

JEAN MARGUIN

ANDRÉ MARGUINAUD

**Calcul exact de la disponibilité opérationnelle  
d'un système complexe**

*Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle*, tome 7, n° V1 (1973), p. 3-20

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1973\\_\\_7\\_1\\_3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1973__7_1_3_0)

© AFCET, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CALCUL EXACT DE LA DISPONIBILITE OPERATIONNELLE D'UN SYSTEME COMPLEXE (\*)

par Jean MARGUIN et André MARGUINAUD (1)

---

*Résumé. — Les méthodes analytiques habituelles de résolution des problèmes de disponibilité conduisent à des solutions pratiques approchées. La méthode exposée ici fournit des résultats rigoureux pour une classe restreinte de systèmes que l'on caractérise de façon précise.*

*Le système est décomposé en « modules » (jusqu'à plusieurs milliers) stochastiquement indépendants et de fiabilité connue. Chaque module peut occuper successivement plusieurs états conformément aux étapes de sa vie réelle. La dépendance statistique entre les modules ne provient que de l'organisation de la maintenance.*

*Cette approche permet un calcul rapide de la solution asymptotique rigoureuse des équations d'évolution des états du système. Le calcul tient compte de durées de vie et de réparation de type Erlang généralisé ainsi que de dépanneurs répartis en plusieurs spécialités.*

### 1. INTRODUCTION

#### 1.1. Rappel de définitions

On peut caractériser un système complexe par deux catégories de performances : les performances techniques et les performances opérationnelles. Ces dernières résultent des performances techniques mais tiennent compte en plus des conditions d'organisation du système. A ce titre, la disponibilité est une notion opérationnelle par opposition à la fiabilité qui est une notion technique.

Dans la suite, nous utiliserons les notions suivantes définies dans la référence [1] :

• *disponibilité instantanée* (« pointwise availability ») : c'est la probabilité pour que le système soit apte à remplir sa mission à un instant donné;

---

(\*) Cette étude a été faite pour le compte du Centre de Prospective et d'Evaluations, à Paris.

(1) Société d'Etudes et Conseils AERO.

• *disponibilité asymptotique* (« limiting interval availability ») : c'est la proportion de temps mesurée sur une durée très longue, pendant lequel le système est apte à remplir sa mission; c'est aussi la valeur moyenne sur l'intervalle de temps  $(0, \infty)$  de la disponibilité instantanée.

Les facteurs intervenant dans la disponibilité sont les suivants :

- fiabilité des composants du système;
- structure du système (redondance, divers modes de fonctionnement);
- politique de maintenance (maintenance corrective, maintenance préventive, politique de test);
- gestion des stocks de rechange.

## 1.2. Objet de l'exposé

Le calcul de la disponibilité d'un système est en général un problème complexe car, sous peine de n'être pas réaliste, on doit tenir compte de tous les facteurs mis en jeu. Cela explique pourquoi dans la plupart des cas on a recours aux méthodes de simulation ([2], [3], [4], [5], [6], [7]). Dans la pratique, elles conduisent souvent à des résultats peu sûrs et sont coûteuses en temps calcul. En outre, la résolution des problèmes d'optimisation exige des calculs itératifs nombreux. Pour s'affranchir de ces inconvénients, certains auteurs ([8] à [14]) ont recherché une solution analytique ou algorithmique du problème. Ces tentatives aboutissent en général à des solutions rigoureuses dans des cas simples. Pour les cas plus complexes, on doit faire des approximations. Au cours de cette étude nous avons suivi une démarche analogue. Nous avons généralisé la formalisation du problème et établi un algorithme de calcul rigoureux de la disponibilité asymptotique. Le domaine d'application de cet algorithme est assez général (cf. § 2.4 et 3.3). Les notations particulières adaptées au formalisme sont résumées par une liste.

## 2. FORMALISATION DU PROBLEME

Les étapes de la formalisation du problème sont les suivantes :

- décomposition du système en « modules » stochastiquement indépendants du point de vue de la fiabilité;
- définition d'une hiérarchie d'état du système;
- mise en équation compte tenu de l'organisation de la maintenance.

### 2.1. Décomposition du système en « modules »

Pour spécifier l'état du système on le décompose en sous-ensembles que l'on appelle « modules ». Le module est défini comme un sous-ensemble stochastiquement indépendant du point de vue des probabilités de défaillance

et dont on connaît bien la fiabilité et la maintenance (distribution de la durée entre pannes et de la durée de réparation, récurrence des tests, etc.). L'imprécision de cette définition permet d'adapter le niveau de décomposition du système à la sûreté plus ou moins grande des données de fiabilité dont on dispose. Ainsi, suivant le cas, un module peut être :

- un composant,
- un bloc fonctionnel,
- un ensemble fonctionnel,
- un équipement.

## 2.2. Définition d'une hiérarchie d'états du système

Chaque module passe, au cours de sa vie, par un certain nombre d'états, dits « états du module », reliés par des probabilités conditionnelles de transition.

