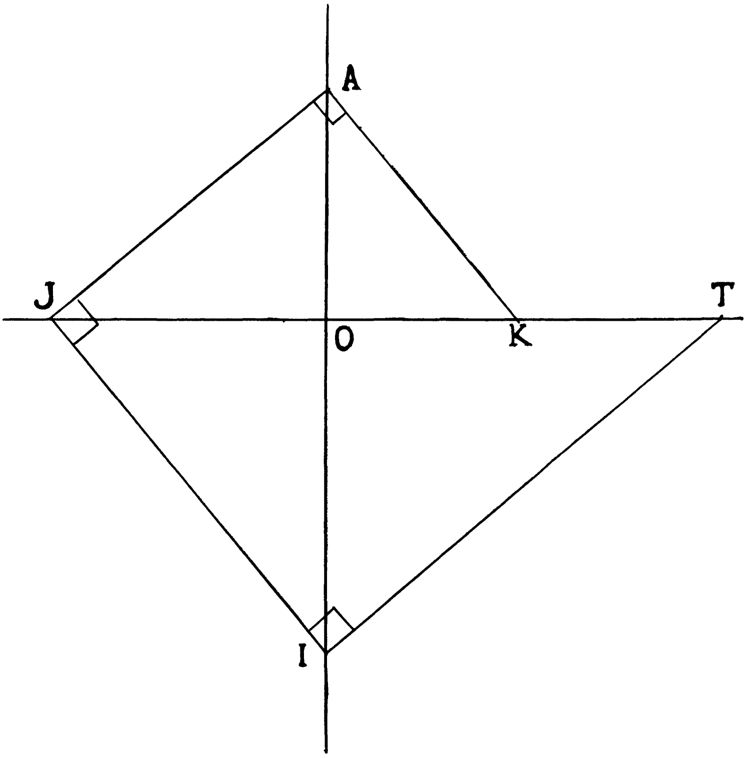


Figure I-7

Si l'on continue cette "projection coudée" en menant de J une droite faisant 90° avec AJ, on obtiendra sur l'échelle verticale un point I tel que :

$$\overline{OI} = \frac{1}{OK^2} \times \overline{OA^3}$$

En effet $\overline{OI} \times \overline{OA} = \overline{OJ}^2$

$$\overline{OI} = \frac{\overline{OJ}^2}{OA} = \left(\frac{1}{OK} \times \overline{OA}^2\right)^2 : \overline{OA}$$

$$= \frac{\overline{OA}^4}{\overline{OK}^2 \times \overline{OA}} = \frac{\overline{OA}^3}{OK^2}$$

Si l'on continue cette "projection coudée", on obtiendra sur l'axe horizontal un point T tel que :

$$\overline{OT} = \frac{1}{\overline{OK}^3} \times \overline{OA}^4$$

<u>Application au calcul des moments du 3e et du 4e ordre par rapport à la moyenne.</u>

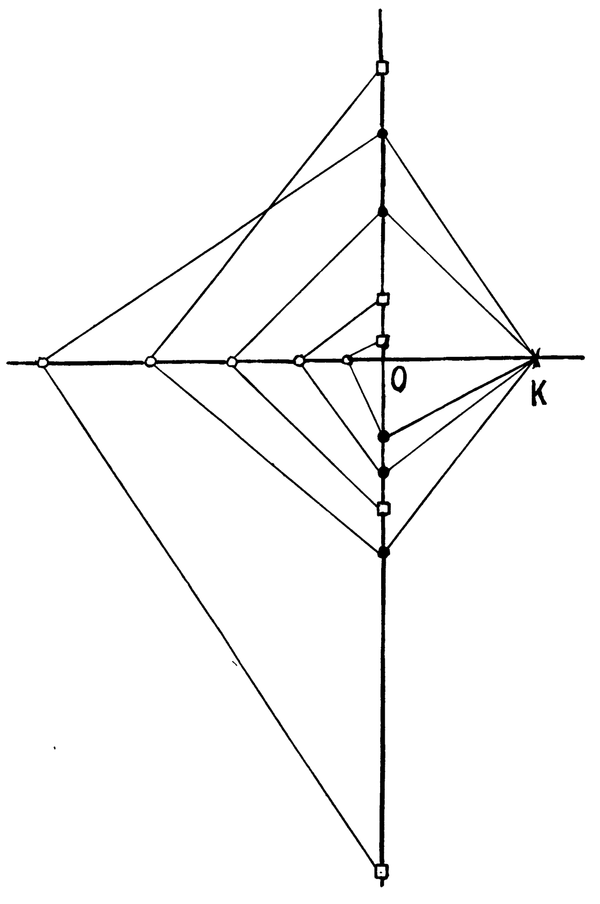


Figure I-8

On fait un dispositif semblable à celui utilisé pour le calcul de la variance et de l'écart-type, (figure 8).

Les points obtenus après une "double projection coudée" sur l'échelle verticale permettent de déterminer une moyenne qui sera :

$$\frac{1}{\overline{OK}^2} \times \frac{\sum (x - \bar{x})^3}{n} = \frac{1}{\overline{OK}^2} \times \text{moment du 3e ordre par rapport à la moyenne.}$$

Le calcul du moment du 4e ordre par rapport à la moyenne se fait de la même façon - à une double projection coudée, on substitue une triple projection coudée et les points projetés dont on a à déterminer la moyenne seront à nouveau sur l'échelle horizontale.

Remarque - Le dispositif du calcul de la moyenne de plusieurs nombres pourrait servir à calculer la moyenne des carrés, des cubes, des 4e puissances, si à une échelle des nombres était substituée une échelle des carrés, cubes ou 4e puissances. Mais ces échelles dépasseraient vite les limites du graphique et ne pourraient être utilisées d'une façon pratique.

EXTENSION AU CALCUL DU COEFFICIENT DE CORRELATION ENTRE 2 VARIABLES.

La méthode graphique peut éventuellement être étendue à d'autres calculs statistiques, par exemple au calcul du coefficient de corrélation r entre 2 variables x et y.

On sait que r est lié aux coefficients angulaires des droites de régression (régression de x en y et régression de y en x) par la relation :

$$r = \sqrt{a\, a'}$$

a et a' se déterminent à vue sur un nuage de points de coordonnées x et y. L'opération est donc praticable, mais n'est pas aisée et de plus manque de précision.

On peut utiliser la formule :

$$\sigma^2_{x+y} = \sigma^2_x + \sigma^2_y + 2\, r\, \sigma_x\, \sigma_y$$

donnant la relation entre la covariance des 2 variables x et y, les variances de chacune d'elles et le coefficient r.

Le calcul de r revient donc à déterminer σ_x, σ_y, σ^2_x, σ^2_y et σ^2_{x+y}. On a vu comment se calculent σ_x, σ_y, σ^2_x et σ^2_y. Pour σ^2_{x+y}, il suffit d'opérer de la même façon après avoir effectué les sommes $x_i + y_i$ pour toutes les observations ; pratiquement, il suffit de représenter sur un graphique cartésien le nuage de points (x_i, y_i) et de projeter ces points soit sur Oy soit sur Ox (les projetantes étant inclinées à 45°) (Voir figure 9).

Ce dispositif n'est pas commode car on risque de sortir des limites du graphique : il est possible de remédier à cela en se contentant de projeter les points (projetantes inclinées à 45°) non sur les axes Oy ou Ox mais sur la bissectrice Om de yOx. Les sommes $x_i + y_i$ deviennent $(x_i + y_i)\sqrt{2}$.

