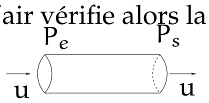
LE POUMON HUMAIN VU COMME UN ARBRE INFINI

Christine Vannier, Bertrand Maury

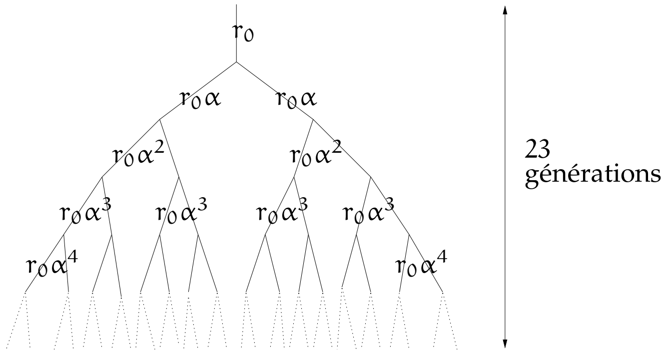
Résumé. — Nous nous proposons ici d'étudier théoriquement le poumon humain. Nous utilisons pour cela la modélisation suivante du poumon : le poumon est représenté par un arbre dyadique infini, l'air circulant dans les bronches est supposé vérifier la loi de Poiseuille, chaque arête de l'arbre est donc caractérisée par une résistance. Nous obtenons ainsi un arbre infini résistif sur lequel la pression est définie en chaque noeud et le flux d'air sur chaque arête.
La question que nous abordons ici est alors : quel sens pouvons-nous donner aux champs de pression, de flux sur l'espace des bouts de cet arbre ? Nous décrivons pour cela l'approche qui permet d'obtenir des théorèmes de trace sur l'arbre infini. Nous nous proposons aussi de donner un sens à l'opérateur Dirichlet-Neumann sur cet arbre, c'est à dire à l'opérateur qui, à un champ de pression donné sur l'espace des bouts associe le flux correspondant.

1. Introduction :

Nous proposons un modèle de poumon humain basé sur l'analogie entre un arbre bronchique et un arbre résistif infini dans le but de mieux comprendre certaines maladies. Le poumon humain peut être vu comme un arbre dyadique à 23 générations. L'air traversant chaque bronche lors de la respiration est considéré comme un fluide incompressible dans un régime d'écoulement non inertiel (en réalité cette caractéristique n'est valide qu'à partir de la cinquième génération mais nous la supposons vraie partout). Ces deux hypothèses simplificatrices nous permettent d'établir un lien entre le champ de pression aux points de bifurcation et les débits dans les bronches : en effet, le débit u de l'air vérifie alors la loi de Poiseuille : $P_e - P_s = Ru$:



Chaque bronche du poumon est donc caractérisée par une résistance dont la valeur dépend de sa longueur et de son diamètre. En particulier, lorsque le poumon est sain, celui-ci se comporte comme un arbre homogène (les résistances sont constantes par génération) et géométrique ($\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall k \in \{0 \cdots 2^n - 1\} \ : \ r_{n,k} = r_0 \alpha^n$). Un modèle couramment utilisé du poumon est alors ([**1, 4**]) :



L'étude du fonctionnement du poumon passe en particulier par la connaissance de la quantité d'air sortant de ce dernier c'est à dire par l'étude de l'opérateur linéaire :

$$p \in \mathbb{R}^{2^{23}} \to u \in \mathbb{R}^{2^{23}}$$

opérateur liant le champ de pression en sortie au flux d'air sortant. Mais il s'agit alors d'étudier une matrice pleine d'ordre 2^{23}, des vecteurs pression et flux du même ordre. Nous proposons ici une approche qui permet de remplacer ces vecteurs par un objet plus concis défini sur un arbre infini. Pour cela, nous considèrons plutôt le poumon humain comme un arbre infini résistif, les alvéoles étant alors modélisées par l'espace des bouts de cet arbre. Nous cherchons alors à définir sur cet arbre l'opérateur qui, à un champ de pression sur l'espace des bouts de notre arbre, associe le flux sortant à "l'infini". Il va donc falloir donner un sens à ces deux champs à l'infini et préciser la nature mathématique du problème de Dirichlet non homogène que nous proposons pour modéliser le processus de ventilation, processus qui se traduit (pour l'inspiration) par une circulation d'air induite par une dépression forcée au niveau des alvéoles.