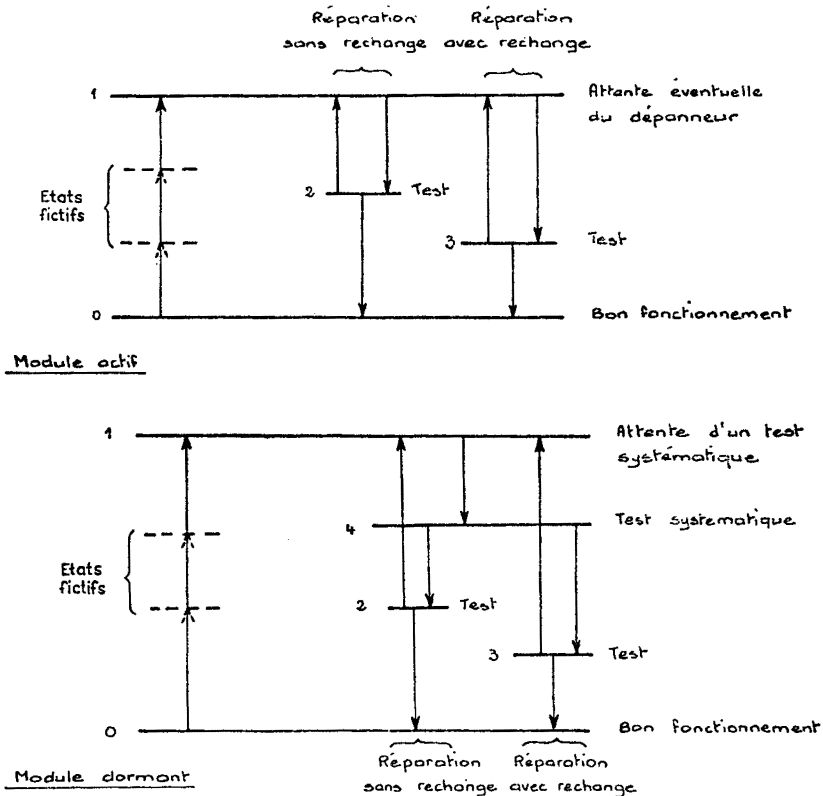


Figure 1

Exemples de diagrammes d'états des modules

Ces états peuvent représenter des états réels du module (état passif, état actif, état de panne, état de fonctionnement partiel, etc.) ou des états fictifs introduits pour la commodité des calculs. Chaque module est donc caractérisé par un graphe d'états (fig. 1) dont les probabilités de transition dépendent du temps. Les transitions entre états seront classées en transitions de dégradation et transitions de réparation.

Pour décrire, d'un point de vue technique, l'état dans lequel se trouve le système à un instant donné, on utilise les « états modulaires du système » (états microscopiques). Ces états sont constitués par la spécification des états des modules :

$$(1) \quad e = (e_1, e_2, \dots, e_M).$$

Le nombre d'états modulaires réalisables est borné supérieurement par :

$$(2) \quad N = \prod_{i=1}^M \bar{e}_i.$$

La description du système du point de vue opérationnel est faite par les « états opérationnels » (états macroscopiques). Ces états regroupent en général plusieurs états modulaires. C'est à ce niveau qu'intervient la structure plus ou moins redondante du système et les divers modes de fonctionnement possibles.

Les états opérationnels sont les seuls qui intéressent l'utilisateur du système. La disponibilité  $A(E)$  de l'état opérationnel de fonctionnement  $E$  peut être définie comme la probabilité pour que le système occupe l'état  $E$  à un instant donné. C'est donc la somme des probabilités des états modulaires correspondants :

$$(3) \quad A(E) = \sum_{e \in E} P(e).$$

Le calcul de la disponibilité se ramène donc toujours au calcul des probabilités des « états modulaires ».

### 2.3. Mise en équation

La méthode consiste à exprimer la probabilité de l'état modulaire  $e$  à l'instant  $t + \Delta t$  en fonction des probabilités de tous les états possibles à l'instant  $t$  et des probabilités de transition entre états mises sous la forme  $\mathcal{F}(e \rightarrow e')\Delta t$ . Quand on fait tendre  $\Delta t$  vers 0, on obtient l'équation d'évolution dite de Chapman-Kolmogorov :

$$(4) \quad \frac{dP(e)}{dt} = -P(e) \sum_{e'} \mathcal{F}(e \rightarrow e') + \sum_{e'} P(e') \mathcal{F}(e' \rightarrow e).$$

Les états  $e'$  intervenant au second membre sont des états tels que l'on puisse passer de  $e$  à  $e'$  ou de  $e'$  à  $e$  par des probabilités de transition du premier ordre en  $dt$ . Les états  $e$  et  $e'$  ne peuvent donc différer que par les états d'un seul module à la fois, ce que l'on peut exprimer en posant que la distance de  $e$  à  $e'$  est égale à 1 :

$$(5) \quad \mathcal{D}(e, e') = 1.$$

L'équation d'évolution (4) peut donc s'écrire sous la forme détaillée (6) équivalente à la forme vectorielle (7) :

$$(6) \quad \frac{dP(e)}{dt} = -P(e) \sum_{k=1}^M \sum_{e'_k} \mathcal{F}(e, e_k \rightarrow e'_k) + \sum_{k=1}^M \sum_{e'_k} P(e', e'_k/e_k) P(e', e'_k \rightarrow e_k)$$

$$(7) \quad \frac{d\vec{P}(e)}{dt} = [Q]\vec{P}(e)$$

$[Q]$  est une matrice d'intensité de transition dépendant du temps dont le terme général est donné par :

$$(8) \quad q(e, e') = \mathcal{F}(e', e'_k \rightarrow e_k) - (e'_k = e_k) \sum_{e''_k} \mathcal{F}(e', e'_k \rightarrow e''_k).$$

L'expression  $(e'_k = e_k)$  vaut 1 si  $e'_k = e_k$  et 0 si  $e'_k \neq e_k$ .

La matrice  $[Q]$  est toujours singulière car la somme des termes d'une même colonne est identiquement nulle.

