

HOMOLOGIE STABLE DES GROUPES

Christine Vespa

Résumé. — Depuis les années 1970, beaucoup d'intérêt a été porté à l'étude de l'homologie stable notamment à cause des liens étroits existant entre elle et la K-théorie algébrique. Après quelques rappels concernant l'homologie d'un groupe, on définit ce qu'est l'homologie stable d'une famille de groupes à coefficients triviaux ou tordus. On donne quelques résultats concernant l'homologie stable des groupes linéaires puis on énonce le résultat principal obtenu dans [DV09] concernant le calcul de l'homologie stable des groupes orthogonaux à coefficients tordus.

1. Homologie d'un groupe à coefficients triviaux

1.1. Définition et exemples [Bro82, Wei94]. — Soient G un groupe fini et R un anneau commutatif. Pour M un R -module, une **résolution** de M est une suite exacte de R -modules : $\dots \rightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$. Si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, F_i est un module libre on dit que la résolution est libre. On rappelle que le \mathbb{Z} -module libre engendré par les éléments de G : $\mathbb{Z}G := \{\sum n_i g_i \mid n_i \in \mathbb{Z}, g_i \in G\}$ est un anneau pour la multiplication induite par la loi de G . Soit M un $\mathbb{Z}G$ -module et N le sous-groupe additif de M engendré par les éléments de la forme $gm - m$ pour $g \in G$ et $m \in M$. Le **groupe des coïnvariants** de M est défini par $M_G := M/N$. C'est le plus grand quotient de M sur lequel G agit trivialement. Les coïnvariants définissent un foncteur $-_G : G\text{-Mod} \rightarrow \text{Ab}$.

On considère une résolution libre de \mathbb{Z} par des $\mathbb{Z}G$ -modules à laquelle on applique le foncteur défini précédemment. On obtient ainsi un complexe : $\dots \rightarrow (F_2)_G \xrightarrow{\delta_2} (F_1)_G \xrightarrow{\delta_1} (F_0)_G \xrightarrow{\epsilon} R \rightarrow 0$. On a donc $\text{Im}(\delta_{n+1}) \subset \text{Ker}(\delta_n)$ mais, en général, $\text{Im}(\delta_{n+1}) \neq \text{Ker}(\delta_n)$. L'homologie de G mesure le défaut de ce complexe d'être exact.

Définition 1.1. — Le n -ième groupe d'homologie de G à coefficients dans \mathbb{Z} est :

$$H_n(G, \mathbb{Z}) = \text{Ker}(\delta_n) / \text{Im}(\delta_{n+1}).$$

Cette définition ne dépend pas du choix de la résolution libre. On remarque que $H_0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et $H_1(G, \mathbb{Z}) = G/[G, G]$.

Exemple 1.2. — Soit G le groupe cyclique d'ordre n et de générateur t . On considère $N = 1 + t + \dots + t^{n-1} \in \mathbb{Z}G$. En utilisant la résolution $\dots \rightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$, on obtient, en appliquant le foncteur $-_G$, le complexe : $\dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$. On en déduit que $H_0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_i(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pour i pair et $H_i(G, \mathbb{Z}) = 0$ pour i impair.

Remarque 1.3. — On peut remplacer \mathbb{Z} par un anneau commutatif k et considérer les kG -modules. On définit alors de manière similaire $H_*(G, k)$.

1.2. Homologie stable d'une famille de groupes. — Soit $(G_i)_i$ une suite de groupes munie d'inclusions $G_i \hookrightarrow G_{i+1}$. Ceci fournit une suite naturelle de morphismes :

$$(1) \quad \dots \rightarrow H_k(G_i, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(G_{n+1}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(G_{n+2}, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

Deux questions se posent alors naturellement concernant cette suite de morphismes :

(1) **Est-ce que cette suite se stabilise?** Autrement dit, pour k fixé, existe-t-il un entier $N(k)$ tel que $\forall n \geq N(k)$, $H_k(G_n, \mathbb{Z}) \simeq H_k(G_{n+1}, \mathbb{Z})$? Dans le cas affirmatif, quel est le plus petit entier $N(k)$ ayant cette propriété?

(2) **Peut-on calculer la colimite de cette suite?** Cette colimite sera appelée l'homologie stable des groupes G_i à coefficients triviaux et sera notée $H_k(G_\infty, \mathbb{Z})$. Même dans les cas où l'on sait que la réponse à la première question est positive, le calcul de cette colimite reste un problème difficile.

