QUOTIENTS COMPACTS DES GROUPES SEMI-SIMPLES DE RANG UN

Fanny Kassel

Résumé. — Soit $\mathbf{k}$ un corps local. Nous décrivons les sous-groupes discrets de $SL_2(\mathbf{k}) \times SL_2(\mathbf{k})$ qui agissent librement, proprement et cocompactement sur $SL_2(\mathbf{k})$ par translation à gauche et à droite, et nous étudions leur déformation. Pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, ceci s'applique à la géométrie lorentzienne et plus particulièrement aux variétés anti-de Sitter compactes de dimension trois. Pour $\mathbf{k} = \mathbb{Q}_p$, cela permet notamment de décrire les quotients des quadriques p-adiques de dimension trois.

1. Motivations

Soit G'/G un espace homogène, où G' est un groupe de Lie linéaire réel et G un sous-groupe fermé de G'. Il est naturel de s'intéresser aux variétés compactes localement modelées sur G'/G, et notamment à la classe importante des quotients compacts $\Gamma\backslash G'/G$, où Γ est un sous-groupe discret de G' dont l'action sur G'/G est propre et libre (afin que $\Gamma\backslash G'/G$ soit une variété). La condition de propreté impose de fortes restrictions sur Γ lorsque H n'est pas compact : il suffit pour s'en convaincre de considérer l'exemple de $G' = SL_2(\mathbb{R})$ et du sous-groupe G des matrices unipotentes triangulaires supérieures, pour lequel tout groupe discret agissant proprement sur G'/G est fini. En revanche, la condition de liberté n'est pas très contraignante, car si le groupe Γ agit proprement et cocompactement sur G'/G, il admet toujours un sous-groupe d'indice fini sans torsion ; autrement dit, $\Gamma\backslash G'/G$ admet toujours un revêtement fini par une variété compacte.

La théorie des quotients compacts d'espaces homogènes trouve ses origines dans l'étude des groupes discrets d'isométries d'espaces riemanniens symétriques et dans celle des variétés pseudo-riemanniennes complètes de courbure constante. À la fin des années 1980, T. Kobayashi a initié l'étude générale des quotients compacts d'espaces homogènes réels. Depuis, les questions d'existence, de description et de déformation de quotients compacts ont suscité de nombreux travaux et le développement de méthodes variées, bien que de nombreuses questions restent ouvertes à ce jour : par exemple celle de l'absence de quotients compacts de $SL_n(\mathbb{R})/SL_m(\mathbb{R})$ pour $n > m \geq 2$.

Dans cet exposé nous considérons les espaces homogènes de la forme $(G \times G)/\Delta_G$, où G est un groupe semi-simple connexe de rang relatif un sur $\mathbb{R}$, ou plus généralement sur un corps local $\mathbf{k}$, et où Δ_G est la diagonale de $G \times G$. De manière équivalente, nous nous intéressons aux sous-groupes discrets de $G \times G$ qui agissent proprement sur G par translation à gauche et à droite. Dans la suite nous nous concentrons sur l'exemple de $G = SL_2(\mathbf{k})$.

2. Description des quotients compacts de $(G \times G)/\Delta_G$

Soit $\mathbf{k}$ un corps local, c'est-à-dire $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, un corps p-adique ou le corps $\mathbb{F}_q((t))$ des séries de Laurent formelles à coefficients dans un corps fini $\mathbb{F}_q$, et soit $G = SL_2(\mathbf{k})$ (ce qui suit se généralise à un groupe de Lie linéaire semi-simple réel connexe G de rang réel un ou à l'ensemble G des $\mathbf{k}$-points d'un $\mathbf{k}$-groupe algébrique semi-simple connexe de $\mathbf{k}$-rang un).