A l'équation d'évolution (6), il faut ajouter l'équation de normalisation (9) dans laquelle la sommation est effectuée sur *tous* les états modulaires :

$$(9) \quad \sum_e P(e) = 1.$$

#### 2.4. Expression détaillée de la probabilité de transition entre deux états modulaires voisins (distants de 1)

On suppose que le taux de transition entre deux états voisins  $e$  et  $e'$  est décomposé sous la forme :

$$(10) \quad \mathcal{F}(e, e_k \rightarrow e'_k) = \beta(e, k) \mathcal{F}_0(e_k \rightarrow e'_k)$$

$\mathcal{F}_0(e_k \rightarrow e'_k)$  représente le taux de transition de l'état  $e_k$  à l'état  $e'_k$  pour le module n°  $k$  *supposé isolé*, et  $\beta(e, k)$ , la probabilité conditionnelle pour que le module puisse effectuer cette transition compte tenu de la maintenance.

Le facteur  $\beta(e, k)$  est égal à 1 pour les transitions qui ne dépendent que du module  $k$  et non de l'état global du système (transitions de dégradation en

général). Il peut être inférieur à 1 dans le cas des transitions de réparation : dans ce cas  $\beta(e, k)$  représente, par exemple, la probabilité pour qu'à l'instant considéré le stock de rechange ne soit pas épuisé (probabilité de non rupture de stock) ou qu'un dépanneur soit disponible.

On est ainsi amené à distinguer deux types de transition :

- type  $\lambda$  (transition de dégradation) : pour ce type de transition, on pose  $(e_k \rightarrow e'_k) = 0$
- type  $\mu$  (transition de réparation faisant appel à la maintenance) : on pose  $(e_k \rightarrow e'_k) = 1$ .

### EXEMPLES

a) Supposons que la transition de réparation  $e_k \rightarrow e'_k$  du module  $k$  fasse appel à un stock de taille  $L$  (à l'instant  $t = 0$ ); supposons, de plus, que le taux de panne  $\lambda_k$  du module soit constant; au temps  $t$ , on a :

$$(11) \quad \beta(e, k) = 1 - \frac{(\lambda_k t)^L}{L!} e^{-\lambda_k t}.$$

b) Supposons que l'on dispose de  $D$  dépanneurs et que dans l'état  $e$  on ait  $A$  modules en attente de dépannage ou en cours de dépannage. Si la politique d'affectation des dépanneurs ne comporte pas de priorité, toutes les configurations de queues sont équiprobables :

$$(12) \quad \begin{aligned} \beta(e, k) &= \beta(A, D) \\ &= \left( \frac{D}{A} \right)^{(A > D)} \end{aligned}$$

## 3. RECHERCHE DE LA SOLUTION DES EQUATIONS D'EVOLUTION. SOLUTION ASYMPTOTIQUE

### 3.1. Réduction au cas d'un processus de Markov homogène

Dans la plupart des cas pratiques, le système différentiel (7) est de dimension trop grande pour être résolu analytiquement ou numériquement.

Une première simplification consiste à le ramener à un système à coefficients constants (processus de Markov homogène). Pour cela, on s'arrange pour que les taux de transition entre états des modules soient constants (transitions de type exponentiel). On est ainsi conduit à créer des états fictifs supplémentaires. Cox [15] et Morse [16] ont montré que, par cette méthode, on peut « simuler »

la plupart des lois de panne et de réparation courantes. Les lois obtenues, dites « lois d'Erlang généralisées » résultent de combinaisons série, parallèle ou série-parallèle de variables exponentielles. Pour illustrer cette méthode, donnons deux exemples :

• *Combinaisons en série* de  $a$  transitions exponentielles de paramètres  $p_i$ ; la loi résultante est de la forme :

$$(13) \quad f(t) = \sum_{i=1}^a K_i \rho_i e^{-\rho_i t} \quad \text{avec} \quad K_i = \prod_{j \neq i} \frac{\rho_j}{\rho_j - \rho_i}.$$

