QUELQUES PROBLÈMES DE PERTURBATION SINGULIÈRE

Laure Saint-Raymond

Quelques problèmes de perturbation singulière

Laure Saint-Raymond
Université Paris VI & Ecole Normale Supérieure
Département de Mathématiques et Applications
Laure.Saint-Raymond@ens.fr

5 novembre 2009

Un exemple en mécanique des fluides

▶ Description des océans à grande échelle

Si on considère l'océan comme un fluide

- homogène incompressible
- vérifiant la loi de pression hydrostatique
- et dont le mouvement est essentiellement horizontal

l'évolution de la hauteur d'eau h et de la vitesse v est donnée par les **équations de Saint-Venant avec force de Coriolis**

$$\partial_t h + \nabla \cdot (hu) = 0$$
$$\partial_t (hu) + \nabla \cdot (hu \otimes u) + \omega (hu)^\perp + \frac{1}{Fr^2} h \nabla h = \tau$$

où ω est la composante verticale de la rotation de la Terre.

Aux latitudes moyennes, on peut approcher ω par une constante.

▶ Un problème de perturbation singulière

En tenant compte des ordres de grandeur des différents paramètres physiques, on se ramène alors au **système adimensionné**

$$\partial_t \rho + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot u + \nabla \cdot (\rho u) = 0$$
$$\partial_t u + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho + \frac{1}{\varepsilon} u^\perp + (u \cdot \nabla) u = \tau$$

où ε est très petit.

Le but de l'étude mathématique est de déterminer le **comportement asymptotique** de ce système, i.e. une bonne approximation dans la limite $\varepsilon \to 0$. Plus généralement, on s'intéresse à des systèmes du type

$$\partial_t V + \frac{1}{\varepsilon} LV + Q(V, V) = 0$$

où L est un opérateur linéaire antisymétrique à coefficients constants.

▶ Etude heuristique
On s'attend à ce que

- la dynamique soit imposée par la pénalisation (oscillations) ;
- le mouvement moyen $\bar{V}$ soit contraint ($L\bar{V} = 0$) ;
- le terme non linéaire introduise des couplages entre les différents modes d'oscillation.

En physique, le mouvement est décomposé en **superposition d'ondes** dont on détermine les **équations d'enveloppe**.

Remarque : *si la structure de la pénalisation n'est pas compatible avec les conditions aux bords, il apparaît des* **phénomènes de couche limite**

- *chaque onde est modifiée par un correcteur localisé au voisinage du bord*
- *ces correcteurs peuvent être instables (croissance exponentielle en temps)*
- *les effets de bords peuvent alors donner lieu à des comportements turbulents*

Mouvement moyen et méthode de compacité faible

Si on s'intéresse uniquement au mouvement moyen, le bon outil mathématique est la **convergence faible** : la partie oscillante converge faiblement vers 0.

▶ Stratégie
Pour obtenir le comportement asymptotique, il suffit alors

- d'établir des bornes uniformes qui donnent la **compacité faible**

$$\|V_\varepsilon\|_{L^2} \leq C_0$$

- de dériver l'**équation de contrainte** sur la limite faible $\bar{V}$

$$L\bar{V} = 0$$

- de passer à la limite dans l'**équation dynamique**

$$\partial_t \bar{V} = ?$$

La difficulté est d'obtenir la limite du terme non linéaire. En général

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Q(V_\varepsilon, V_\varepsilon) \neq Q(\bar{V}, \bar{V}).$$

▶ Compacité par compensation

Dans certains cas, cette limite peut s'exprimer en fonction de $\bar{V}$.
Autrement dit, les couplages entre les oscillations ne perturbent pas le mouvement moyen.
Ce type de résultat, appelé compacité par compensation, repose sur une **propriété algébrique** dépendant de la structure de la non linéarité et du noyau de L

$$\Pi Q(\Pi_\perp V, \Pi_\perp V) = 0.$$

Remarque : *dans les autres cas, une description plus précise des oscillations est nécessaire.*

▶ Cas d'un fluide mince en rotation

Soit $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ une famille de solutions des équations de Saint-Venant Coriolis.