Rappelons que $G = SL_2(\mathbf{k})$ admet une *décomposition de Cartan* $G = KA^+K$, où K est un sous-groupe compact maximal de G et A^+ une chambre de Weyl d'un sous-groupe de Cartan de G (ou de l'ensemble des $\mathbf{k}$-points d'un tore déployé maximal). Par exemple, pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbf{k} = \mathbb{C}$) on peut prendre $K = SO(2)$ (resp. $K = SU(2)$) et $A^+ = \{\mathrm{diag}(a, a^{-1}),\ a \geq 1\}$: la décomposition $G = KA^+K$ résulte alors de la décomposition polaire et de la réduction des matrices symétriques (resp. hermitiennes). Pour $\mathbf{k} = \mathbb{Q}_p$ on peut prendre $K = SL_2(\mathbb{Z}_p)$ et $A^+ = \{\mathrm{diag}(a, a^{-1}),\ |a|_p \geq 1\}$: la décomposition $G = KA^+K$ résulte alors du théorème de la base adaptée. Ceci permet de définir une application continue et propre $\mu : G \to \mathbb{R}^+$, appelée *projection de Cartan*, comme "le logarithme de la projection sur A^+". Par exemple, pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ le réel $\mu(g)$ est le logarithme de la plus grande valeur propre de ${}^t\overline{g}g$; pour $\mathbf{k} = \mathbb{Q}_p$, si $p^n g \in M_2(\mathbb{Z}_p)$ on a $\mu(g) = |\nu_p(a_g/a'_g)|$, où a_g et a'_g sont les facteurs invariants de $p^n g$ et où $\nu_p : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Z}$ est la valuation p-adique.

Donnons tout d'abord une description des sous-groupes discrets sans torsion de $G \times G$ qui agissent proprement sur G par translation à gauche et à droite.

Théorème 2.1. — *Soient* $\mathbf{k}$ *un corps local et* $G = SL_2(\mathbf{k})$. *À la permutation près des deux facteurs de* $G \times G$, *les sous-groupes discrets sans torsion de* $G \times G$ *agissant proprement sur* G *par translation à gauche et à droite sont les graphes de la forme*

$$\Gamma_0^\rho = \big\{(\gamma, \rho(\gamma)),\ \gamma \in \Gamma_0\big\},$$

où Γ_0 *est un sous-groupe discret de* G *et* $\rho : \Gamma_0 \to G$ *un morphisme de groupes* admissible, *au sens où pour tout* $R > 0$ *on a* $\mu(\rho(\gamma)) \leq \mu(\gamma) - R$ *pour presque tout* $\gamma \in \Gamma_0$.

On dit ici qu'une propriété est vraie *pour presque tout* $\gamma \in \Gamma_0$ si elle l'est pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ en dehors d'un ensemble fini. La condition d'admissibilité signifie que l'ensemble $(\mu \times \mu)(\Gamma_0^\rho)$ est essentiellement situé sous la diagonale de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ (à un nombre fini de points près) et qu'il "s'éloigne de la diagonale à l'infini".

Y. Benoist [**1**] a montré, à travers son *critère de propreté*, que de manière générale la propreté d'une action sur un espace homogène se voit sur une projection de Cartan.

Voici une condition nécessaire et suffisante de cocompacité.

Théorème 2.2. — *Soient* $\mathbf{k}$ *un corps local et* $G = SL_2(\mathbf{k})$. *Soient* Γ_0 *un sous-groupe discret de type fini sans torsion de* G *et* $\rho : \Gamma_0 \to G$ *un morphisme admissible. Le quotient* $\Gamma_0^\rho \backslash (G \times G)/\Delta_G$ *est compact si et seulement si le quotient* $\Gamma_0 \backslash G$ *l'est.*

Pour $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le théorème 2.2 résulte d'un argument de dimension cohomologique [**7**]. Pour $\mathbf{k}$ ultramétrique, il résulte d'un raisonnement géométrique sur l'*arbre de Bruhat-Tits* de G [**5**]. Rappelons que pour $G = SL_2(\mathbb{Q}_p)$ par exemple, l'arbre de Bruhat-Tits est un arbre régulier X de valence $p+1$; ses sommets s'identifient aux classes d'homothétie (modulo $\mathbb{Q}_p^*$) de sous-$\mathbb{Z}_p$-modules libres de rang 2 de $\mathbb{Q}_p^2$, ce qui permet de définir une action naturelle de G sur X par isométries.

Les théorèmes 2.1 et 2.2 permettent en particulier de construire de nombreux exemples de quotients compacts *non standard* de $(G \times G)/\Delta_G$, c'est-à-dire de quotients compacts par des sous-groupes qui ne sont *pas* de la forme $\Gamma_0 \times \{1\}$ ou $\{1\} \times \Gamma_0$. Pour $G = SL_2(\mathbb{R})$ les premiers exemples ont été construits par Goldman [**3**].

