

PROBLÈMES FAIBLEMENT BIEN POSÉS ET DISCRÉTISATION

Sabrina Petit-Bergez

Résumé. — Nous présentons dans cet article une nouvelle définition de stabilité des schémas numériques pour les problèmes faiblement bien posés. Nous en donnons une caractérisation du type Von Neumann, nous évaluons le taux de convergence et nous le comparons à l'ordre théorique du schéma, basé sur l'erreur de troncature. Nous illustrons nos résultats sur des exemples.

La notion de problème faiblement bien posé remonte probablement à Gårding, mais le manque d'exemples en a ralenti l'étude approfondie (voir cependant [1]). L'introduction des couches PML (Perfectly Matched Layers) pour simuler la propagation des ondes électromagnétiques en milieu non borné [2], et les problèmes faiblement bien posés auxquels elle donne lieu, en a ravivé l'intérêt [3].

En effet, la méthode consiste à modifier l'équation en dédoublant le système et en ajoutant un terme d'ordre 0. Alors que le problème de départ est fortement bien posé, le problème PML n'est que faiblement bien posé.

Le but de cet article est de définir une nouvelle théorie pour la discrétisation des problèmes faiblement bien posés, dans le cas uni-dimensionnel, qui prend en compte la perte de régularité. On appliquera cette théorie à un exemple et on comparera les résultats théoriques aux résultats numériques.

1. Problèmes faiblement bien posés

On considère le problème de Cauchy :

$$(1) \quad \begin{cases} \partial_t U(t, x) + A \partial_x U(t, x) + BU(t, x) = 0 & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ U(0, x) = U^0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec $U(t, x), U^0(x) \in \mathbb{R}^N$, $A, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

Définition 1.1. — Le problème (1) est dit faiblement bien posé de défaut q_1 s'il existe $\alpha \geq 0, K > 0$, tels que pour tout $U^0 \in H^{q_1}(\mathbb{R})$, le problème (1) a une unique solution $U \in C^0(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}))$ telle que, $\forall t \geq 0$,

$$\|U(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq Ke^{\alpha t} \|U^0\|_{H^{q_1}(\mathbb{R})}.$$

Dans le cas où $q_1 = 0$, le problème est dit fortement bien posé.

Pour déterminer si un problème est faiblement bien posé, on étudie le symbole $P(i\xi) = i\xi A + B$. En effet, le résultat suivant [1] permet de se ramener à un calcul d'exponentielle de matrice :

Proposition 1.2. — *Le problème (1) est faiblement bien posé de défaut q_1 si et seulement si*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \quad \|\exp(-P(i\xi)t)\| \leq K e^{\alpha t} (1 + |\xi|^{q_1}).$$

On introduit une nouvelle caractérisation des problèmes faiblement bien posés dans le cas uni-dimensionnel, au moyen du spectre $\sigma(A)$ de A .

Proposition 1.3. — *Le problème (1) est faiblement bien posé si et seulement si, on a les deux conditions suivantes :*

- (i) *les valeurs propres de A sont réelles,*
- (ii) $\exists C > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z| > C, \forall \lambda(z) \in \sigma(P(z)), \lambda(z) = \lambda_0 z + f_\lambda(z),$
où f_λ est bornée sur $|z| > C$ et $\lambda_0 \in \sigma(A)$.

La preuve de cette proposition est basée sur le développement en série de Puiseux des valeurs propres. Cette caractérisation présente l'intérêt de contrôler les valeurs propres de $P(z)$ et non uniquement la partie réelle.

2. Etude de la stabilité faible

On considère un schéma à un pas en temps que l'on écrit sous la forme :

$$Q_{-1}V^{n+1} = Q_0V^n,$$

avec $(Q_\sigma V^n)_j = \sum_{v=-r}^p A_{v,\sigma} V_{j-v}^{n-\sigma}$ pour $\sigma \in \{-1, 0\}$.

On introduit le symbole du schéma :

$$\widehat{Q} = (\widehat{Q_{-1}})^{-1} \widehat{Q_0},$$

où $\widehat{Q_\sigma}(\xi) = \sum_{v=-r}^p A_{v,\sigma} e^{iv\xi\Delta x}$. On note $\widehat{V}(\xi)$ la transformée de Fourier discrète de $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$:

$$\widehat{V}(\xi) = \frac{\Delta x}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} e^{-ij\Delta x\xi} V_j.$$

On a alors $\widehat{V^{n+1}} = \widehat{Q} \widehat{V^n}$.

On définit, de manière analogue à la caractérisation de la proposition 1.2, la nouvelle notion de stabilité qui prend en compte la perte de régularité :

Définition 2.1. — *Le schéma est faiblement stable de défaut q_2 si*

$$\exists C, \forall \xi \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right], \quad \|(\widehat{Q_{-1}})^{-1}\|_2 \leq C, \text{ et}$$

$$\exists K_S, \exists \alpha_S, \forall n, t_n \in [0, T], \forall \xi \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right], \quad \|\widehat{Q}^n(\xi)\| \leq K_S e^{\alpha_S t_n} (1 + |\xi|^{q_2}).$$

La proposition suivante permet de se ramener à l'étude des valeurs propres de \widehat{Q} :

Proposition 2.2. — Supposons qu'il existe $K > 0$, $\theta \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $\xi \in [-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}]$, on ait $\|\widehat{Q}(\xi) - \text{Id}\| \leq K\Delta t(1 + |\xi|^\theta)$. Alors le schéma est stable si et seulement si les valeurs propres $\lambda(\xi)$ de $\widehat{Q}(\xi)$ vérifient

$$\forall \xi \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right], |\lambda(\xi)| \leq e^{\alpha_s \Delta t}.$$