La compacité faible est obtenue à partir des **estimations a priori** (qui donnent l'existence de solutions)

- conservation de l'énergie

$$\int (1+\varepsilon\rho_\varepsilon)u_\varepsilon^2 dx + \int \rho_\varepsilon^2 dx \leq C_0;$$

- contrôle local de normes Sobolev (système hyperbolique)

$$\|u_\varepsilon\|_{H^s}^2 + \|\rho_\varepsilon\|_{H^s}^2 \leq C(t) \text{ pour } s > \frac{5}{2} \text{ et } t \text{ assez petit ;}$$

- estimation globale de régularité dans le cas visqueux

$$\int (1+\varepsilon\rho_\varepsilon)u_\varepsilon^2 dx + \int \rho_\varepsilon^2 dx + \nu \int |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \leq C_0;$$

L'**équation de contrainte** s'en déduit en étudiant l'opérateur de pénalisation

- son noyau
$$\mathrm{Ker}\, L = \{(\bar\rho, \bar u) \in L^2 \,/\, \bar u = \nabla^\perp \bar\rho\}.$$
- le projecteur spectral associé
$$\Pi(\rho, u) = ((Id - \Delta)^{-1}(\rho - \nabla^\perp \cdot u), \nabla^\perp \cdot (Id - \Delta)^{-1}(\rho - \nabla^\perp \cdot u))$$

Soit $(\bar\rho_\varepsilon, \bar u_\varepsilon)$ la projection de $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ sur $\mathrm{Ker}\, L$.

$$(\bar\rho_\varepsilon, \bar u_\varepsilon) \rightharpoonup (\bar\rho, \bar u) \text{ avec } \bar u = \nabla^\perp \bar\rho.$$

De plus, par définition de Π, on a de la régularité spatiale sur $(\bar u_\varepsilon)$.

On note $(\tilde\rho_\varepsilon, \tilde u_\varepsilon)$ la projection de $(\rho_\varepsilon, u_\varepsilon)$ sur $(\mathrm{Ker}\, L)^\perp$.

$$(\tilde\rho_\varepsilon, \tilde u_\varepsilon) \rightharpoonup 0.$$

A ε fixé, on a l'**équation dynamique**

$$\partial_t \begin{pmatrix} \bar\rho_\varepsilon \\ \bar u_\varepsilon \end{pmatrix} + \Pi \begin{pmatrix} \nabla \cdot (\rho_\varepsilon u_\varepsilon) \\ (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon \end{pmatrix} = O(\varepsilon)$$

d'où l'on déduit de la régularité temporelle sur $(\bar\rho_\varepsilon, \bar u_\varepsilon)$.

- La **compacité forte** de $(\bar u_\varepsilon)$ permet de passer à la limite dans les termes du type $Q(\bar V_\varepsilon, \bar V_\varepsilon)$ et $Q(\bar V_\varepsilon, \tilde V_\varepsilon)$.
- La **compacité par compensation** montre que le dernier terme $\Pi Q(\tilde V_\varepsilon, \tilde V_\varepsilon)$ tend vers 0. En effet, les oscillations de $(\tilde\rho_\varepsilon, \tilde u_\varepsilon)$ sont décrites par
$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_t \tilde\rho_\varepsilon + \nabla \cdot \tilde u_\varepsilon &= O(\varepsilon) \\ \varepsilon \partial_t \nabla \cdot \tilde u_\varepsilon + (Id - \Delta)\tilde\rho_\varepsilon &= O(\varepsilon) \end{aligned}$$
On a alors
$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\tilde\rho_\varepsilon \tilde u_\varepsilon) - \nabla^\perp \cdot ((\tilde u_\varepsilon \cdot \nabla)\tilde u_\varepsilon) &= (\tilde u_\varepsilon \cdot \nabla)(\tilde\rho_\varepsilon - \nabla^\perp \cdot \tilde u_\varepsilon) - \tilde\rho_\varepsilon \nabla \cdot \tilde u_\varepsilon \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\partial_t(\tilde\rho_\varepsilon)^2 + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

Description des oscillations, méthode de filtrage

Pour obtenir une description incluant les oscillations, une idée naturelle est d'utiliser une méthode de filtrage, associée à de la convergence forte.

▶ Stratégie

- Par conjugaison, on a
$$\partial_t e^{\frac{t}{\varepsilon}L} V_\varepsilon + e^{\frac{t}{\varepsilon}L} Q(V_\varepsilon, V_\varepsilon) = 0$$
donc $e^{\frac{t}{\varepsilon}L} V_\varepsilon$ est régulier en temps : les **oscillations sont filtrées**.
- Pour établir un résultat de convergence forte du type
$$\|e^{\frac{t}{\varepsilon}L} V_\varepsilon - W_{app}\|_{L^2} \to 0$$
on **module l'inégalité d'énergie**.
- Le terme dominant de l'approximation W_{app} est obtenu en passant à la limite dans l'équation filtrée. Il vérifie l'**équation d'enveloppe**
$$\partial_t W + Q_L(W, W) = 0$$
où Q_L dépend de Q et de la structure spectrale de L.