3. Déformation des quotients compacts de $(G \times G)/\Delta_G$

3.1. Le cas ultramétrique. — L'une de nos motivations est le fait que pour $G = SL_2(\mathbb{Q}_p)$, l'espace homogène $(G \times G)/\Delta_G$ s'identifie à la quadrique de $\mathbb{Q}_p^4$ d'équation $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 1$. Cette dernière est la seule quadrique de $\mathbb{Q}_p^4$ dont la description des quotients compacts n'était pas connue.

Concernant la déformation de ces quotients, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.1. — *Soient* $\mathbf{k}$ *un corps local ultramétrique,* $G = SL_2(\mathbf{k})$ *et* Γ *un sous-groupe discret de type fini sans torsion de* $G \times G$ *agissant proprement et cocompactement sur* G *par translation à gauche et à droite. Il existe un voisinage* $\mathcal{U} \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, G \times G)$ *de l'inclusion naturelle formé de morphismes injectifs et tel que pour tout* $\varphi \in \mathcal{U}$*, le groupe* $\varphi(\Gamma)$ *soit discret dans* $G \times G$ *et agisse proprement et cocompactement sur* G.

Pour tout arbre réel simplicial X et toute isométrie $g \in \mathrm{Isom}(X)$, notons $\lambda(g) = \inf_{x \in X} d(x, g \cdot x)$ la longueur de translation de g. Rappelons que si Γ_0 est un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{Isom}(X)$, alors pour tout $\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}$ on a $\lambda(\gamma) > 0$ et il existe une unique droite géodésique $\mathcal{A}_\gamma$ de X (l'*axe de translation* de γ) sur laquelle γ agit par translation (de longueur $\lambda(\gamma)$). *Via* la théorie de Bruhat-Tits, le théorème 3.1 est une conséquence du résultat suivant sur les arbres.

Proposition 3.2. — *Soient* X *et* X' *deux arbres réels simpliciaux,* Γ_0 *un sous-groupe discret sans torsion de* $\mathrm{Isom}(X)$ *tel que le quotient* $\Gamma_0\backslash X$ *soit un graphe fini et* $\rho : \Gamma_0 \to \mathrm{Isom}(X')$ *un morphisme de groupes.*

(1) *La borne inférieure* C_ρ *des constantes de Lipschitz d'applications* ρ*-équivariantes de* X *dans* X' *est finie et atteinte.*

(2) *Fixons un point* $x_0 \in X$ *et soit* F *le sous-ensemble fini de* $\Gamma_0 \setminus \{1\}$ *formé des éléments* γ *tels que* $d(x_0, \gamma \cdot x_0) \leq 4L$*, où* L *est la longueur totale des arêtes du graphe fini* $\Gamma_0\backslash X$*. Pour toute application* ρ*-équivariante et* C_ρ*-lipschitzienne* $f : X \to X'$*, il existe* $\gamma \in F$ *tel que* f *soit affine de constante* C_ρ *sur* $\mathcal{A}_\gamma$*. On a*

$$\sup_{\gamma \in \Gamma_0 \setminus \{1\}} \frac{\lambda\big(\rho(\gamma)\big)}{\lambda(\gamma)} = \max_{\gamma \in F} \frac{\lambda\big(\rho(\gamma)\big)}{\lambda(\gamma)} = C_\rho.$$

(3) *Le morphisme* ρ *est admissible si et seulement si* $C_\rho < 1$.

On dit ici que $f : X \to X'$ est ρ-équivariante si $f(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot f(x)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_0$ et tout $x \in X$; on dit que $\rho : \Gamma_0 \to \mathrm{Isom}(X')$ est admissible si pour tout $x_0' \in X'$ et tout $R > 0$ on a $d(x_0', \rho(\gamma) \cdot x_0') \leq d(x_0, \gamma \cdot x_0) - R$ pour presque tout $\gamma \in \Gamma_0$.

Soit Γ_0 un sous-groupe de type fini sans torsion de G. D'après la proposition 3.2 (appliquée à l'arbre de Bruhat-Tits de G), l'admissibilité d'un morphisme $\rho : \Gamma_0 \to G$ est déterminée par un nombre fini de conditions ouvertes, donc l'ensemble des morphismes admissibles est ouvert dans $\mathrm{Hom}(\Gamma_0, G)$. On en déduit le théorème 3.1.