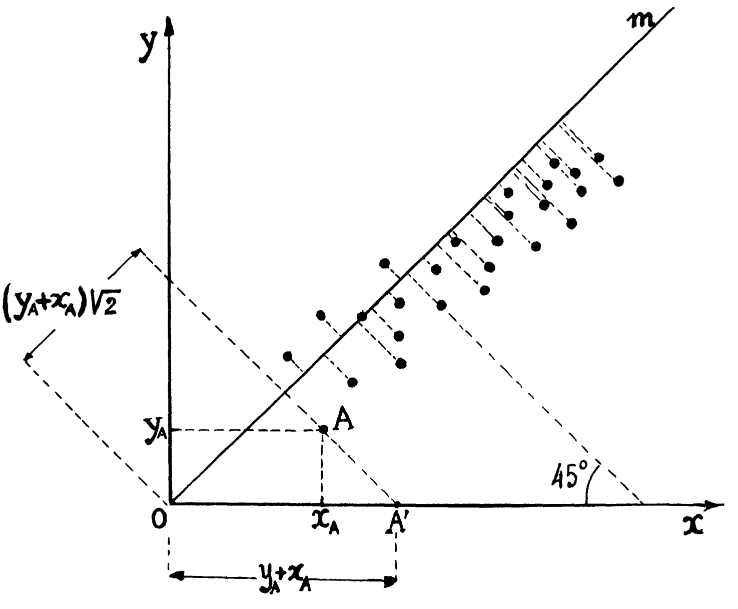


Figure I-9

II – L'ANAMORPHOSE DANS LA DROITE DE HENRI

On n'insiste pas ici sur le processus d'ajustement d'une distribution observée par une distribution normale au moyen de la *droite de Henri*, processus assez généralisé dans la pratique puisqu'il donne lieu à la commercialisation du papier gausso-arithmétique et du papier gausso-logarithmique.

Ce qui nous intéresse c'est le trait d'union que constitue ce processus entre l'ajustement statistique d'une distribution et les méthodes de la nomographie. En effet, la transformation d'échelle dans le but de changer la courbe de répartition gaussienne en une droite correspond à l'anamorphose en nomographie.

Soit la représentation graphique en coordonnées cartésiennes de la fonction de répartition π (t) de la loi normale en fonction de la variable réduite t.

L'anamorphose géométrique permet de transformer cette courbe en une droite. L'échelle π (t) est transformée de telle sorte que toute distribution

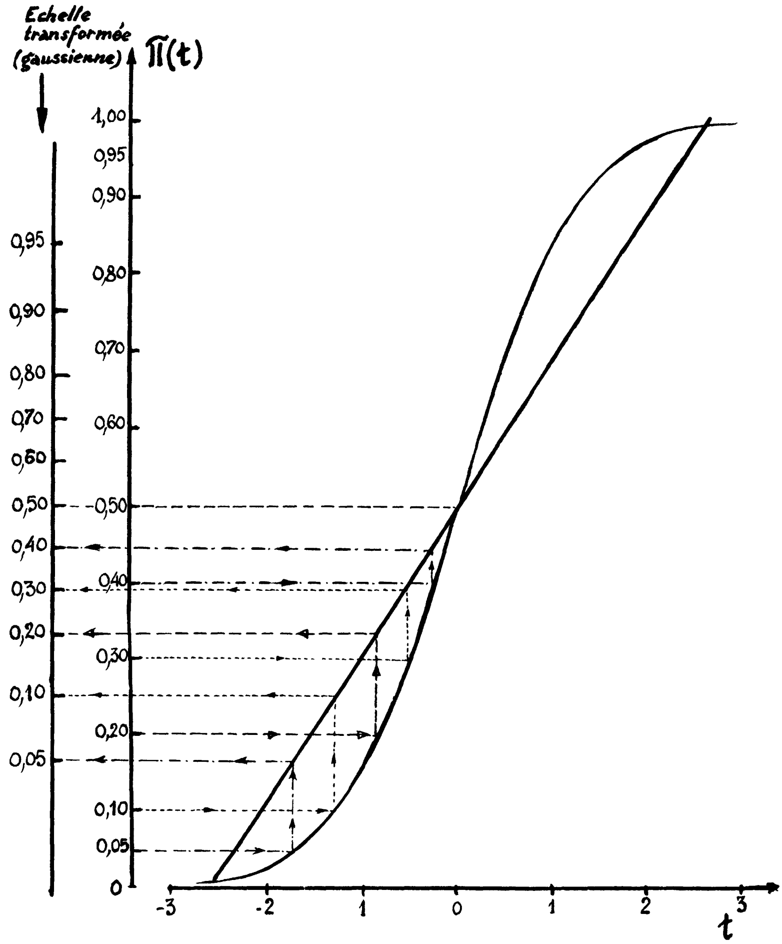


Figure II-1

normale soit représentée par une droite sur un graphique dont t est porté en abscisse et π (t) en ordonnée (figure 1) (plus généralement x en abscisse et (x) en ordonnée).

Cette droite est d'autant plus inclinée que l'unité de t (c'est-à-dire l'écart-type σ de la variable x) est grande. En effet, la variable réduite t dans une distribution normale est $t = \frac{x - m}{\sigma}$ et inversement $x = t\sigma + m$. En substituant x à t on ne fait que déplacer l'origine de l'abscisse de + m et multiplier le module de l'échelle en abscisse par σ.

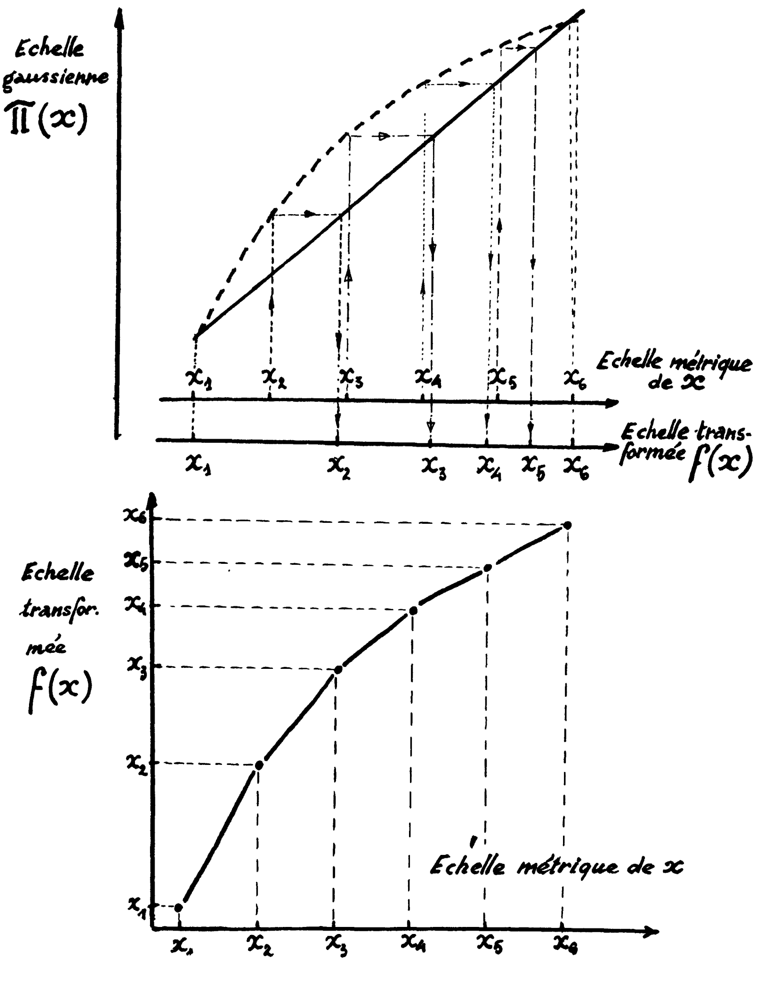
L'ajustement d'une loi de Galton Mac-Alister revient à opérer une seconde anamorphose qui consiste à transformer l'échelle t en abscisse en une échelle fonctionnelle de x ; l'utilisation de l'échelle logarithmique pour l'abscisse permet de déterminer les relations $t = a \text{ Log } x + b$, ou $t = a \text{ Log } (x + xo) + b$.

L'anamorphose pratiquée est une anamorphose analytique ; elle correspond à une transformation de variable suivant une relation fonctionnelle connue :

- pour la loi de Galton Mac-Alister, comme on vient de le voir, l'échelle t est transformée suivant les relations :

$$t = a \text{ Log } x + b \quad \text{ou} \quad t = a \text{ Log } (x + xo) + b.$$

- dans certains cas pratiques, la transformation se fait également suivant les relations : $t = \sqrt{x}$, $t = \sqrt{x + \frac{1}{2}}$.