Si L a du spectre continu, on s'attend à pouvoir montrer un **résultat de dispersion** (type inégalité de Strichartz) en utilisant une variante du théorème RAGE. On a alors
$$\Pi_\perp Q_L(W, W) = 0.$$
Si L a du spectre discret, on utilise sa **décomposition spectrale**.

▶ Résonances

Le terme non linéaire s'écrit
$$\begin{aligned} e^{\frac{t}{\varepsilon}L} Q(V_\varepsilon, V_\varepsilon) &= e^{\frac{t}{\varepsilon}L} Q(e^{-\frac{t}{\varepsilon}L} W_\varepsilon, e^{-\frac{t}{\varepsilon}L} W_\varepsilon) \\ &= \sum_{i\lambda, i\mu, i\nu \in \mathfrak{S}} e^{i\frac{t}{\varepsilon}(\lambda-\mu-\nu)} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu W_\varepsilon, \Pi_\nu W_\varepsilon) \end{aligned}$$

- Si $\lambda - \mu - \nu \neq 0$, le terme est rapidement oscillant et son intégrale en temps est négligeable.
- Si $\lambda - \mu - \nu = 0$ (résonance), le terme apparaît dans l'opérateur Q_L. Formellement, on a alors
$$Q_L(W, W) = \sum_{\lambda = \mu + \nu} \Pi_\lambda Q(\Pi_\mu W, \Pi_\nu W)$$

Remarque : *L'étude des résonances conduit naturellement à des problèmes de la* **théorie des nombres**.

▶ Cas d'un fluide mince en rotation

Comme la pénalisation est un opérateur différentiel à coefficients constants, on obtient facilement sa **décomposition spectrale** en variables de Fourier. On a

$$L_k \begin{pmatrix} \rho_k \\ u_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ik \cdot u_k \\ u_k^\perp + ik\rho_k \end{pmatrix}$$

d'où

$$L_k = \begin{pmatrix} 0 & ik_1/a_1 & ik_2/a_2 \\ ik_1/a_1 & 0 & 1 \\ ik_2/a_2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & |k| & 0 \\ 0 & 0 & -|k| \end{pmatrix}$$

Les ondes élémentaires sont donc indexées par leur nombre d'onde k et l'indice $\sigma = 0, \pm$ intervenant dans la relation de dispersion

$$\lambda = \sigma|k|$$

Pour presque tout couple (a_1, a_2), l'**équation de résonance**

$$\sigma_\lambda \sqrt{\left(\frac{k_1^\lambda}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2^\lambda}{a_2}\right)^2} = \sigma_\mu \sqrt{\left(\frac{k_1^\mu}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2^\mu}{a_2}\right)^2} + \sigma_\nu \sqrt{\left(\frac{k_1^\nu}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2^\nu}{a_2}\right)^2}$$

n'a que des solutions triviales

$$\lambda = 0 \text{ ou } \mu = 0 \text{ ou } \nu = 0.$$

Le calcul de **compacité par compensation** présenté dans la partie précédente montre de plus que la partie non oscillante se découple du reste du système.

Les **équations d'enveloppe** s'écrivent alors

$$\partial_t \bar{V} + \Pi Q(\bar{V}, \bar{V}) = 0$$

pour la partie non oscillante, et

$$\partial_t W_\lambda + 2\Pi_\lambda Q(\bar{V}, \Pi_\lambda V) = 0$$

pour les oscillations $\lambda \neq 0$.

Pénalisations à coefficients variables

Dans de nombreux problèmes issus de la physique, la pénalisation n'est pas homogène spatialement : en océanographie par exemple, on doit tenir compte de la topographie, des variations du paramètre de Coriolis.....
La décomposition spectrale ne peut plus s'obtenir par un simple calcul en variables de Fourier.

▶ Etude spectrale

L'étude qualitative du comportement asymptotique nécessite néanmoins de connaître quelques propriétés spectrales :

- la nature du spectre détermine si les ondes dispersent ou non ;
- le spectre discret qui intervient dans l'équation de résonance gouverne les couplages entre les ondes ;
- les propriétés de régularité (asymptotique) des vecteurs propres définissent les espaces fonctionnels adaptés pour l'étude de l'équation limite (et de la convergence).

Ces résultats fins de **théorie spectrale** peuvent être établis dans certains cas particuliers.