Soit n le rang du groupe libre Γ_0. La proposition 3.2 implique l'existence d'une "distance asymétrique" sur l'*outre-espace* de rang n, et l'équivalence entre deux définitions différentes de cette distance asymétrique. Rappelons que l'outre-espace est un ensemble de classes d'équivalence de graphes métriques finis connexes normalisés et marqués par un groupe libre F_n à n générateurs.

3.2. Variétés anti-de Sitter compactes de dimension trois. — Les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3, ou variétés lorentziennes compactes de dimension 3 de courbure constante strictement négative, sont complètes [**6**]. À une isométrie, à la renormalisation de la métrique et à un revêtement fini près, ce sont les quotients compacts de $(G \times G)/\Delta_G$ pour $G = SL_2(\mathbb{R})$. Nous précisons leur description (*cf.* [**6**], [**9**], [**10**]) en démontrant le résultat suivant.

Théorème 3.3. — *Soit* Γ_0 *un réseau cocompact de* $G = SL_2(\mathbb{R})$ (i.e. *un sous-groupe discret tel que* $\Gamma_0\backslash G$ *soit compact). Un morphisme* $\rho : \Gamma_0 \to G$ *est admissible si et seulement s'il existe des constantes* $C < 1$ *et* $C' \geq 0$ *telles que* $\mu(\rho(\gamma)) \leq C\mu(\gamma) + C'$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma_0$.

Le théorème 3.3 est une conséquence du résultat suivant sur les applications lipschitziennes du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$.

Théorème 3.4. — *Soit* Γ_0 *un réseau cocompact sans torsion de* $G = SL_2(\mathbb{R})$*, soit* $\rho : \Gamma_0 \to G$ *un morphisme de groupes et soit* $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ *une application* ρ*-équivariante et lipschitzienne de constante de Lipschitz* C_ρ *minimale. Si* $C_\rho \geq 1$*, il existe une droite géodésique de* $\mathbb{H}^2$ *sur laquelle* f *est affine de constante* C_ρ*.*

Le théorème 3.4 permet de généraliser un résultat de Thurston **[11]** sur l'équivalence entre deux définitions d'une distance asymétrique sur l'espace de Teichmüller de la surface $\Gamma_0\backslash\mathbb{H}^2$. On obtient également une nouvelle démonstration du résultat suivant.

Corollaire 3.5. — *Soit* $G = SL_2(\mathbb{R})$ *et soit* Γ *un sous-groupe discret sans torsion de* $G \times G$ *agissant proprement et cocompactement sur* G *par translation à gauche et à droite. Il existe un voisinage* $\mathcal{U} \subset \mathrm{Hom}(\Gamma, G \times G)$ *de l'inclusion naturelle formé de morphismes injectifs et tel que pour tout* $\varphi \in \mathcal{U}$*, le groupe* $\varphi(\Gamma)$ *soit discret dans* $G \times G$ *et agisse proprement et cocompactement sur* G*.*

Références

[1] Y. Benoist, *Actions propres sur les espaces homogènes réductifs*, Ann. Math. 144 (1996).

[2] É. Ghys, *Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de* $SL_2(\mathbb{C})$, J. Reine Angew. Math. 468 (1995).

[3] W. M. Goldman, *Nonstandard Lorentz space forms*, J. Differ. Geom. 21 (1985).

[4] F. Kassel, *Proper actions on corank-one reductive homogeneous spaces*, J. Lie Theory 18 (2008).

[5] F. Kassel, *Quotients compacts des groupes ultramétriques de rang un*, arXiv 0904.4657, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier.

[6] B. Klingler, *Complétude des variétés lorentziennes à courbure constante*, Math. Ann. 306 (1996).

[7] T. Kobayashi, *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. 285 (1989).

[8] T. Kobayashi, *On discontinuous groups acting on homogeneous spaces with noncompact isotropy subgroups*, J. Geom. Phys. 12 (1993).

[9] R. S. Kulkarni, F. Raymond, *3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces*, J. Differential Geom. 21 (1985).

[10] F. Salein, *Variétés anti-de Sitter de dimension 3 exotiques*, Ann. Inst. Fourier 50 (2000).

[11] W. P. Thurston, *Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces* (1986), arXiv 9801039.

Fanny Kassel

Département de mathématiques, Bâtiment 425, Faculté des Sciences d'Orsay,
Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay Cedex.

E-mail : `fanny.kassel@math.u-psud.fr`