2. Définition du cadre

Un arbre infini T est défini ([**2**]) par un ensemble de noeuds V et un ensemble d'arêtes $Y \subset V \times V$. Une orientation X est aussi définie par : $[x, y] \in X \Leftrightarrow [y, x] \notin X$. Un arbre infini résistif est un couple (T,r) où r est une fonction définie sur les arêtes et vérifiant : $\forall [x, y] \in Y \quad r(x, y) = r(y, x) > 0$. Nous appellons conductance de l'arête $[x, y]$, le réel $c(x, y) = \dfrac{1}{r(x, y)}$ et conductance totale en un noeud x, le réel $c(x) = \sum_{y \sim x} c(x, y)$.

Les flux vont être représentés par des fonctions appelées 1-chaînes définies sur les arêtes et vérifiant : $\forall [x, y] \in Y \quad u(x, y) = -u(y, x)$. Elles doivent de plus, pour pouvoir modéliser un flux d'air réel, être d'énergie finie. Nous définissons donc l'ensemble $\mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}$, ensemble des 1-chaînes vérifiant :

$$\mathcal{W}(u) = \sum_{[x,y]\in X} r(x,y)u(x,y)^2 \ < +\infty$$

C'est un espace de Hilbert muni de la norme $||u|| = \sqrt{\mathcal{W}(u)}$.
Les pressions sont juste représentées par des fonctions réelles définies sur les noeuds de l'arbre. Là encore, pour être admissibles, elles doivent être d'énergie finie c'est à dire telle que :

$$D(p) = \sum_{[x,y]\in X} c(x,y)[p(x) - p(y)]^2 \ < +\infty$$

On appelle $H^1(T)$ cet ensemble qui est un espace de Hilbert muni de $||p||_1 = \sqrt{\frac{1}{r_0}|p(0)|^2 + D(p)}$. Nous définissons aussi $H^1_0(T)$ completé dans $H^1(T)$ de l'ensemble des pressions à support fini.

Lors de la respiration, le flux est conservé, il vérifie donc la loi des noeuds. Pour exprimer cela rigoureusement, nous définissons sur l'ensemble des 1-chaînes et à valeur dans $\mathbb{R}^V$ l'opérateur de divergence ∂ par :

$$\forall x \in V \ \ \partial u(x) = \sum_{y\sim x} u(x,y)$$

L'ensemble des flux harmoniques est alors défini par $\mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}\mathcal{H} = \{u \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}/\partial u = 0\}$.
La pression vérifie la loi de Poiseuille, ce qui justifie la définition de l'opérateur gradient $\delta^* \ : \ \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^Y$ par :

$$\forall [x,y] \in Y \ \ \delta^* p([x,y]) = p(y) - p(x)$$

ainsi que celle de l'opérateur Laplacien : $L = \delta c \delta^*$. Enfin, nous définissons l'ensemble des pressions harmoniques par $H^1_\Delta(T) = \{p \in H^1(T)/Lp = 0\}$.

3. Equations vérifiées par le flux et la pression

Ayant défini ces opérateurs, il est alors facile d'exprimer les équations vérifiées par le flux et la pression lors, par exemple, d'une inspiration unitaire. La loi des noeuds nous donne pour le flux le problème suivant à résoudre :

$$(\mathcal{U}) \left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{R}} \\ \partial u = \delta_0 \end{array} \right.$$

La pression, elle, doit vérifier :

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} p \in H^1(T) \\ Lp = r_0 \delta_0 \end{array} \right.$$

Il est alors facile de voir que résoudre $(\mathcal{U})$ est équivalent à résoudre $(\mathcal{P})$ à une constante près.