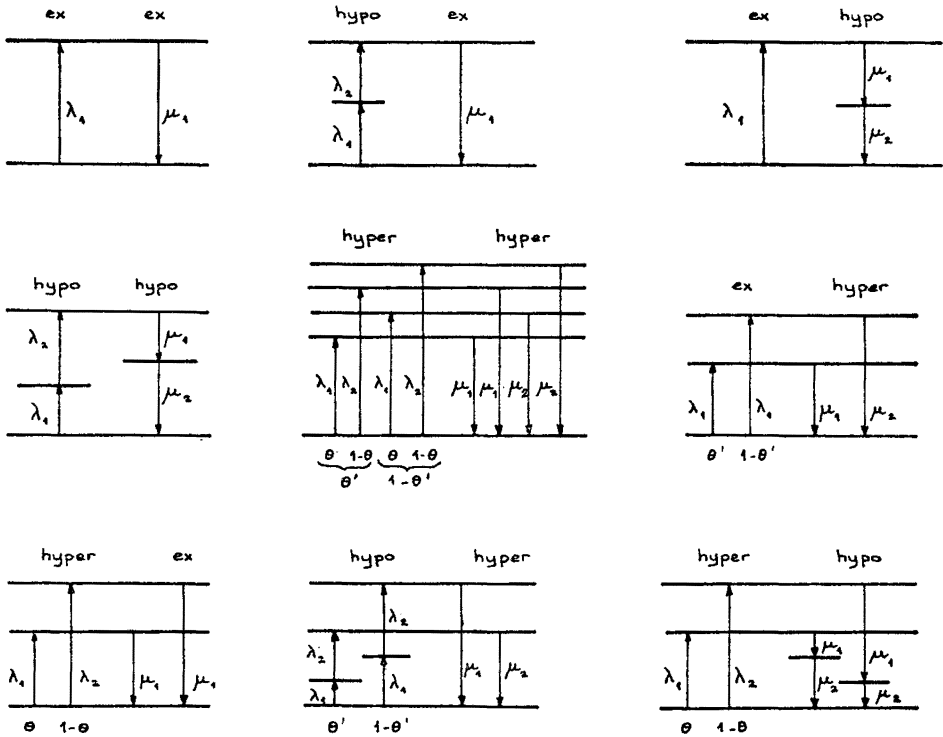


Figure 2

Exemples de décomposition en variables exponentielles

Abréviations : ex = variable aléatoire exponentielle ( $\frac{\sigma}{m} = 1$ ),

hypo = variable aléatoire hypoexponentielle ( $\frac{\sigma}{m} < 1$ ),

hyper = variable aléatoire hyperexponentielle ( $\frac{\sigma}{m} > 1$ ).



Ces lois dites « lois hypoexponentielles » correspondent à des rapports écart-type/moyenne compris entre  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  et 1.

• *Combinaisons en parallèle* de deux transitions exponentielles : si  $\theta$  est la probabilité de la première transition et  $(1 - \theta)$  celle de la deuxième, la loi résultante est :

$$(14) \quad f(t) = \theta \rho_1 e^{-\rho_1 t} + (1 - \theta) \rho_2 e^{-\rho_2 t}.$$

Les lois de ce type dites « hyperexponentielles » correspondent à des rapports écart-type/moyenne supérieurs à 1.

A partir de ce genre de décomposition, des règles systématiques permettent de construire les graphes d'états correspondants. Il n'y a pas lieu d'insister ici sur ces méthodes. Nous nous limiterons à donner quelques cas de décompositions simples (cf. fig. 2). Dans la pratique donc, la réduction au cas Markovien homogène restreint peu le domaine d'application de la méthode.

### 3.2. Remarques sur la solution des équations d'évolution (cas Markovien homogène)

Dans le cas Markovien homogène, la solution générale du système (7) existe toujours et peut s'écrire formellement de la façon suivante :

$$(15) \quad \vec{P}(e) = [\exp([Q]t)] \vec{P}_0(e)$$

où  $\vec{P}_0(e)$  est le vecteur des conditions initiales.

Cette équation est d'utilité pratique limitée car le calcul de  $\exp([Q]t)$  devient impraticable dès que le nombre d'états est supérieur à quelques dizaines, malgré l'emploi de méthodes spéciales ([17], [18], [19]).

Le théorème de Frazer, Duncan et Collar [20] permet d'exprimer la solution en fonction des valeurs propres  $\gamma_i$  de la matrice  $[Q]$  :

$$(16) \quad \vec{P}(e) = \left( \sum_i [K_i] e^{\gamma_i t} \right) \vec{P}_0(e).$$

Dans le cas où les valeurs propres  $\gamma_i$  sont distinctes, on a :

$$(17) \quad [K_i] = \prod_{j \neq i} \frac{\gamma_j [I] - [Q]}{\gamma_j - \gamma_i}.$$

L'équation (16), bien que se prêtant mal, en général, au calcul numérique, peut fournir une borne inférieure des variations de la solution. En effet, si l'on

applique le théorème de Gershgorin ([21], [22]) aux colonnes de la matrice  $[Q]$ , on obtient l'inégalité suivante :

$$(18) \quad |\gamma_i + R| \leq R \quad \forall i$$

$$\text{avec :} \quad R = \max_e \left[ \sum_k \sum_{e'_k} \beta(e, k) \mathcal{F}_0(e_k \rightarrow e'_k) \right].$$

L'inégalité (18) montre que toutes les valeurs propres de  $[Q]$  sont contenues dans le cercle du plan complexe centré en  $(-R, 0)$  et de rayon  $R$ . On en déduit qu'aucune valeur propre n'est imaginaire pure et donc que le régime asymptotique est en même temps stationnaire.

Par ailleurs il est facile de montrer que  $[Q]$  possède toujours au moins une valeur propre nulle, ce qui démontre l'existence d'une solution asymptotique non nulle. Cette solution stationnaire est donnée par :

$$(19) \quad [Q]\vec{P}(e) = 0 \quad \text{avec} \quad \sum_e P(e) = 1.$$

### 3.3. Recherche d'une solution factorisée, solution asymptotique

Dans le cas où les modules sont stochastiquement indépendants (nombre infini de dépanneurs et pas de stocks communs), la probabilité de l'état modulaire  $e$  est égale au produit des probabilités d'état de chacun des modules :

$$(20) \quad P(e) = \prod_{k=1}^M p_k(e_k)$$

où les  $p_k(e_k)$  sont solutions des  $M$  systèmes linéaires suivants :

$$(21 a) \quad \frac{dp_k(e_k)}{dt} = -p_k(e_k) \sum_{e'_k} \mathcal{F}_0(e_k \rightarrow e'_k) + \sum_{e'_k} p_k(e'_k) \mathcal{F}_0(e'_k \rightarrow e_k)$$

avec

$$(21 b) \quad \sum_{e_k} p_k(e_k) = 1.$$

Dans le cas où les modules sont soumis à une maintenance commune, on se propose par analogie avec le cas précédent, de rechercher une solution factorisée de la forme :

$$(22) \quad P(e) = K_0 g(e) \prod_{k=1}^M p_k(e_k)$$

où  $K_0$  est un facteur de normalisation et  $g(e)$  un facteur dépendant de l'état considéré et de la maintenance (nombre de dépanneurs, par exemple).