Figures II-2 et II-3

Sans faire à priori le choix de la formule de transformation, on peut cependant appliquer d'abord une anamorphose empirique, puis chercher ensuite la relation fonctionnelle entre la variable transformée et la variable observée.

Supposons qu'on ait une distribution quelconque ; l'ajustement sur papier gausso-arithmétique ne donne pas la droite de Henri mais une courbe quelconque ou plus exactement une ligne brisée autour de cette courbe. Une anamorphose empirique (toujours possible en nomographie) pourrait changer cette courbe en une droite ; elle donnera une échelle transformée en abscisse qui est l'échelle d'une fonction f(x) inconnue (figure 2).

La représentation sur un autre graphique cartésien où, en ordonnée, on porte l'échelle anamorphosée f(x), et, en abscisse, l'échelle métrique de x, permet de déterminer ensuite la forme de cette fonction (figure 3).

De cette façon, il sera possible :

- de chercher une relation éventuelle entre la variable f(x), normale et la variable x observée.
- d'apprécier la liaison entre une distribution quelconque observée et la distribution normale.

III – LA DROITE DE RÉGRESSION SUR UN SYSTÈME D'AXES PARALLÈLES

Le principe de correspondance dualistique mis en application par l'ingénieur français Maurice d'Occagne pour construire nombre de nomogrammes à points alignés, peut être utile en matière d'ajustement graphique.

Soient deux points A et B sur un graphique cartésien d'axes Ox et Oy.

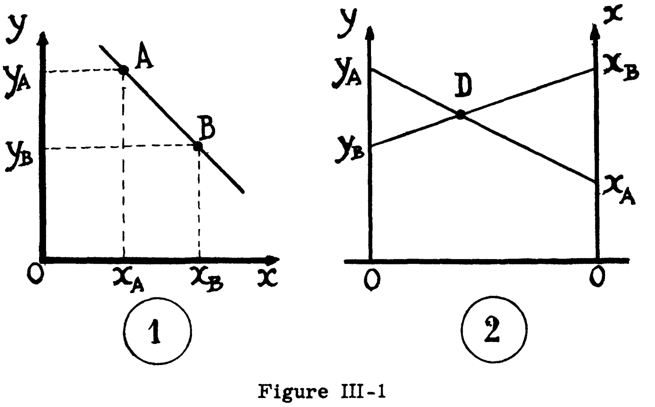


Figure III-1

Ces points correspondant, sur un système d'axes parallèles Ox et Oy, respectivement aux droites : $x_A y_A$ et $x_B y_D$. La droite passant par A et B sur le système (1) correspond au point D sur le système (2) (figure 1).

On peut essayer de voir ce que donne sur un système d'échelles parallèles l'ajustement linéaire d'un nuage de points.

Soient un nuage de points et la droite d'ajustement D sur un système cartésien, le point C (M_y, M_x) centre du nuage, le point P et sa projection P' sur D (figure 2).

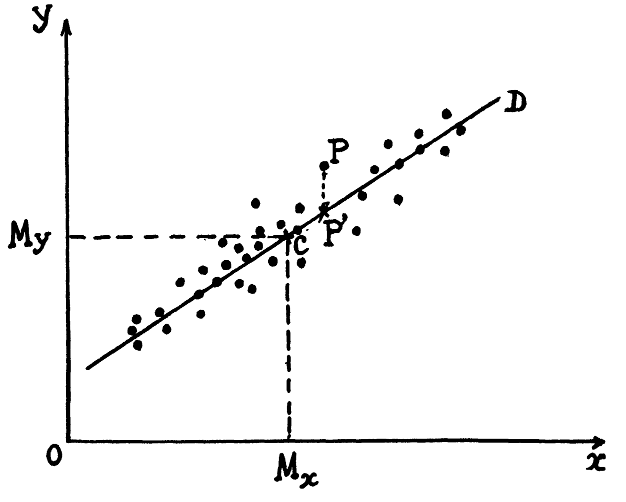


Figure III-2

Si $y = ax + b$ est l'équation de la droite d'ajustement, l'écart de P à cette droite, soit la distance PP' sera :

$$PP' = y_P - (ax_P + b)$$

Sur un système d'échelles parallèles (figure 3) :

- au point P correspond la droite $x_P\ y_P$
- à la droite D correspond le point D
- au point C correspond la droite M_x, M_y
- au point P' correspond la droite $x_P\ y'_P$

et à l'écart PP' correspond, sur l'échelle de y, le segment y y' .

Soit I l'intersection de $x_P\ y_P$ et de l'axe parallèle passant par D :

$$\overline{ID} = \overline{y_P\ y'_P} \times \frac{n}{m+n}$$

$$= \frac{\overline{y_P\ y'_P}}{\frac{m+n}{m}} = \frac{\overline{y_P\ y'_P}}{1 + \frac{n}{m}}$$

$\frac{n}{m}$ étant le coefficient angulaire de D.

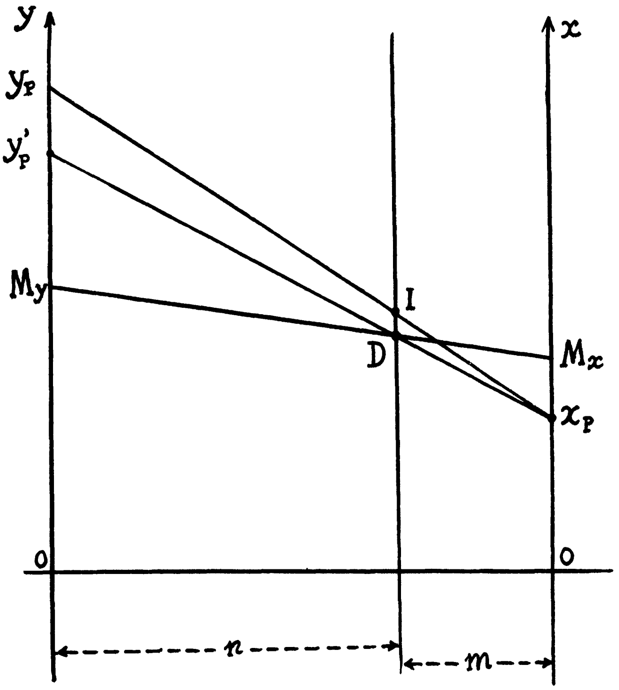


Figure III-3

Si tous les points du nuage étaient représentés sur ce système, tous les écarts PP' seraient projetés automatiquement sur l'axe passant par D. De cette remarque, on peut tirer des conséquences intéressantes :

L'adoption du système d'échelles parallèles dans l'ajustement graphique permet de repérer à vue plus facilement la pente de la droite. Le nuage aura l'aspect d'un fuseau de droites se croisant les unes entre les autres (figure 4).

La détermination à vue de D consisterait alors à tracer une parallèle aux axes de façon :

- à couper le faisceau à l'endroit où l'étranglement est étroit si l'on voulait minimiser l'étendue des écarts ;
- à couper le faisceau à l'endroit où les intersections de ses droites et de l'axe parallèle en pointillés sont distribuées à peu près symétriquement autour du point D si l'on désirait avoir des écarts PP' distribués symétriquement autour de zéro.

L'intersection de l'axe parallèle en pointillé avec M_x M_y donne D, point correspondant à la droite d'ajustement du système cartésien.