1.3. Quelques résultats de stabilité et calculs de la valeur stable. — Dans ce paragraphe on commence par donner quelques résultats répondant à la première question énoncée précédemment.

Théorème 1.4 (Nakaoka [Nak60]). — L'homologie de la suite des groupes symétriques $(S_p)_p$ se stabilise et $H_k(S_p, \mathbb{Z}) \simeq H_k(S_{p+1}, \mathbb{Z})$ pour $k \leq \frac{p+1}{2}$.

Théorème 1.5 (Quillen [Qui72]). — Soit A un corps fini différent de \mathbb{F}_2 , l'homologie de $(GL_n(A))_n$ se stabilise et $H_k(GL_n(A)) \simeq H_k(GL_{n+1}(A))$ pour $k \leq n - 1$.

Remarque 1.6. — Ce résultat a été généralisé au cas d'un anneau noethérien commutatif de dimension finie dans [vdK80] par Van der Kallen.

Théorème 1.7 (Charney [Cha87]). — Pour R un anneau de Dedekind, l'homologie de la famille des groupes orthogonaux $(O_{n,n}(R))_n$ et de la famille des groupes symplectiques $(Sp_{2n}(R))_n$ se stabilisent.

Des résultats de calculs d'homologie stable sont donnés dans les deux théorèmes suivants.

Théorème 1.8 (Quillen [Qui72]). — Pour k un corps fini, on a :

$$H_0(GL_\infty(k), k) = k \quad \text{et} \quad H_j(GL_\infty(k), k) = 0 \quad \text{pour } j > 0.$$

Théorème 1.9 (Fiedorowicz-Priddy [FP78]). — Pour k un corps fini, on a :

$$H_0(O_\infty(k), k) = k \quad \text{et} \quad H_j(O_\infty(k), k) = 0 \quad \text{pour } j > 0 \text{ si } \text{car}(k) \neq 2$$

$$H_0(Sp_\infty(k), k) = k \quad \text{et} \quad H_j(Sp_\infty(k), k) = 0 \quad \text{pour } j > 0.$$

2. Homologie d'un groupe à coefficients tordus

2.1. Définitions. — Soit M un $\mathbb{Z}G$ -module. En appliquant à une résolution libre de \mathbb{Z} par des $\mathbb{Z}G$ -modules à droite : $\dots \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$, le foncteur $-\otimes_{\mathbb{Z}G} M$ on obtient le complexe : $\dots \rightarrow F_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} M \rightarrow F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \rightarrow 0$.

Définition 2.1 (Définition de l'homologie de G à coefficients dans M)

$$H_*(G, M) := H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} M).$$

Remarque 2.2. — (1) Pour $M = \mathbb{Z}$ on retrouve le cas du paragraphe précédent.

(2) $H_0(G, M) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq M_G$.

(3) Par définition, $H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} M)$ sont les groupes de torsions entre \mathbb{Z} et M notés $\text{Tor}_*^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$.

Proposition 2.3 (Lemme de Shapiro). — Si $H \subset G$ et M est un $\mathbb{Z}H$ -module, alors $H_*(H, M) \simeq H_*(G, \text{Ind}_H^G M)$ où $\text{Ind}_H^G M$ est le $\mathbb{Z}G$ -module induit, c'est-à-dire $\text{Ind}_H^G M = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$.

2.2. Stabilité à coefficients tordus : le cas des groupes linéaires. — Pour R un anneau, considérons la suite des groupes $(GL_n(R))_n$ et notons $I_n : GL_n(R) \rightarrow GL_{n+1}(R)$ l'inclusion induite par $R^n \hookrightarrow R^n \oplus R$. Une suite de $GL_n(R)$ -modules M_n munie de morphismes de $GL_n(R)$ -modules $f_n : M_n \rightarrow \text{Res}_{GL_n(R)}^{GL_{n+1}(R)} M_{n+1}$, où $\text{Res}_{GL_n(R)}^{GL_{n+1}(R)} M_{n+1}$ est le module obtenu par restriction via I_n , fournit une suite naturelle de morphismes :

$$(2) \quad \dots \rightarrow H_*(GL_n(R), M_n) \xrightarrow{g_n} H_*(GL_{n+1}(R), M_{n+1}) \rightarrow \dots$$

où g_n est la composée suivante :