En reportant (22) et (10) dans (6) on obtient, après simplification, une condition suffisante de factorisation sous la forme de la double égalité suivante :

$$\begin{aligned}
 (23) \quad g(e) &= g(e) \frac{\sum_{e_k''} \beta(e, k)^{e_k \rightarrow e_k''} \mathcal{F}_0(e_k \rightarrow e_k'')}{\sum_{e_k''} \mathcal{F}_0(e_k \rightarrow e_k'')} \\
 &= g(e', e_k'/e_k) \beta(e', e_k'/e_k)^{(e_k' \rightarrow e_k)} \quad \forall e, e'.
 \end{aligned}$$

La première égalité implique que tous les  $\beta$  soient égaux à 1. La condition suffisante (23) ne permet donc pas d'affirmer qu'il existe une solution factorisée du type (22) dépendant du temps. Nous limiterons donc notre recherche à la *solution asymptotique* pour laquelle les dérivées par rapport au temps sont nulles. Dans ce cas, la condition suffisante de factorisation est réduite à la deuxième égalité (23).

Pour la suite on suppose que  $\beta(e, k)$  ne dépend que du nombre  $A$  de modules en attente ou en cours de dépannage et du nombre  $D$  de dépanneurs (cf. exemple  $b$  du § 2.4). On utilise la notation  $\beta(A, D)$ .

Dans ces conditions, la deuxième égalité (23) ne peut prendre que l'une des trois formes suivantes :

- (24 a)  $g(A, D) = g(A', D) \beta(A', D)$  avec  $A' = A + 1$
- (24 b)  $g(A, D) = g(A', D)$  avec  $A' = A$
- (24 c)  $g(A, D) \beta(A, D) = g(A', D)$  avec  $A' = A - 1$ .

Ces conditions sont remplies si l'on a :

- ou :  $(e_k' \rightarrow e_k) = 1$  et  $(e_k \rightarrow e_k'') = 0 \quad \forall e_k''$
- ou :  $(e_k' \rightarrow e_k) = 0$  et  $(e_k \rightarrow e_k'') = 0 \quad \forall e_k''$
- ou :  $(e_k' \rightarrow e_k) = 0$  et  $(e_k \rightarrow e_k'') = 1 \quad \forall e_k''$

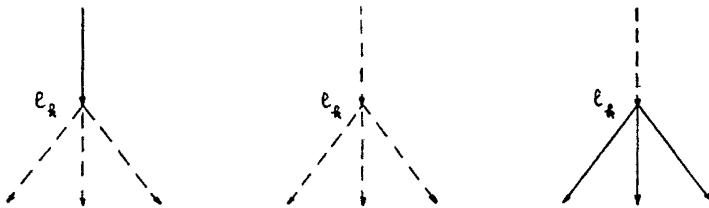


Figure 3

**Configurations nodales entraînant la factorisation de la solution asymptotique**

Flèche pleine : Transition nécessitant l'appel aux dépanneurs (type  $\mu$ ).

Flèche en pointillés : Transition ne nécessitant pas l'appel aux dépanneurs (type  $\lambda$ ).

Si on représente en traits pleins les transitions de type  $\mu$  et en pointillés les transitions de type  $\lambda$ , les conditions ci-dessus conduisent aux trois configurations nodales représentées sur la figure 3.

Ces conditions suffisantes de factorisation de la solution asymptotique sont équivalentes aux suivantes :

- deux transitions de type  $\mu$  (faisant appel aux dépanneurs) ne peuvent être placées en série;
- les transitions partant d'un état quelconque sont toutes du même type.

Pratiquement, cela veut dire que si l'on utilise une loi de réparation de type hypoexponentielle, on n'est pas sûr de pouvoir factoriser la solution. En revanche, des lois de panne quelconques (de type Erlang généralisé) et des lois de réparation hyperexponentielles permettent la factorisation.

Les formules (24) conduisent à l'expression de  $g(A, D)$  :

$$(25) \quad \begin{aligned} g(A, D) &= \prod_{i=0}^A \frac{1}{\beta(i, D)} \\ &= \prod_{i=0}^A \left( \frac{i}{D} \right)^{(i > D)} \quad (\text{cf. exemple } b, \text{ § 2.4}). \end{aligned}$$

La solution factorisée s'écrit, en définitive :

$$(26) \quad P(e) = \frac{1}{\Delta} g(A, D) \prod_{k=1}^M p_k(e_k)$$

avec :

$$(27) \quad \Delta = \sum_{e'} \left[ g(A', D) \prod_{i=1}^M p_k(e'_k) \right].$$

Dans ces formules, les  $p_k$  sont les solutions des  $M$  systèmes suivants :

$$(28) \quad \begin{cases} -p_k(e_k) \sum_{e'_k} \mathcal{P}_0(e_k \rightarrow e'_k) + \sum_{e'_k} p_k(e'_k) \mathcal{P}_0(e'_k \rightarrow e_k) = 0 \\ \sum_{e_k} p_k(e_k) = 1. \end{cases}$$

La solution asymptotique donnant la distribution de probabilités des états modulaires peut donc, avec les réserves exposées plus haut, s'exprimer à partir des solutions des systèmes (28) qui sont en général de dimensions faibles donc solubles rigoureusement. La difficulté est reportée sur le calcul du facteur de normalisation  $\Delta$  car dans l'expression (27) la sommation porte sur *tous* les états modulaires. Le paragraphe suivant est consacré à l'exposé d'un algorithme rapide permettant d'effectuer ce calcul.