L'avantage de ce système de représentation, dans ce cas, est de projeter automatiquement sur un même axe les écarts PP' et de faciliter ainsi leur comparaison - alors que sur un système cartésien cette comparaison

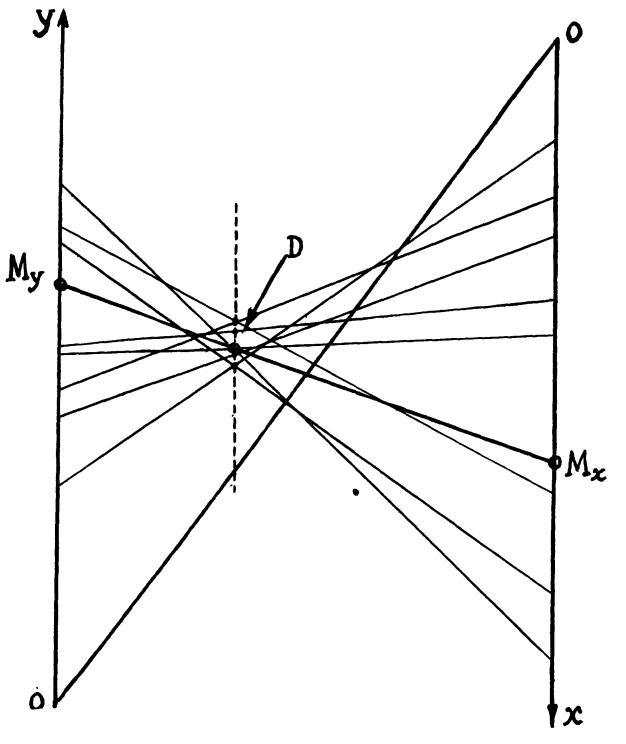


Figure III-4

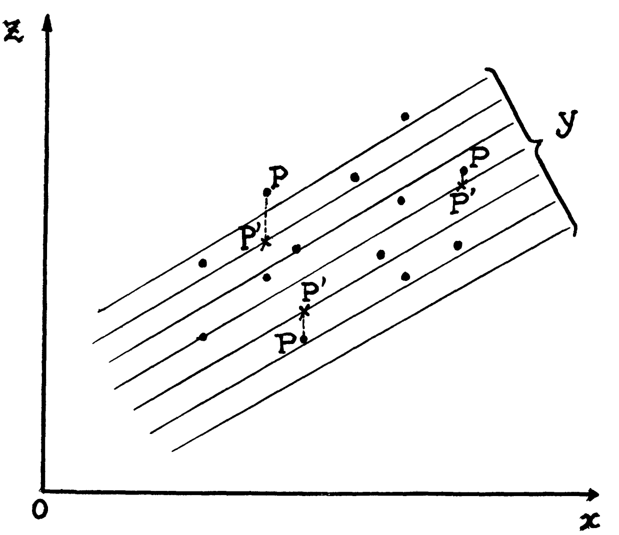


Figure III-5

est plus difficile (il faudrait, pour cela, tracer un faisceau de projetantes parallèles à la droite D).

L'on peut pousser cette considération sur l'ajustement avec le système d'axes parallèles aux cas de plus de 2 variables.

Ainsi dans le cas de 3 variables, avec la représentation cartésienne il est encore plus difficile de mettre en relief les écarts PP'.

Soit par exemple un ajustement linéaire de forme : $z = ax + by + C$

Les écarts PP' seront :

$$PP' = (z_P - (as_P + by_P + C)$$

On pourrait à la rigueur, sur un nomogramme cartésien à faisceaux parallèles, représenter PP' comme indique la figure, mais les écarts PP' sur ce nomogramme sont disposés au hasard et leur comparaison est encore plus difficile à vue (figure 5).

Sur un système d'échelles parallèles, on pourrait avoir un graphique comme celui de la figure 6 et les écarts PP' sont $z_P\, z'_P$ sur l'axe des z ; ils sont projetés sur l'axe passant par D en ID (D représente avec la droite x' y' le plan d'équation : $z = ax + by + C$).

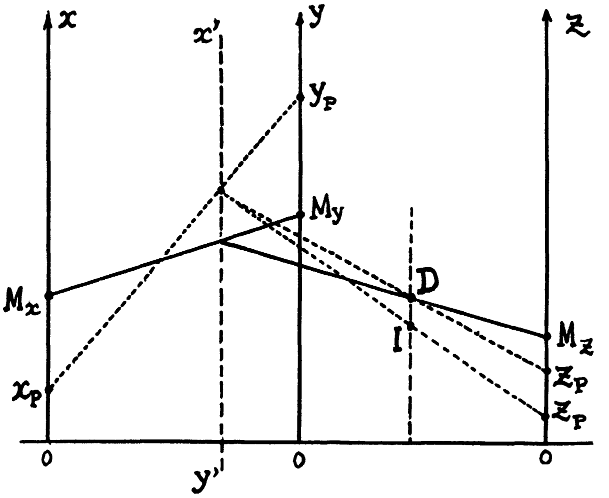


Figure III-6

L'ajustement linéaire à 3 variables revient à déterminer ce plan ($z = ax + by + C$). Il s'agit donc de fixer la position :

- du point D
- de l'axe x'y' (qui est un axe binaire réalisant la condensation des échelles Ox et Oy).

On peut, en pratique, utiliser le dispositif suivant (figure 7) :

- axes parallèles horizontaux Ox et Oy
- axe vertical Oz, perpendiculaire aux deux premiers.

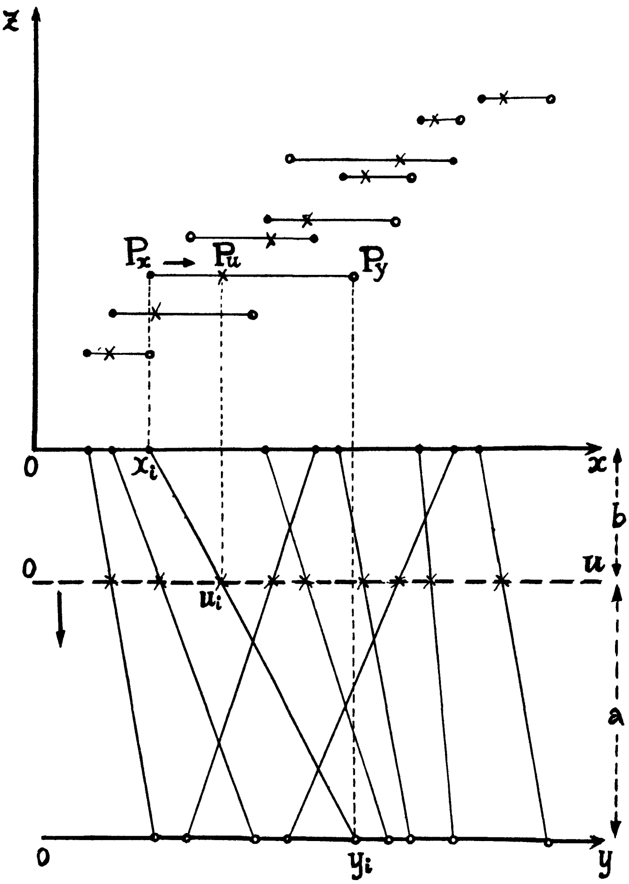


Figure III-7

Dans la partie inférieure du dispositif graphique, chaque couple de valeurs (x_i, y_i) est représenté par un segment s'appuyant sur Ox et Oy. L'ensemble forme un faisceau de segments de droite.

Un axe binaire Ou (en pointillés) réalise la condensation des échelles Ox et Oy : ses intersections avec les segments du faisceau déterminent les valeurs d'une variable u (combinaison de x et de y) :

$$u = \frac{ax + by}{a + b}$$

Dans la partie supérieure du dispositif graphique, les points ont :

- pour ordonnée : z_i
- pour abscisse : soit x_i (points P_x), soit y (points P_y) soit u_i (points P_u).

Quand l'axe Ou en bas se déplace dans le sens de la flèche de Ox à Oy, les points P_u en haut vont de P_x à P_y.

Il s'agit enfin d'essayer avec les différentes positions de Ou d'obtenir dans la partie supérieure du graphique un nuage de points Pu qui s'ajuste le mieux à une droite.

IV – PERSPECTIVES D'UTILISATION DU SYSTÈME GRAPHIQUE A ÉCHELLES PARALLÈLES

Nombreux sont les problèmes mettant en jeu les relations linéaires en statistique appliquée (plan de régression - programmes linéaires à plusieurs variables - surface polyédrique donnant l'approche d'une isoquante de production pour le cas de plusieurs facteurs de production, etc). Lorsqu'il y a plus de deux variables, il est difficile de chercher à représenter ces relations sur un graphique cartésien : ce seront des plans dans l'espace à 3 dimensions ou des hyperplans dans un espace à n dimensions, dont le repérage seul sur un graphique est déjà très malaisé.