▶ Cas de l'approximation betaplan

Dans la zone équatoriale, on utilise l'approximation betaplan pour le paramètre de Coriolis $\omega(x) = \beta x_2$.

La pénalisation L s'exprime en fonction des opérateurs $\partial_2 + \beta x_2$ et $\partial_2 - \beta x_2$. Il est alors naturel d'introduire une base de type Fourier (en x_1)- Hermite (en x_2).

- Le spectre discret est constitué des racines des polynômes

$$\lambda^3 - (k_1^2 + \beta(2n+1))\lambda + \beta k_1 = 0, \quad n \in \mathbb{N}, k_1 \in \mathbb{Z}$$

- Il n'y a pas de spectre continu : les vecteurs propres $(\Psi_{k_1,n,j})$ forment une base de $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{T}, \mathbb{R}^3)$.
- On construit des espaces fonctionnels (de type Sobolev à poids) adaptés en considérant les normes

$$\|V\|_s^2 = \sum (n + k_1^2 + 1)^s | < \Psi_{k_1,n,j} | V > |^2 .$$

Pour presque tout (a_1, β), l'**équation de résonance**

$$\lambda(k_1, n, j) + \lambda(k_1', n', j') = \lambda(k_1 + k_1', m, l)$$

n'a que des solutions triviales

$$\lambda(k_1, n, j) = 0 \text{ ou } \lambda(k_1', n', j') = 0 \text{ ou } \lambda(k_1 + k_1', m, l) = 0,$$
$$\text{ou } n = n' = m,\ \lambda(k_1, n, j) = k_1,\ \lambda(k_1', n', j') = k_1',\ \lambda(k_1 + k_1', m, l) = k_1 + k_1'$$

De plus, un calcul algébrique de type **compacité par compensation** montre que la partie non oscillante se découple du reste du système.

En utilisant les **espaces fonctionnels adaptés** à L (et les estimations trilinéaires correspondantes), on montre alors que le système est localement bien posé.
Remarque :*comme la dérivation en x_2 est quantifiée par $\sqrt{n}$, la régularité requise est celle des systèmes hyperboliques 3D classiques (conditions de sommabilité).*

La théorie des formes normales permet parfois de se ramener au cas de l'oscillateur harmonique, ou de d'autres opérateurs connus.
Mais, en général, on n'obtient pas de décomposition spectrale explicite, ni même d'information précise sur la nature du spectre.

▶ Séparation d'échelle et analyse semiclassique
Si les coefficients de la pénalisation ne varient pas trop vite et que les oscillations considérées ont des grands nombres d'onde, l'**analyse semiclassique** fournit de bonnes approximations de la dynamique.

- Le calcul (pseudo-)différentiel est remplacé par des calculs symboliques dans l'espace des phases

$$(x_2, \varepsilon\partial_2) \to (x_2, \xi_2)$$

- Les commutateurs (qui sont négligés dans ce type de calculs) sont d'ordre plus élevé en ε

$$[x_2, \varepsilon\partial_2] = -\varepsilon$$

▶ Cas des gyres équatoriaux

Dans le modèle précédent, on ajoute un terme de convection par un courant macroscopique (type Gulf Stream) et on s'intéresse à la propagation des ondes de surface (générées par le vent).

Après adimensionnement, la pénalisation L s'écrit

$$L = \begin{pmatrix} (\varepsilon\bar{u}\cdot\varepsilon\nabla) & \varepsilon\partial_1 & \varepsilon\partial_2 \\ \varepsilon\partial_1 & (\varepsilon\bar{u}\cdot\varepsilon\nabla) & -\omega(x_2) \\ \varepsilon\partial_2 & \omega(x_2) & (\varepsilon\bar{u}\cdot\varepsilon\nabla) \end{pmatrix}$$

En utilisant une sorte de polynôme caractéristique, et des quantifications adaptées, on peut alors identifier trois **propagateurs scalaires** dont les symboles principaux sont

$$\tau_\pm = \pm\sqrt{\xi_2^2+\xi_1^2+\omega^2(x_2)} \text{ et } \tau_0 = \frac{\varepsilon\omega'(x_2)\xi_1}{\xi_2^2+\xi_1^2+\omega^2(x_2)}$$

Cela permet de décrire la **géométrie** associée à la propagation des ondes.

L'application de ce type de techniques à des **équations non linéaires** reste un problème essentiellement ouvert

- l'optique géométrique apporte des réponses pour des données WKB (avant l'apparition des caustiques)
- Une autre piste consiste à obtenir des informations sur le spectre dans la limite $\varepsilon \to 0$ (méthode de phase non stationnaire).