Notons enfin que dans le cas où les dépanneurs sont répartis en plusieurs spécialités, la formule (26) reste applicable aux modules affectés à une même spécialité à condition que ces spécialités soient *disjointes*, c'est-à-dire que chaque module soit affecté à une seule spécialité. La disponibilité de l'état  $e$  est alors donnée par les produits des termes  $P(e)$  relatifs à chaque spécialité. Cela résulte de l'indépendance stochastique des modules affectés à des spécialités distinctes.

#### 4. ALGORITHME RAPIDE POUR LE CALCUL DE LA SOLUTION ASYMPTOTIQUE

Le nombre de termes intervenant dans la formule (27) est donné par la borne (2). Si, par exemple, on considère un système composé de 20 modules comportant chacun 10 états, on a  $10^{20}$  termes à calculer. Il n'est donc pas question de faire un calcul direct.

##### 4.1. Remarques sur la structure de l'expression (27)

###### 4.1.1.

$\Delta$  est une somme pondérée de termes du développement de l'expression suivante, qui représente la probabilité d'un événement certain :

$$(29) \quad \prod_{k=1}^M \left( \sum_{e_k} p_k(e_k) \right).$$

###### 4.1.2.

Les facteurs de pondération  $g(A, D)$  ne dépendent que du nombre de modules en attente de dépannage  $A$ . Cette remarque permet d'écrire :

$$(30) \quad \Delta = \sum_{A=0}^M F(A, D)$$

avec :

$$(31) \quad F(A, D) = g(A, D) \sum_{e(A)} \left( \prod_{k=1}^M p_k(e_k) \right)$$

en notant par  $e(A)$  les états modulaires à  $A$  modules en attente.

##### 4.2. Dérivation de la structure permettant un calcul rapide

Dans l'ensemble des états d'un module donné, on désigne par  $\{a\}$  l'ensemble des états qui n'exigent pas l'appel ou la présence d'un dépanneur.

Posons :

$$(32) \quad B_0(k) = \sum_{e_k \in \{a\}} p_k(e_k) \quad \text{et} \quad C(k) = \frac{1 - B_0(k)}{B_0(k)}.$$

L'expression (29) devient donc :

$$(33) \quad \prod_{k=1}^M B_0(k)[1 + C(k)] = \left[ \prod_{k=1}^M B_0(k) \right] \times \left[ \prod_{k=1}^M (1 + C(k)) \right].$$

Dans l'expression de  $\Delta$ , le terme pondéré par  $g(A, D)$  s'obtient donc en sommant tous les termes du développement de (33) qui contiennent  $A$  termes  $C(\cdot)$  :

$$C(k_1)C(k_2) \dots C(k_A)$$

avec :

$$0 < k_1 < k_2 < \dots < k_A \leq M.$$

En utilisant la distributivité du produit par rapport à l'addition, l'expression de  $F(A, D)$  devient :

$$(34) \quad F(A, D) = g(A, D) \left[ \prod_{k=1}^M B_0(k) \right] \sum_{k_1=1}^{M-A+1} C(k_1) \left[ \sum_{k_2 > k_1}^{M-A+2} C(k_2) \left[ \dots \left[ \sum_{k_A > k_{A-1}}^M C(k_A) \right] \dots \right] \right]$$

### 4.3. Réduction du nombre des calculs

Pour poursuivre le calcul, il est commode de poser par définition :

$$(35) \quad \begin{aligned} [0, k_A] &= 1 \\ [1, k_{A-1}] &= \sum_{k_A > k_{A-1}}^M C(k_A)[0, k_A] \\ &\vdots \\ [i, k_{A-i}] &= \sum_{k_{A-i+1} > k_{A-i}}^{M-i+1} C(k_{A-i+1})[i-1, k_{A-i+1}] \\ &\vdots \\ [A, 0] &= \sum_{k_1 > 0}^{M-A+1} C(k_1)[A-1, k_1]. \end{aligned}$$

Avec ces notations, on voit que l'on a :

$$(36) \quad \Delta = \left[ \prod_{k=1}^M B_0(k) \right] \sum_{A=0}^M g(A, D)[A, 0].$$

Pour calculer les termes  $[A, 0]$ , on établit une récurrence sur les crochets (35).

L'équation générique de (35) peut encore s'écrire :

$$(37) \quad [i, j] = \sum_{k > j}^{M-i+1} C(k)[i-1, k].$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
 [i, j - 1] &= \sum_{k > j - 1}^{M - i + 1} C(k)[i - 1, k] \\
 &= \sum_{k > j}^{M - i + 1} C(k)[i - 1, k] + C(j)[i - 1, j].
 \end{aligned}$$

On a donc la récurrence suivante :

$$(38) \quad [i, j - 1] = [i, j] + C(j)[i - 1, j].$$

Les formules (35) montrent que les intervalles de variation de  $i$  et de  $j$  sont respectivement  $(0, M)$  et  $(0, M - i)$ .

Le tableau des crochets  $[i, j]$  se présente donc sous la forme d'un triangle (cf. fig. 4).