$$H_*(GL_n(R), M_n) \xrightarrow{\simeq} H_*(GL_{n+1}(R), \text{Ind}_{GL_n(R)}^{GL_{n+1}(R)} M_n)$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow H_*(GL_{n+1}(\mathbb{R}), \text{Ind}_{GL_n(\mathbb{R})}^{GL_{n+1}(\mathbb{R})} \text{Res}_{GL_n(\mathbb{R})}^{GL_{n+1}(\mathbb{R})} M_{n+1}) \\ &\rightarrow H_*(GL_{n+1}(\mathbb{R}), M_{n+1}) \end{aligned}$$

où la première application est donnée par le lemme de Shapiro, la deuxième est induite par f_n et la dernière découle de l'application de GL_{n+1} -modules

$$\text{Ind}_{GL_n(\mathbb{R})}^{GL_{n+1}(\mathbb{R})} \text{Res}_{GL_n(\mathbb{R})}^{GL_{n+1}(\mathbb{R})} M_{n+1} = \mathbb{Z}GL_{n+1}(\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{Z}GL_n(\mathbb{R})} M_{n+1} \rightarrow M_{n+1}$$

définie par $A \otimes m \mapsto A \cdot m$.

Remarque 2.4. — Une manière naturelle d'obtenir une suite de modules M_n munie de morphismes f_n est de considérer des foncteurs $F : \mathbb{R} - \text{mod} \rightarrow \mathbb{R} - \text{mod}$.

Les mêmes questions qu'au paragraphe 1.2 peuvent alors être posées pour la suite (2). Les deux théorèmes suivants répondent à ces questions.

Théorème 2.5 (Dwyer [Dwy80]). — Soient R un anneau principal et F un foncteur polynomial sans terme constant (i.e. $F(0) = 0$) alors l'homologie de $(GL_n(\mathbb{R}))$ à coefficients dans $M_n = F(\mathbb{R}^n)$ se stabilise et $H_i(GL_n(\mathbb{R}), F(\mathbb{R}^n)) \simeq H_{i+1}(GL_{n+1}(\mathbb{R}), F(\mathbb{R}^{n+1}))$ pour $n \geq 2i + d + c$ où d est le degré de F et c est une constante.

Remarque 2.6. — Les exemples classiques de foncteurs polynomiaux de degré n sont le foncteur n -ième puissance tensorielle T^n , le foncteur n -ième puissance extérieure Λ^n et le foncteur n -ième puissance symétrique S^n . Pour une définition des foncteurs polynomiaux on pourra consulter [FFPS03].

Théorème 2.7 (Betley [Bet92]). — Soient R un anneau principal et F un foncteur polynomial sans terme constant (i.e. $F(0) = 0$) alors

$$H_*(GL_\infty(\mathbb{R}), F_\infty) = 0$$

où $F_\infty = \text{colim}_n F(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 2.8. — Ce résultat a été généralisé indépendamment par Betley [Bet99] et Suslin [FFSS99] au cas de coefficients obtenus à partir de bifoncteurs B (polynomial en chaque variable) et R un corps. Dans ce cas la valeur stable n'est plus nulle. Pour les foncteurs usuels, ces groupes d'homologie sont accessibles aux calculs.

2.3. Stabilité à coefficients tordus : généralisation et cas des groupes orthogonaux.

— La situation décrite au paragraphe précédent peut se généraliser à d'autres familles de groupes $(G(n))_n$ de la manière suivante. Pour \mathcal{C} une catégorie monoïdale symétrique et A un objet de \mathcal{C} on note $G(n)$ le groupe des automorphismes $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(A^{\oplus n})$. En évaluant un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ sur $A^{\oplus n}$ on obtient de manière naturelle un $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(A^{\oplus n})$ -module ce qui permet de considérer : $H_*(G(n), F(A^{\oplus n}))$. De plus, en remarquant que l'injection dans les n premières variables $A^{\oplus n} \hookrightarrow A^{\oplus n+1}$ est

compatible à l'action des groupes d'automorphismes $\text{Aut}(A^{\oplus n})$ via le morphisme : $\text{Aut}(A^{\oplus n}) \xrightarrow{g \mapsto g \oplus \text{Id}_A} \text{Aut}(A^{\oplus n+1})$ on obtient une suite naturelle de morphismes :

$$(3) \quad \dots \rightarrow H_*(G(n), F(A^{\oplus n})) \rightarrow H_*(G(n+1), F(A^{\oplus n+1})) \rightarrow \dots$$

En prenant pour \mathcal{C} des catégories convenables, ce cadre général permet aussi bien de traiter le cas des groupes linéaires, des groupes symétriques, des groupes orthogonaux et des groupes symplectiques.