L'utilisation des échelles logarithmiques, de plus, ramène nombre de relations exponentielles à des formes linéaires (régression à plusieurs variables dont on considère les logarithmes, fonction de production du type Cobb-Douglas, etc.). La représentation graphique de ces relations, si elle était réalisable, pourrait donc ouvrir des perspectives pratiques intéressantes L'on n'a pas exploré toutes les possibilités d'une telle représentation, ni réussi à concevoir des dispositifs pratiques pour la solution de ces problèmes. Il est certain que celle-ci ne peut être cherchée dans la seule représentation cartésienne, mais dans la combinaison des divers procédés de la nomographie.

On essaiera, dans ce qui suit, de voir dans quelle mesure le système graphique à échelles parallèles peut répondre à ces problèmes.

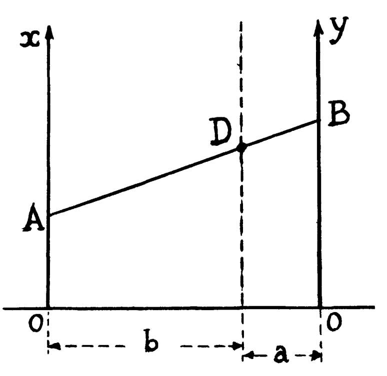


Figure IV-1

Une relation linéaire isolée à plusieurs variables peut toujours être représentée sur un graphique à échelles parallèles de la façon suivante :

1/ <u>Cas de 2 variables.</u>

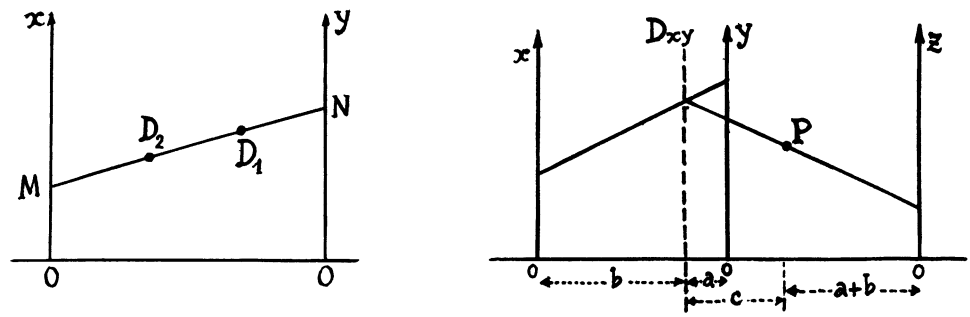
La droite $ax + by + c = O$ est, comme on l'a vu, représentée par le point D. On peut remarquer que D est le centre de gravité du segment AB, la pondération des points A et B étant a et b. Les points de la droite sont représentés par des segments, tels que AB, passant par D (figure 1).

L'intersection de 2 droites représentées par D_1 et D_2, est le point représenté par le segment MN passant par D_1 et D_2 (figure 2).

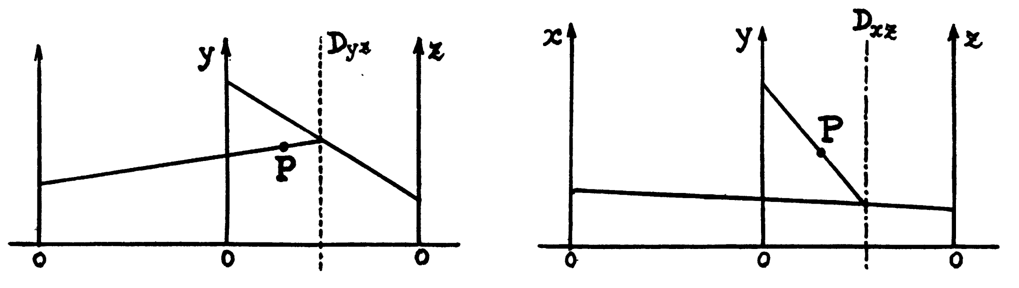
2/ Cas de 3 variables.

Le plan ax + by + cs + d = O peut être déterminé de plusieurs façons :

- par le point P et l'axe en pointillés D_{xy} (figure 3a).
- par le point P et l'axe en pointillés D_{yz} (figure 3b).
- par le point P et l'axe en pointillés D_{xz} (figure 3c).



Figures IV-2 et IV-3a



Figures IV-3b et IV-3c

Les droites D_{xy}, D_{yz}, D_{xz} sont des échelles binaires ; ce sont successivement des échelles condensées de Ox et Oy, Oy et Oz, Ox et Oz.

On peut remarquer que dans les 3 cas de condensation d'échelles 2 par 2, P reste fixe ; c'est le centre de gravité de tous les triangles représentant les points du plan (les sommets de ces triangles sur les 3 axes Ox, Oy et Oz étant pondérés par a, b et c). La condensation d'échelles 3 par 3 permet de la même façon avec un point fixe P de déterminer un plan dans un espace à 4 dimensions.

Une droite dans un espace à 3 dimensions peut être représentée par 2 points fixes D_{xy} et D_{yz} sur lesquels s'appuient 2 des côtés des triangles représentant les points de la droite (figure 4).

L'intersection de 2 plans P_1 et P_2 représentés par :

- point P_1 et échelle binaire D_{1xy} (figure 5)
- point P_2 et échelle binaire D_{2xy} (figure 5) peut être déterminée en considérant 2 points communs à ces plans :

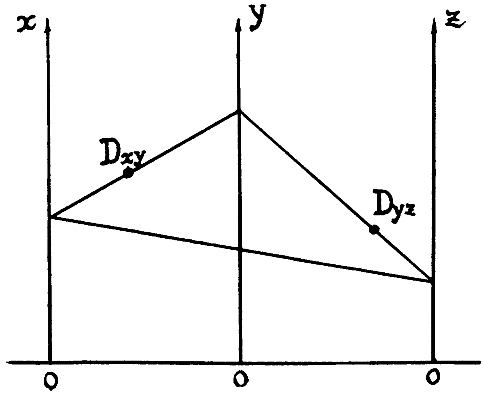


Figure IV-4

- point (z_1, y_1, x_1)
- et point (z_2, y_2, x_2)

x_{1y1} et $x_2\,y_2$ se coupent en $D_{12\;xy}$

x_{1z1} et $y_2\,z_2$ se coupent en $D_{12\;xz}$

Une droite peut donc être représentée dans un système à axes parallèles par 2 points fixes D_{xy} et D_{yz}, par exemple. L'intersection de 2 droites :

- $D_{1\;xy}$, $D_{1\;yz}$
- et $D_{2\;xy}$, $D_{2\;yz}$

est le point représenté par le triangle dont deux des côtés s'appuient successivement sur $D_{1\;xy}$, $D_{2\;xy}$ et sur $D_{2\;yz}$, $D_{1\;yz}$ (figure 6).

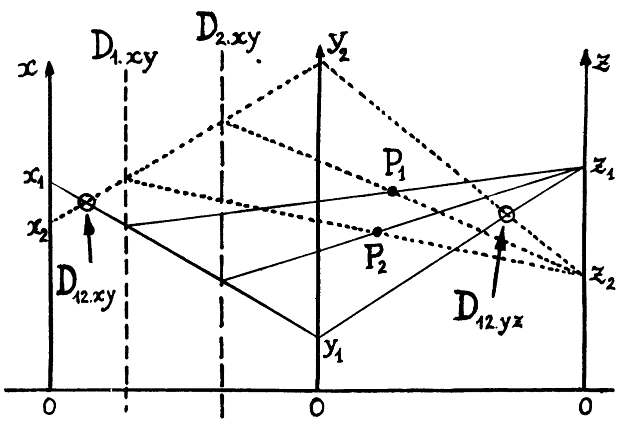


Figure IV-5

Ce mode de représentation permet de résoudre graphiquement par exemple un système de 3 équations comme celui-ci :

$$x + 2y + 3z = 11$$
$$2x + 3y + z = 14$$
$$3x + y + 2z = 11$$

Le solution est le point d'intersection des 3 plans correspondant aux trois équations.