$i \backslash j$	0	1	2	-----	M-2	M-1	M
0	[0,0]	[0,1]	[0,2]		[0, M-2]	[0, M-1]	[0, M]
1	[1,0]	[1,1]	[1,2]		[1, M-2]	[1, M-1]	[1, M]
2	[2,0]	[2,1]	[2,2]		[2, M-2]	[2, M-1]	
3	[3,0]	[3,1]	[3,2]		[3, M-2]		
⋮							
M-1	[M-1,0]	[M-1,1]	[M-1,2]				
M	[M,0]	[M,1]					

Figure 4

Tableau des crochets  $[i, j]$

Les termes d'initialisation sont hachurés.

Les flèches indiquent le sens de la progression du calcul.

A la fin du calcul, on obtient les termes de la colonne encadrée.

La formule (38) permet de remplir le tableau de proche en proche à partir des termes d'initialisation  $[0, j]$  et  $[i, M - i + 1]$ .

D'après (35), on a :

$$(39) \quad [0, j] = 1$$

et :

$$(40) \quad [i, M - i] = C(M - i + 1)[i - 1, M - i + 1]$$

(38) et (40) impliquent :

$$(41) \quad [i, M - i + 1] = 0.$$

Les termes d'initialisation étant donnés par (39) et (41), la progression dans le tableau s'effectue en suivant les flèches jusqu'à ce que la première colonne soit remplie (termes  $[i, 0]$ ).

Par cet algorithme, on a donc réduit le nombre de calculs à environ  $\frac{M^2}{2}$ .

#### 4.4. Réduction de la dimension de la mémoire

Le nombre d'emplacements mémoire qui est aussi de l'ordre de  $\frac{M^2}{2}$  peut être notablement réduit si on remarque qu'en choisissant convenablement le sens de variation des indices  $i$  et  $j$ , le terme calculé peut être placé au même emplacement mémoire que l'un des termes composants.

Afin d'appeler le facteur  $C(j)$  une seule fois, on a avantage à fixer d'abord l'indice  $j$ .

Ainsi, pour  $j$  variant de  $M - 1$  à  $0$ , la récurrence (38) peut s'écrire,  $k$  variant de  $M - j$  à  $1$  :

$$(42) \quad [k] \leftarrow [k] + C(j + 1)[k - 1]$$

Cette formule exprime que le terme que l'on calcule à partir de  $[k]$  et  $[k - 1]$  doit être placé à l'adresse  $[k]$ .

Pour  $j$  fixé, les termes d'initialisation sont donnés par :

$$(43) \quad [k] = (k = 0).$$

Dans ces conditions, le vecteur de travail est un vecteur de dimension  $M + 1$ .

En notations algorithmiques inspirées de FORTRAN, le programme de calcul des crochets peut donc finalement s'écrire :

• initialisation :

$$\begin{aligned} & [0] \leftarrow 1 \\ & DO 1 k = 1, M \\ & 1 [k] \leftarrow 0 \end{aligned}$$



- calcul des crochets :

$$DO\ 2\ j = M - 1, 0$$

$$C = C(j + 1)$$

$$DO\ 2\ k = M - j, 1$$

$$2\ [k] \leftarrow [k] + C * [k - 1].$$

Le résultat du calcul est un vecteur  $([0], [1], \dots, [M])$  identique au vecteur  $([0, 0], [1, 0], \dots, [M, 0])$  donné par (38).

La formule (36) donnant le facteur de normalisation, devient :

$$(44) \quad \Delta = \left[ \prod_{k=1}^M B_0(k) \right] \sum_{i=0}^M g(i, D)[i].$$

#### 4.5. Utilisation d'une variante de la méthode de Horner

Dans le calcul de (44), on peut gagner en précision et en nombre de calculs en remarquant que, à partir de la formule (25) on peut économiser des multiplications en distribuant les facteurs  $\frac{1}{\beta}$  de la façon suivante :

$$(45) \quad \Delta = \left[ \prod_{k=1}^M B_0(k) \right] \left[ [0] + \frac{1}{\beta(1, D)} \left[ [1] + \frac{1}{\beta(2, D)} \left[ [2] + \dots \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{\beta(M-1, D)} \left[ [M-1] + \frac{1}{\beta(M, D)} [M] \right] \right] \right] \right].$$

Cet algorithme permet d'effectuer le calcul des facteurs  $g$  et la pondération des termes de  $\Delta$  en  $M$  multiplications.

## 5. CONCLUSION

L'approche analytique permet un calcul rigoureux et rapide de la disponibilité asymptotique d'un système complexe avec les restrictions suivantes :

- les densités de probabilité des intervalles entre pannes des modules sont des lois d'Erlang généralisées (notées  $EG$ );
- les durées d'intervention des dépanneurs suivent des lois d'Erlang généralisées de type hyperexponentiel (notées  $EG'$ );
- les réparations sont effectuées sans priorité par des dépanneurs répartis en spécialités disjointes (chaque module est affecté à une seule spécialité).

Les algorithmes exposés ont donné lieu à un programme d'application exploité sur ordinateur.

Ajoutons que la méthode résout un des aspects du problème de file d'attente décrit par  $\sum_i (EG)_i / \sum_k (EG')_k / n$  en notations de Kendall.

Il est probable qu'il existe d'autres algorithmes permettant un calcul rapide et exact des systèmes soumis à des contraintes différentes ou plus générales. Grâce à ces algorithmes, on pourrait s'affranchir des simulations stochastiques toujours coûteuses en temps de calcul et souvent peu précises.

