ONDES PÉRIODIQUES PROGRESSIVES DANS LE MODÈLE DE BURRIDGE-KNOPOFF

Marion Lebellego

Résumé. — On étudie l'existence d'ondes périodiques progressives dans une version 1D du modèle de faille sismique de Burridge et Knopoff, constitué d'une chaîne de masses linéairement couplées, en contact avec une surface rugueuse en mouvement. Le système initial est un système infini d'EDO couplées avec une non linéarité issue d'une loi de frottement de type Coulomb, présentant une singularité en 0. Le système se réduit à une EDO avec avance et retard lorsque l'on recherche des ondes périodiques progressives. Après avoir prouvé un résultat d'existence à couplage faible pour une non linéarité régularisée, on s'intéresse au problème non régularisé.

1. Modèle de Burridge et Knopoff

Un modèle simple de faille sismique introduit par Burridge et Knopoff [**2**] consiste en une chaîne de blocs de masse m, reliés entre eux par des ressorts de raideur k_c, en contact avec frottement avec une surface inférieure se déplaçant à une vitesse constante v. Les blocs sont également reliés à une surface supérieure par des ressorts de raideur k_p.

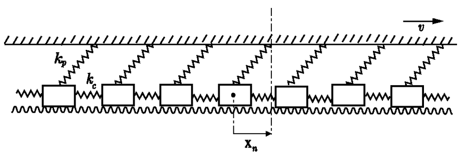

FIGURE 1. Modèle de Burridge et Knopoff (d'après Carlson et Langer, 1989).

En notant x_j la déviation de la jème masse par rapport à sa position d'équilibre, l'équation de la dynamique est donnée par :

$$m\ddot{x}_j = k_c(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) - k_p x_j - \Psi(v + \dot{x}_j), \; x_j \in \mathbb{R}, \; j \in \mathbb{Z}$$

où Ψ est une loi de frottement et ν la vitesse (constante) de la plaque inférieure. De nombreuses études ont été menées dans le cadre très particulier de la limite du continu et pour diverses lois de frottement Ψ (voir par exemple [**6, 7**]). Ici on s'intéresse uniquement au cadre discret avec une loi de frottement non lisse.
On adimensionne l'équation précédente. La nouvelle inconnue adimensionnée u_j vérifie l'équation suivante :

$$\ddot{u}_j = \ell^2(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) - u_j - F(V + \dot{u}_j),$$

où ℓ, V sont des paramètres sans dimension, ℓ étant le rapport des raideurs ($\ell = 0$ correspond au cas où les masses sont découplées). On considère ici la version dûe à Carlson et Langer [**3**] dans laquelle les paramètres sont spatialement homogènes et la loi de frottement, donnée par $F(\nu_{rel}) = \dfrac{\mathrm{Sgn}(\nu_{rel})}{1 + |\nu_{rel}|}$, $F(0) = [-F_0, F_0]$, décroît avec la vitesse et est multivaluée en 0. Il se produit un mouvement de type glissement saccadé, c'est à dire des oscillations entre un état d'équilibre et de glissement. L'équation a été étudiée numériquement par Schmittbhul et al. [**4**] avec un nombre fini de blocs et des conditions de bords périodiques. Ils obtiennent dans certains cas de figure des ondes périodiques progressives localisées. Nous souhaitons justifier mathématiquement ce fait. On recherche donc des solutions sous la forme $u_j(t) = u(j + t/\tau) =: u(\xi)$, $\xi := j + t/\tau$, qui sont des ondes se propageant à vitesse $1/\tau > 0$. L'inconnue u est une solution de l'équation :

$$(E_\tau) \qquad \frac{1}{\tau^2}\ddot{u} + u = \ell^2(u(\xi+1) - 2u(\xi) + u(\xi-1)) - F(V + \frac{\dot{u}}{\tau}).$$