Cette caractérisation permet, par exemple, d'étudier le schéma de Lax-Wendroff suivant :

$$(2) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \left(A - \frac{\Delta t}{2}(AB + BA)\right) \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\Delta t}{2} A^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \left(I - \frac{\Delta t}{2}B\right) B \frac{u_{j+1}^n + 2u_j^n + u_{j-1}^n}{4} = 0.$$

Proposition 2.3. — Si le problème continu est faiblement bien posé, alors le schéma de Lax-Wendroff (2) est faiblement stable sous condition CFL : $\forall \lambda \in \sigma(A), \left|\lambda \frac{\Delta t}{\Delta x}\right| \leq 1$.

3. Taux de convergence

Le but de cette partie est de donner une estimation du taux de convergence du schéma.

Afin de comparer les résultats théoriques aux résultats numériques, nous évaluons la différence entre la solution approchée et l'évaluée de la solution exacte aux points de la grille. On considère donc l'opérateur d'évaluation E défini par :

$$\forall u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \forall j \in \mathbb{Z}, (Eu)_j = u(x_j) = u(j\Delta x).$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 3.1. — On suppose que le problème de Cauchy (1) est faiblement bien posé et que le schéma est faiblement stable. On prend comme condition initiale $V^0 = EU^0 \in L^2(h\mathbb{Z})$.

On suppose de plus qu'il existe $r > 0$, $\rho \geq 0$, $C > 0$ et $0 \leq \delta < 1$ tels que :

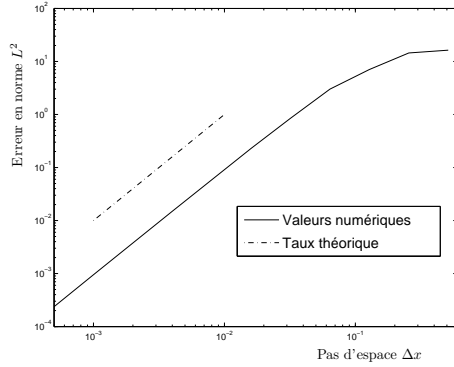
$$\forall |\xi| \leq \frac{\pi}{\Delta x^\delta}, \left\| \frac{e^{P(i\xi)\Delta t} - \widehat{Q}(\xi)}{\Delta t} \right\|_2 \leq C\Delta x^r(1 + |\xi|^2)^{\rho/2}.$$

Alors, il existe $C > 0$, $\alpha' > 0$ et $\theta > 0$ tels que $\forall U^0 \in H^{q_4}$, avec $q_4 \geq \theta$, on ait

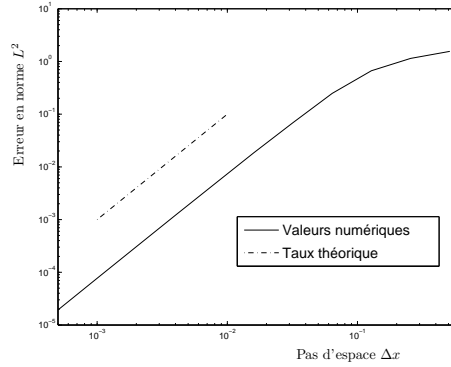
$$\|Eu(t_n, \cdot) - V^n\|_{L^2(h\mathbb{Z})} \leq Ce^{\alpha' t_n} t_n \Delta x^r \|U^0\|_{H^{q_4}(\mathbb{R})}.$$

Ce résultat montre que le comportement dans le cas faiblement bien posé est analogue à celui du cas fortement bien posé : pour une donnée initiale suffisamment régulière, le taux de convergence du schéma est égal à son ordre de convergence.

Les graphiques ci-dessous montrent l'erreur en norme L^2 observé numériquement en fonction du pas d'espace Δx ainsi qu'une droite dont la pente est le taux de convergence théorique soit 2. Dans chacun des deux exemples, A et B sont des matrices de taille 3, A ayant 1 pour seule valeur propre. On choisit $\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.9$. Et enfin, le calcul de l'erreur L^2 se fait à l'instant $t = 1$.



$q_1 = q_2 = 2$
Donnée initiale $H^{11/2}$



$q_1 = q_2 = 1$
Donnée initiale $H^{9/2}$

Ces résultats sont en accord avec le théorème 3.1 : pour une régularité suffisamment grande le taux de convergence vaut 2 ce qui est bien l'ordre du schéma de Lax-Wendroff.

Dans le cas de données initiales peu régulières, on peut également évaluer théoriquement le taux de convergence. Pour cela, on pourra consulter [4].

Références

- [1] Kreiss, Heinz-Otto and Lorenz, Jens, *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*, Pure and Applied Mathematics, 136, Academic Press Inc., 1989.
- [2] Berenger, Jean-Pierre, *A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves*, J. Comput. Phys., 114, 1994, 2, 185–200.
- [3] Abarbanel, Saul and Gottlieb, David, *A mathematical analysis of the PML method*, J. Comput. Phys., 134, 1997, 2, 357–363.
- [4] Petit-Bergez, Sabrina, *Problèmes faiblement bien posés : discrétisation et applications*, Thèse de l'Université Paris 13, en préparation .

Sabrina Petit-Bergez

LAGA - Institut Galilée - Université Paris 13, 99, avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse.

E-mail : spetit@math.univ-paris13.fr