Le plan P_1 d'équation $x + 2y + 3z = 11$ est représenté par le point P_1 et l'axe binaire $D_{1\;xy}$ (voir figure 7).

Le plan P_2 d'équation $2x + 2y + z = 14$ est représenté par le point P_2 et l'axe binaire $D_{2\;xy}$ (voir figure 7).

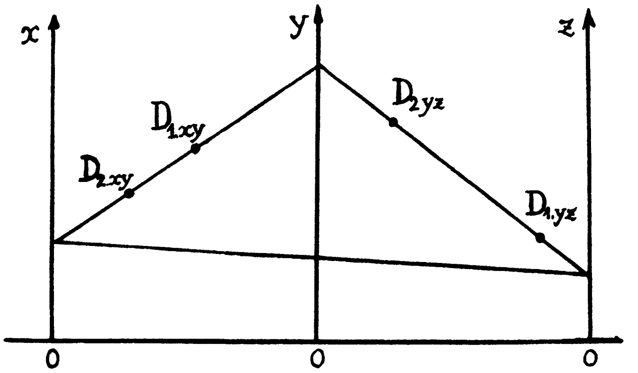


Figure IV-6

Le plan P_3 d'équation $3x + y + 2z = 11$ est représenté par le point P_3 et l'axe binaire $D_{3\ xy}$ (voir figure 7).

Intersection de P_1 et P_2 :

2 points communs $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ et $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ déterminent la droite d'intersection représentée par $D_{12\ xy}$ et $D_{12\ yz}$ (figure 8).

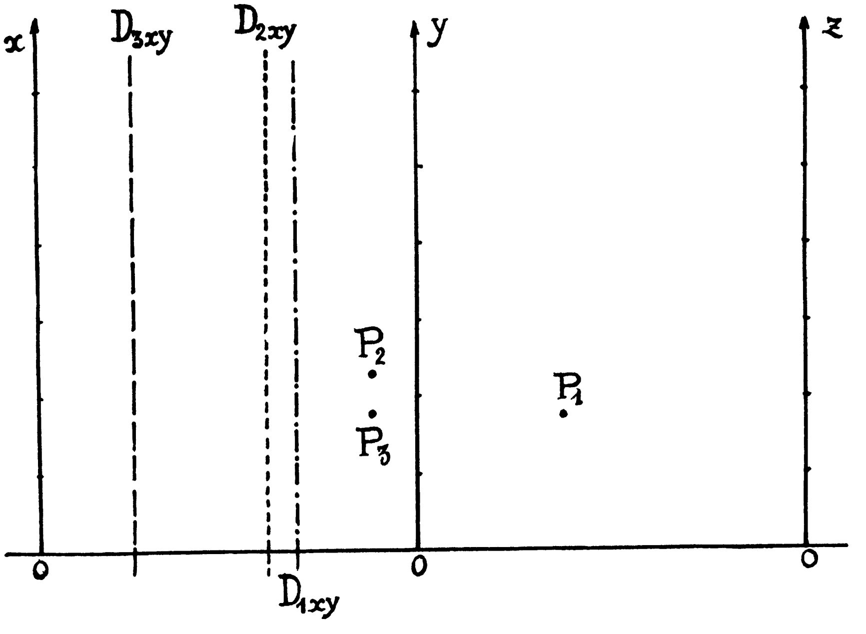


Figure IV-7

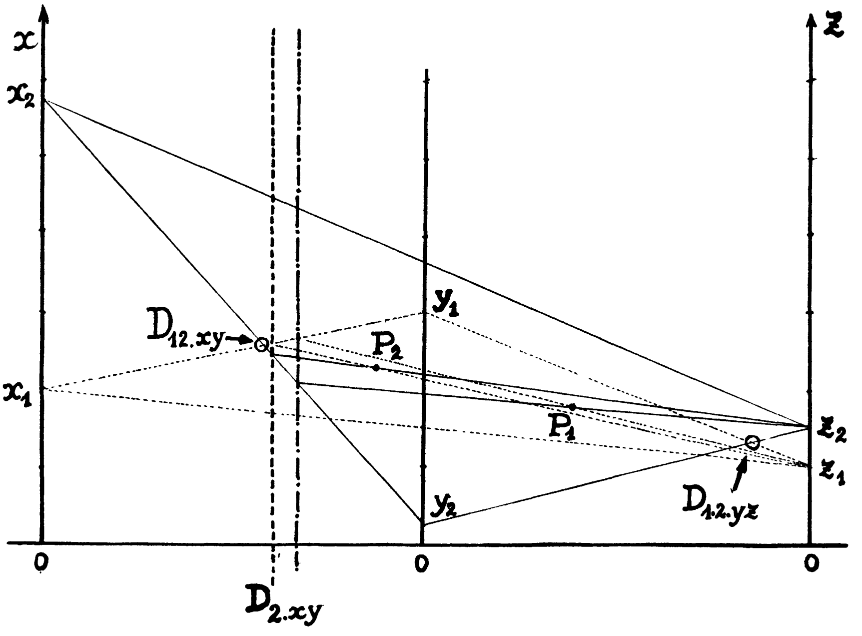


Figure IV-8

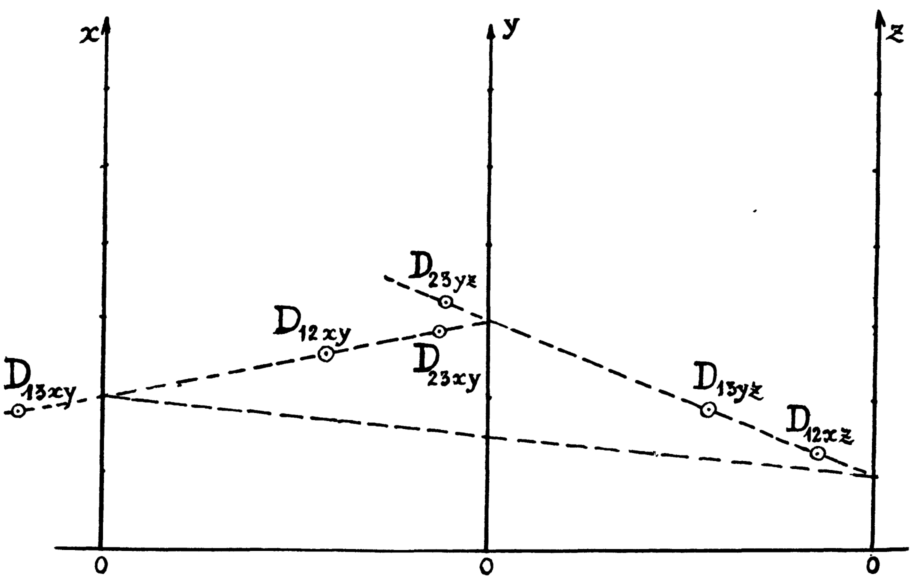


Figure IV-9

Intersection de P_2 et P_3 :

De la même façon, on obtient la droite d'intersection représentée par $D_{32\ xy}$ et $D_{32\ yz}$ (figure 9).

Intersection de P_1 et P_3 :

De la même façon, est obtenue la droite d'intersection représentée par $D_{13\ xy}$ et $D_{13\ yz}$ (figure 9).

Le point d'intersection des 3 plans est le point représenté par le triangle dont l'un des côtés passe par :

$$D_{12\ xy},\ D_{32\ xy} \text{ et } D_{13\ xy}$$

et l'autre par

$$D_{12\ yz},\ D_{32\ yz} \text{ et } D_{32\ yz} \qquad \text{(figure 9)}$$

Ses coordonnées sont :

$$x = 2$$
$$y = 3$$
$$z = 1$$

L'extension de ce mode de représentation aux cas de plus de 3 variables pourrait permettre de déterminer graphiquement les intersections des hyperplans et de situer ainsi les sommets de la surface polyédrique formée par ces hyperplans dans un espace à plus de 3 dimensions, ce qui, éventuellement, constituerait une aide appréciable à la recherche des solutions des problèmes linéaires à plusieurs variables.