Difficultés du problème : L'équation à étudier, (E_τ), est une EDO *non linéaire* d'ordre 2 avec un *terme d'avance/retard*. De plus, la non linéarité F est mutlivaluée en 0 et régulière en dehors de 0. C'est à dire que l'équation différentielle (E_τ) est en réalité une inclusion différentielle, et qu'à la place du signe $=$ il faut lire $\in$. Il existe une théorie des inclusions différentielles (cf.[**5**]). La notion de solution généralement utilisée est celle de Filippov : une fonction absolument continue u est solution de l'inclusion si elle vérifie l'inclusion presque partout sur un intervalle de temps J. On a entre autre, des résultats d'existence sous une hypothèse de semi-continuité supérieure sur le second membre, hypothèse vérifiée dans le cas de la fonction Sgn. Nous ne nous attarderons pas sur cette théorie si ce n'est pour utiliser la généralisation du théorème de Poincaré-Bendixson pour les inclusions différentielles planaires. Ici on ne cherche pas à résoudre un problème de Cauchy, on cherche des solutions particulières à l'équation E_τ (sous forme d'ondes périodiques progressives).

Nous avons donc une double difficulté : le terme d'avance/retard et le problème de l'inclusion lié au fait que F soit multivaluée. Pour éviter de s'attaquer directement à cette double difficulté, on étudie le problème en plusieurs étapes :

(1) On introduit dans un premier temps une régularisation F_ε de F, donnée par $F_\varepsilon(y) = \mathrm{th}(\frac{y}{\varepsilon}) \cdot |F(y)|$, $x \neq 0$, $F_\varepsilon(0) = 0$, où ε est un petit paramètre destiné à tendre

vers 0. On a bien dans ce cas une équation différentielle et non pas une inclusion différentielle. On opère ensuite à une deuxième simplification en posant $\ell = 0$, ce qui élimine le terme d'avance/retard. On étudie donc l'équation :

$$(E_\varepsilon) \qquad \frac{\ddot{u}}{\tau^2} + u = -F_\varepsilon(V + \frac{\dot{u}}{\tau}),$$

dont on prouve l'existence d'une solution périodique par le théorème de Poincaré-Bendixson. Puis, par une théorie de perturbation, on montre la persistance d'une telle solution lorsque ℓ est petit (c'est à dire à couplage faible).

(2) Dans un deuxième temps, on revient au problème avec l'inclusion. On répète le même schéma. Pour le problème à couplage faible, l'idée ici étant de découper une période en deux intervalles, dissociant ainsi les temps pour lesquels l'inclusion est véritablement une inclusion et les temps pour lesquels elle reste une EDO.

2. Première étape : Etude des solutions périodiques du problème régularisé

On commence donc par étudier le problème à couplage nul (E_ε) puis on démontre la persistance du résultat à couplage faible.

2.1. Problème régularisé à couplage nul : existence de solution périodique. — On montre dans un premier temps, qu'il y a naissance d'une orbite périodique autour du seul point d'équilibre du système par bifurcation de Hopf (cf. [**1**]). Lorsque le paramètre de bifurcation $\mu := V - V_c > 0$, où V_c est la valeur critique de V pour laquelle F_ε est maximale, il existe une orbite périodique stable. Dans le cas général, lorsque $\mu > 0$ n'est plus dans un voisinage de 0, le système étant planaire, on peut utiliser des outils d'analyse globale tel que le théorème de Poincaré-Bendixson : le seul point d'équilibre étant répulsif, en construisant un domaine positivement invariant on déduit l'existence d'un cycle limite à l'intérieur de ce domaine (non forcément unique). On montre ainsi le théorème suivant :

Théorème 2.1. — *Pour tout $V > 0$, pour tout $\tau \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe une solution périodique de l'équation (E_ε).*

***Remarque 2.2* (Stabilité de l'orbite périodique).** — Pour $V \approx V_c$, la stabilité de l'orbite est donnée par l'analyse de la bifurcation de Hopf. Mais dans le cas géneral, le problème reste ouvert.