4. Existence

Nous montrons que, pour qu'il y ait existence de solution, notre arbre infini résistif doit vérifier certaines propriétés. Pour cela commençons par définir la notion de résistance équivalente à l'infini : sur chaque arbre fini à n générations, on peut définir une résistance équivalente R_n. Nous obtenons ainsi une suite croissante et nous posons comme définition de la résistance équivalente de notre arbre infini :

$$R = \lim_{n \to +\infty} R_n.$$

Nous obtenons alors le théorème suivant :

Théorème 4.1. — *Existence de solutions* $\Leftrightarrow$ $R < +\infty$

Pour un poumon humain sain, R est bien finie : on peut respirer.

5. Unicité

Nous nous placerons dans toute la suite dans le cas R finie. Le problème de Dirichlet non homogène $(\mathcal{P})$ que nous cherchons alors à résoudre est mal posé puisqu'il n'y a pas unicité de la solution. Pour récupérer l'unicité, imposons des conditions aux limites c'est à dire des conditions en pression sur l'espace des bouts de notre arbre infini.
Nous définissons abstraitement le champ de pression sur l'espace des bouts (le choix de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ pour désigner cet espace est arbitraire, le $\dfrac{1}{2}$ n'ayant aucune signification intrinsèque, voir 5.2) par :

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = H^1(T)/H^1_0(T)$$

Muni de la norme classique des espaces quotients, c'est un espace de Hilbert.
Nous pouvons alors résoudre le problème de Dirichlet non homogène suivant :

Théorème 5.1. — *Il existe une unique solution au problème :*

$$\begin{cases} p \in H^1(T) \\ Lp = r_0 \delta_0 \\ \gamma_0(p) = g \quad , \quad g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \ \textit{donnée} \end{cases}$$

avec γ_0 *la surjection canonique.*

L'espace abstrait $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est en fait identifiable à l'espace des pressions harmoniques, espace dont on peut construire une base hilbertienne ce qui nous permet ainsi de décrire complétement $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Remarque 5.2. — Grâce à cette base hilbertienne et en plongeant l'espace des bouts dans $[0,1]$, nous pouvons, dans le cadre d'un poumon sain, identifier $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ à l'espace de Sobolev $H^s([0,1])$ avec $s \sim 0.15$ (**[3]**). Cette identification n'est plus valide dans le cas général d'un arbre non homogène.

La construction de l'opérateur $\mathcal{R}$ qui associe à un champ de pression sur l'espace des bouts le flux sortant est alors possible :

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{R} & : & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) & \rightarrow & H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ & & p & \rightarrow & u \end{array}$$

où $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = (H^1_\Delta(T))'$ est la définition abstraite de l'espace des bouts sortants à l'infini. Là encore, nous pouvons caractériser cet espace en vérifiant qu'il est bien identifiable à l'ensemble des flux harmoniques $\mathcal{L}^2_{\mathcal{R}}\mathcal{H}$.

Références

[1] C. GRANDMONT, B. MAURY, N. MEUNIER, *A viscoelastic model with a non-local dissipation term*, Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Vol. 40 No. 1, pp 201-224, 2006.

[2] P. M. SOARDI, *Potential Theory on Infinite Networks* , Springer-Verlag, 1994.

[3] P. OSWALD, *On N-term approximation by Haar functions in* H^s*-norms*.

[4] E.R. Weibel *The pathway for Oxygen. Structure and Function in the Mammalian Respiratory System*, Harvard Univ Press : Cambridge MA, 1984, 425pp.

Christine Vannier, Bertrand Maury

Laboratoire de Mathématiques, Université Paris XI, Orsay.

E-mail : `prénom.nom@math.u-psud.fr`