A titre indicatif, on verra ci-après, comment peut être appliqué ce mode de représentation dans la résolution du système :

$$x_1 + x_2 + x_3 + 3\ x_4 + 3\ x_5 + 3\ x_6 \leqslant 85 \qquad (1)$$

$$2\ x_1 + 5\ x_5 \leqslant 70 \qquad (2)$$

$$2\ x_2 + 5\ x_5 \leqslant 10 \qquad (3)$$

$$3\ x_3 + 8\ x_6 \leqslant 90 \qquad (4)$$

$$40\ x_1 + 28\ x_2 + 32\ x_3 + 72\ x_4 + 64\ x_5 + 60\ x_6 = \text{maximum} \qquad (5)$$

$$x_i \geqslant 0$$

Les échelles des variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 étant des droites parallèles et équidistantes (figure 10), les contraintes (2), (3) et (4) sont représentées par des points D_{14}, D_{25} et D_{36} (les segments de droite s'appuyant sur les échelles x_1 et x_4, x_2 et x_5, x_3 et x_6, ne doivent pas passer au-dessus de ces points).

Associées à la condition $x_i \geqslant 0$, ces contraintes déterminent sur leurs échelles les limites de variation de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, et x_6.

La contrainte (1) sur ce système est représentée par 3 échelles binaires :

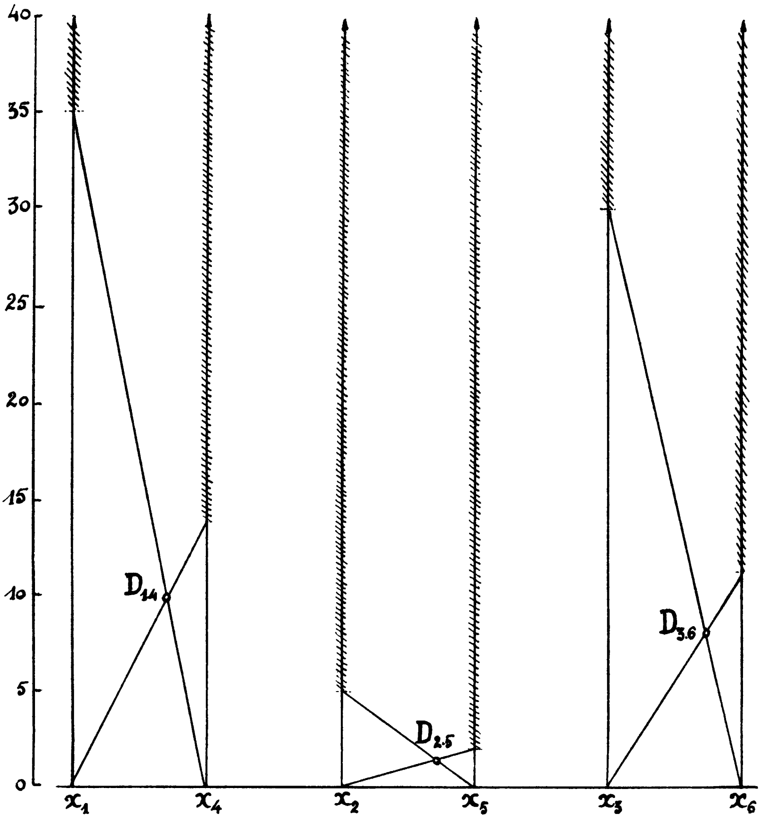


Figure IV-10

- E_{14} réalisant l'addition $x_1 + 3\ x_4$
- E_{25} " " $x_2 + 3\ x_5$
- E_{36} " " $x_3 + 3\ x_6$
- Une échelle condensée E_{1425} réalisant l'addition

$$x_1 + 3\ x_4 + x_2 + 3\ x_5$$

- et une échelle "total" E_T donnant la somme :

$$x_1 + x_2 + x_3 + 3\ x_4 + 3\ x_5 + 3\ x_6$$

Le point L sur cette échelle marque la limite au-dessus de laquelle la droite s'appuyant sur E_{1425} et sur E_{36} ne doit pas couper l'échelle E_T.

Un point de l'hyperplan $x_1 + x_2 + x_3 + 3\ x_4 + 3\ x_5 + 3\ x_6 = 85$ est déterminé par 2 segments :

- l'un s'appuyant sur les échelles binaires E_{14} et E_{25}

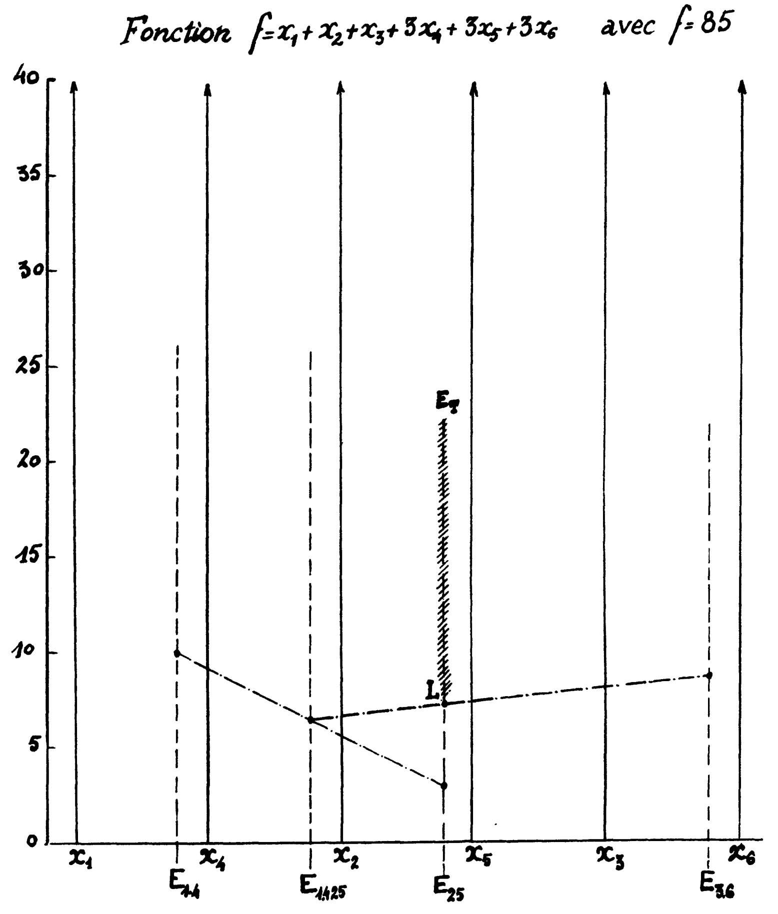


Figure IV-11

- l'autre s'appuyant sur l'échelle binaire E_{36} et passant par L et par le point d'intersection du premier segment avec l'axe E_{1425}.

Associée aux contraintes (2), (3) et (4), la contrainte (1) est déterminée par les limites de variation :

AB	sur	l'échelle	binaire	E_{14}	
CD	"	"	"	E_{25}	
FG	"	"	condensée	E_{1425}	
Hi	"	"	binaire	E_{36}	
LM	"	"	"total"	E_T	(voir figure ci-après 12)

Les 4 contraintes (1), (2), (3) et (4) signifient que les valeurs de x_1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et x_6 doivent être telles que les droites s'appuyant sur les échelles condensées ne sortent pas de ces limites.