2.2. Persistance de l'orbite périodique à couplage ℓ faible.—

Théorème 2.3. — *Soit u_0 une solution T_0-périodique de l'équation (E_ε), se propageant à une vitesse de $\frac{1}{\tau_0}$, et donnée par le théorème 2.1. On fait l'hypothèse suivante :*

(H) L'ensemble des solutions T_0-périodiques de l'équation linéarisée autour de

l'orbite périodique u_0, i.e. $\frac{\ddot{u}}{\tau_0^2} + u = -F'_\varepsilon(V + \frac{\dot{u}_0}{\tau_0})\frac{\dot{u}}{\tau_0}$ *est de dimension 1 engendré par $\dot{u}_0$.*

En d'autres termes, (H) signifie que l'ensemble des solutions de cette équation s'écrit comme somme d'un sous-espace neutre et d'un sous-espace attractif ou répulsif.
Il existe alors des voisinages $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}$ et Ω de (u_0, τ_0) dans $H^2(\mathbb{R}/T_0, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ tels que pour tout $\ell \in \mathcal{V}$, il existe une solution T_0-périodique de (E_τ) régularisée, u_ℓ, se propageant à une vitesse de $\frac{1}{\tau(\ell)}$.

Preuve. — La preuve repose sur la méthode de Lyapounov-Schmidt. On recherche u solution de (E_τ) comme une petite perturbation de u_0 : $u = u_0 + u_1$, où u_1 est une petite inconnue. L'équation (E_τ) en u_1 se met alors sous la forme $g(u_1, \tau, \ell) = 0$, avec $g(0, \tau_0, 0) = 0$ (traduisant le fait que $\dot{u}_0$ est solution). On ne peut tirer u_1 en fonction de τ et ℓ par le théorème des fonctions implicites car $\mathcal{L}(u_1) := D_{u_1} g(0, \tau_0, 0).u_1$ n'est ni injective, ni surjective.
Pour pallier au défaut de surjectivité, on projette cette équation sur l'image de $\mathcal{L}$ et sur son orthogonal et pour pallier au défaut d'injectivité, on décompose u_1 sur le noyau de $\mathcal{L}$ et son orthogonal. On obtient deux équations : de la première, on résout u_1 par le TFI, en fonction de τ et ℓ. Et de la deuxième, encore par le TFI, on résout τ également en fonction de ℓ moyennant une condition de compatibilité qui est vérifiée sous l'hypothèse (H) faite dans l'énoncé du théorème. □

3. Deuxième étape : étude des solutions périodiques du problème non régularisé

En utilisant la version non lisse du théorème de Poincaré-Bendixson, le théorème 2.1 subsiste pour l'inclusion correspondante. Pour l'étude à faible couplage, le problème est un problème d'analyse non lisse beaucoup plus difficile et nécessite d'adapter les outils de la section 2.2. Un analogue du théorème 2.3 est montré dans un article à venir ([**8**]).

Références

[1] Iooss G., Aldelmeyer M., Topics in bifurcation theory and applications, Advanced Series in Non Linear Dynamics 3 World Scientific (1992).

[2] Burridge R., Knopoff L., Model and theoretical seismity, Bulletin of the seismological Society of America,v.57 no.3 (1967) 341-371.

[3] Carlson J.M., Langer J.S., Mechanical model of an earthquake fault, Phys. Rev. A40 (1989) 6470-6484.

[4] Vilotte J.P, Roux S., Schmittbuhl J., Propagative macro-dislocation modes in earthquake fault model, Europhys. Lett. (January 1993) 375-380.

[5] Aubin J.P., Celina A., Differential inclusions, Springer Verlag (1984).

[6] Muratov C.B., Traveling wave solutions in the Burridge-Knopoff model, Phys. Rev E, v. 59, no.4 (1999), 3847-3857.

[7] Hahner P., Drossinos Y., Nonlinear dynamics of a continuous spring-block model of earthquake faults, J. Phys. A : Math. Gen. 31 (1998), L185-L191.

[8] Lebellego M., Periodic traveling waves in the Burridge-Knopoff model (soumis).

Marion Lebellego
en thèse sous la direction d'E. Lombardi et G. James, Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier.
E-mail : marion.lebellego@math.univ-toulouse.fr