Dans la cas des groupes orthogonaux la stabilité de la suite (3) est donnée par le résultat suivant :

Théorème 2.9 (Charney [Cha87]). — Soient k un corps fini et F un foncteur polynomial alors l'homologie de $(O_{n,n}(k))_n$ à coefficients dans $M_n = F(k^{2n})$ se stabilise.

Dans [DV09] nous obtenons le calcul de la valeur stable $H_*(O_\infty(k), F_\infty)$ lorsque $\text{car}(k) \neq 2$. Cette valeur n'est pas nulle en général. Plus précisément, nous obtenons le théorème :

Théorème 2.10 (Djament-Vespa [DV09]). — Soient k un corps fini tel que $\text{car}(k) \neq 2$ et F un foncteur polynomial entre espaces vectoriels, il existe un isomorphisme naturel :

$$H_*(O_\infty(k), F_\infty) \simeq \text{Tor}_*^{\mathcal{E}_k^f}(V \mapsto k[S^2(V^*)], F)$$

où \mathcal{E}_k^f désigne la catégorie des k -espaces vectoriels de dimension finie, et S^2 la seconde puissance symétrique.

Les groupes de torsion entre endofoncteurs des espaces vectoriels étant accessibles on obtient ainsi des calculs explicites d'homologie stable.

Plus précisément, dans [DV09] nous montrons que sous certaines hypothèses supplémentaires sur la catégorie \mathcal{C} , il existe une suite spectrale convergeant vers l'homologie stable des groupes $G(n)$ à coefficients tordus qui dégénère à la deuxième page. Ceci nous permet de retrouver les résultats de Betley sur l'homologie stable des groupes linéaires par des méthodes purement algébriques. Dans le cas des groupes orthogonaux on réinterprète la deuxième page de cette suite spectrale à l'aide de foncteurs de Mackey et on utilise de puissants résultats d'annulation en homologie des foncteurs pour calculer cette deuxième page.

Références

- [Bet92] S. BETLEY – « Homology of $GL(R)$ with coefficients in a functor of finite degree », *J. Algebra* **150** (1992), no. 1, p. 73–86.
- [Bet99] ———, « Stable K-theory of finite fields », *K-Theory* **17** (1999), no. 2, p. 103–111.
- [Bro82] K. S. BROWN – *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York, 1982.

- [Cha87] R. CHARNEY – « A generalization of a theorem of Vogtmann », in *Proceedings of the Northwestern conference on cohomology of groups (Evanston, Ill., 1985)*, vol. 44, 1987, p. 107–125.
- [DV09] A. DJAMENT & C. VESPA – « Sur l’homologie des groupes orthogonaux et symplectiques à coefficients tordus », (accepté aux Annales de l’ENS et disponible sur <http://arxiv.org/abs/0808.4035>), 2009.
- [Dwy80] W. G. DWYER – « Twisted homological stability for general linear groups », *Ann. of Math. (2)* **111** (1980), no. 2, p. 239–251.
- [FFPS03] V. FRANJOU, E. M. FRIEDLANDER, T. PIRASHVILI & L. SCHWARTZ – *Rational representations, the Steenrod algebra and functor homology*, Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses], vol. 16, Société Mathématique de France, Paris, 2003.
- [FFSS99] V. FRANJOU, E. M. FRIEDLANDER, A. SCORICHENKO & A. SUSLIN – « General linear and functor cohomology over finite fields », *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), no. 2, p. 663–728.
- [FP78] Z. FIEDOROWICZ & S. PRIDDY – *Homology of classical groups over finite fields and their associated infinite loop spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 674, Springer, Berlin, 1978.
- [Nak60] M. NAKAOKA – « Decomposition theorem for homology groups of symmetric groups », *Ann. of Math. (2)* **71** (1960), p. 16–42.
- [Qui72] D. QUILLEN – « On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field », *Ann. of Math. (2)* **96** (1972), p. 552–586.
- [vdK80] W. VAN DER KALLEN – « Homology stability for linear groups », *Invent. Math.* **60** (1980), no. 3, p. 269–295.
- [Wei94] C. A. WEIBEL – *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Christine Vespa

Institut de Recherche Mathématique Avancée, UMR 7501, Université de Strasbourg et CNRS,
7 rue René Descartes, 67000 Strasbourg, France.

E-mail : vespa@math.u-strasbg.fr