Cette condition imposée à la fonction objectif :

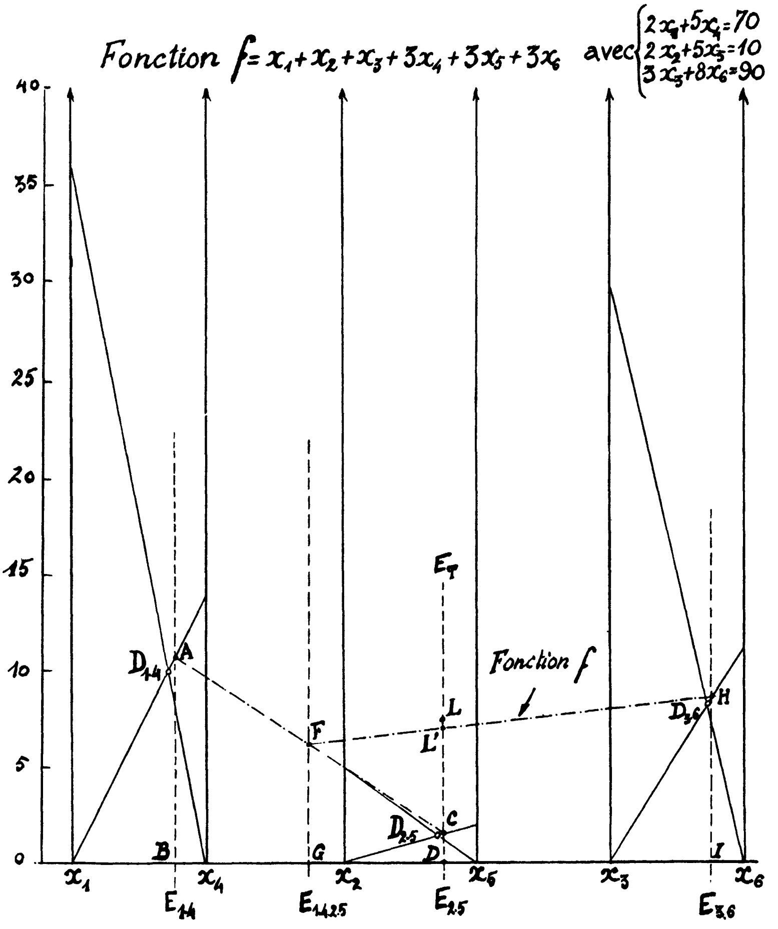


Figure IV-12

$$Z = 40\ x_1 + 28\ x_2 + 32\ x_3 + 72\ x_4 + 64\ x_5 + 60\ x_6$$

permet de déterminer le maximum de Z.

Cette fonction est de même représentée par 3 échelles binaires :

- E'_{14}, E'_{25} et E'_{36}
- une échelle condensée E'_{1425}
- et une échelle "total" E'_T (figure 13)

La maximisation de cette fonction consiste à faire couper par le segment s'appuyant sur E'_{36} et sur E'_{1425} l'échelle "total" E'_T au point le plus éloigné de l'origine (droite horizontale).

Les conditions imposées dans les contraintes (1), (2), (3), (4) de la même façon que précédemment déterminent sur les échelles E'_{14}, E'_{25}, E'_{36},

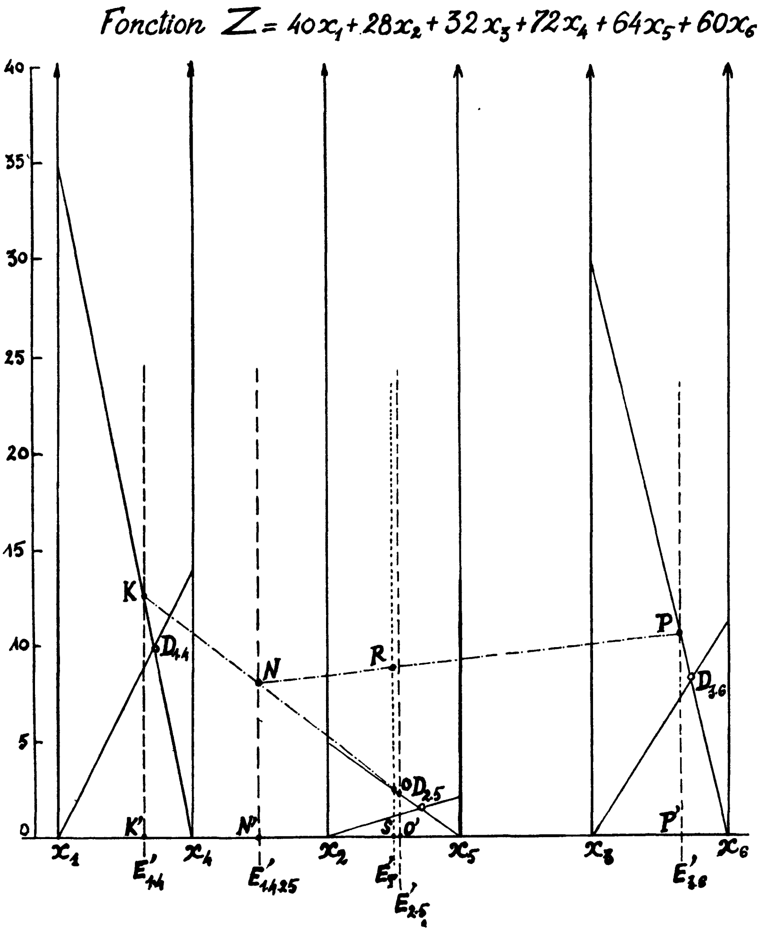


Figure IV-13

E'_{1425} les limites de variation (figure 13) KK', NN' et PP'. On voit immédiatement que la position KNOP correspond au maximum de Z ; SR sur l'échelle E_T détermine la valeur maximum de Z (par rapport aux échelles des variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 cette échelle est réduite de $\frac{1}{40+28+32+72+64+60} = \frac{1}{296}$.

Cette position détermine les valeurs :

$$x_1 = \frac{70}{2} = 35$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_5 = 0$$

$$x_3 = \frac{90}{3} = 30$$

$$x_6 = 0$$

formant la solution du système linéaire considéré (voir graphique 14).

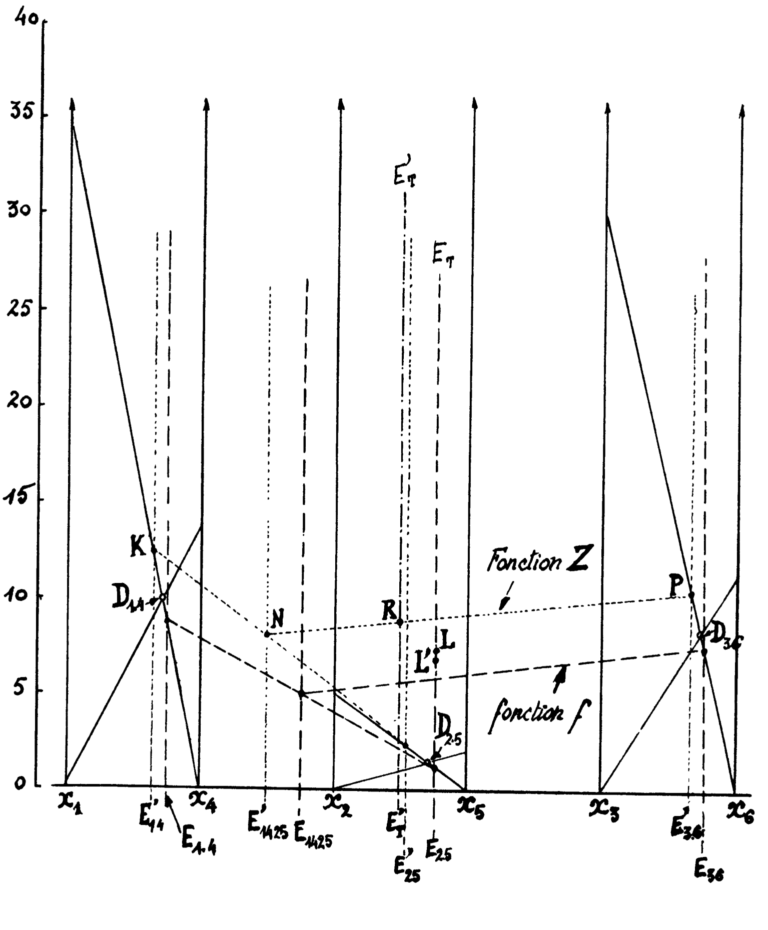


Figure IV-14