### LISTE DES PRINCIPALES NOTATIONS

- $M$  : nombre de « modules » constituant le système.
- $e_k$  : état du module  $k$ .
- $e$  : état modulaire du système.
- $\bar{e}_k$  : nombre d'états de fonctionnement du module  $k$  (= cardinalité de  $e_k$ ).
- $N$  : nombre d'états modulaires.
- $P(e)$  : probabilité pour que le système soit dans l'état modulaire  $e$  à un instant précisé ou quelconque.
- $P(e \rightarrow e')$  : taux de transition du système de l'état modulaire  $e$  à l'état modulaire  $e'$ .
- $\mathcal{D}(e, e')$  : distance des états modulaires  $e$  et  $e'$  (= nombre de modules occupant des états différents dans  $e$  et  $e'$ ).
- $\mathcal{T}(e, e_k \rightarrow e'_k)$  : taux de transition du module  $k$  entre l'état  $e_k$  et l'état  $e'_k$  sachant que le système est dans l'état modulaire  $e$ .
- $[Q]$  : matrice d'intensité de transition entre états modulaires.
- (expression) : valeur logique de l'expression entre parenthèses (= 1 si l'expression est vraie; = 0 si elle est fausse).
- $\beta(e, k)$  : probabilité conditionnelle pour que le module  $k$  puisse effectuer la transition  $e_k \rightarrow e'_k$ .
- $\mathcal{T}_0(e_k \rightarrow e'_k)$  : taux de transition du module  $k$  de l'état  $e_k$  à l'état  $e'_k$ , le module étant *supposé isolé*.
- $A$  : nombre de modules en attente ou en cours de dépannage, le système étant dans l'état modulaire  $e$ .
- $D$  : nombre de dépanneurs appartenant à la spécialité considérée.
- $p_k(e_k)$  : probabilité pour que le module  $k$  *supposé isolé* occupe l'état  $e_k$  à un instant précisé ou quelconque.
- $e', e'_k/e_k$  : état modulaire  $e'$  déduit de l'état  $e$  par passage du module  $k$  de l'état  $e_k$  à l'état  $e'_k$ .

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] BARLOW R. E. et PROSCHAN F., *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley, 1965, 256 p.
- [2] SHOOMAN M. L., *Probabilistic Reliability : an Engineering Approach*, McGraw-Hill, 1968, 448 p.
- [3] GNEDENKO B. V., *Mathematical Methods of Reliability Theory*, Academic Press, 1969, 506 p.
- [4] MANN N. R., *Computer Aided Selection of Prior Distributions for generating Monte Carlo Confidence Bounds on System Reliability*, Naval Research Logistic Quarterly, mars 1970, vol. 17 (1), pp. 41-54.
- [5] DOYON L. R. et BERSSENBRUGGE M. W., *Solving Complex Reliability Models by Computer*, Raytheon Company, paper 17-1-17-13.
- [6] DOWNS W. R., *Predicting maintenance Time Distribution of a Complex System. A Monte Carlo Solution*, 10th Annual West Coast Reliability Symposium, Beverley Hills, California, 21 february 1969, pp. 37-47.
- [7] FARAGHER W. E. et WATSON H. S., *Availability Analysis. A Realistic Methodology*, Proceedings of Tenth National Symposium on Reliability and Quality Control, 1964, pp. 365-378.
- [8] GRACE K., *Approximate System Availability Models*, Proceedings 1969 Annual Symposium on Reliability, pp. 146-152.
- [9] GRACE K., *Repair Queuing Models for System Availability*, Proceedings 1970 Annual Symposium on Reliability, pp. 331-336.
- [10] Lee C.T.H. et DUSHMAN A., *New Results in Effectiveness Prediction for Markovian Systems*, Proceedings 1970 Annual Symposium on Reliability, pp. 410-419.
- [11] BUZACOTT J. A., *Markov Approach to Finding Failure Times of Repairable Systems*, IEEE Transactions on Reliability, vol. R-19, n° 4, novembre 1970, pp. 128-134.
- [12] FERDINAND A. E., *A statistical Mechanical Approach to Systems Analysis*, IBM Journal of R and D, vol. 14 (5), septembre 1970, pp. 539-547.
- [13] FERDINAND A. E., *A Statistical Mechanical Approach to Systems Analysis*, IBM Report TR-21-348, 10 novembre 1969, 61 p.
- [14] FERDINAND A. E., *An Analysis of the Machine Interference Model*, IBM Systems Journal, vol. 10 (2), 1971, pp. 129-142.
- [15] COX D. R., *Renewal Theory*, Methuen's Monographs, 1962, 142 p.
- [16] MORSE P. M., *Queues, Inventory and Maintenance*. John Wiley, 1958, 202 p.
- [17] MASTASCUSA E. J., *A Method for Calculating  $e^{AT}$  Based on the Cayley-Hamilton Theorem*, Proc. IEEE (Letters), vol. 57, juillet 1969, pp. 1328-1329.
- [18] LIOU M. L., *Evaluation of the Transition Matrix*. Proc. IEEE (Letters), vol. 55, février 1967, pp. 228-229.
- [19] VIDYASAGAR M., *A Novel Method of Evaluating  $e^{AT}$  in closed Form*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-15 (5), octobre 1970, pp. 600-601.
- [20] FRAZER R. A. et DUNCAN W. J., *Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations*, Cambridge University Press, 1960, p. 83.
- [21] VARGA R. S., *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall, 1963, pp. 16-22.
- [22] PARODI M., *La localisation des valeurs caractéristiques des matrices et ses applications*, Gauthier-Villars, 1959, 172 p.