

PERTURBATION DES PROBLÈMES DE COMMANDE OPTIMALE

Audrey Hermant

Résumé. — Dans cet article, on étudie la perturbation d'un problème de commande optimale avec une contrainte sur l'état. On donne une condition suffisante minimale de stabilité, ainsi qu'un développement au premier ordre des solutions.

1. Introduction

On s'intéresse au problème de commande optimale suivant :

$$(1) \quad (\mathcal{P}) \quad \min_{(u,y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{Y}} \int_0^T \ell(u(t), y(t)) dt + \phi(y(T))$$

soumis à l'équation d'état

$$(2) \quad \dot{y}(t) = f(u(t), y(t)) \quad \text{pour presque tout } t \in [0, T], \quad y(0) = y_0$$

et à la contrainte sur l'état

$$(3) \quad g(y(t)) \leq 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

L'espace des commandes est l'ensemble des fonctions mesurables essentiellement bornées $\mathcal{U} := L^\infty(0, T; \mathbb{R})$, et l'espace d'état l'espace de Sobolev $\mathcal{Y} := W^{1,\infty}(0, T; \mathbb{R}^n)$ des fonctions ayant presque partout une dérivée faible dans $L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$. Les applications $\ell : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont supposées de classe C^2 à dérivée seconde lipschitzienne, et la dynamique f lipschitzienne. De plus, on supposera que la condition initiale $y_0 \in \mathbb{R}^n$ satisfait **(A1)** $g(y_0) < 0$. Une trajectoire est un couple $(u, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{Y}$ satisfaisant (2).

Pour résoudre numériquement les problèmes de commande optimale, il existe les méthodes dites *directes*, basées sur une discrétisation de la trajectoire (voir par ex. [2]), et *indirectes* (ou méthodes de tir), basées sur la résolution d'un problème aux

deux bouts (voir par ex. [6]). L'avantage des secondes sur les premières est de fournir la solution avec une précision élevée et une complexité faible. En contrepartie, les secondes nécessitent pour converger une bonne initialisation des paramètres, et en présence de contraintes, une connaissance a priori de la *structure en arcs* de la solution.

Plus précisément, on appelle *arc frontière* (resp. *intérieur*) un intervalle de temps maximal \mathcal{I} tel que $g(y(t)) = 0$ (resp. $g(y(t)) < 0$) pour tout $t \in \mathcal{I}$. Un *point de contact isolé* τ est tel que $g(y(\tau)) = 0$ et $g(y(t)) < 0$ pour $t \neq \tau$ au voisinage de τ . La structure en arcs d'une trajectoire est alors la donnée du nombre d'arcs frontière et de points de contact isolés de la trajectoire, et l'ordre dans lequel ils se produisent. En général, la structure des solutions n'est pas connue. Une façon de remédier à cette difficulté est d'utiliser une méthode d'*homotopie*, voir par exemple [1]. Partant du problème non contraint (1)-(2), plus facile à résoudre, on introduit la contrainte progressivement. Il est donc intéressant d'étudier comment varient les solutions lorsqu'on perturbe les données du problème, ce qui est l'objet de cet article.

On suppose ici la contrainte sur l'état du *premier ordre*, c'est-à-dire que la fonction $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, y) \mapsto g_y(y)f(u, y)$, "dérivée temporelle" de la contrainte (3) le long de la dynamique (2), dépend explicitement de la variable de commande au voisinage de la trajectoire considérée, voir l'hypothèse (A3). Une *paramétrisation* de (\mathcal{P})

$$(4) \quad (\mathcal{P}^\mu) \quad \min_{(u, y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{Y}} \int_0^T \hat{\ell}(u(t), y(t), \mu) dt + \phi(y(T), \mu)$$

$$(5) \quad \text{soumis à} \quad \dot{y}(t) = \hat{f}(u(t), y(t), \mu) \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad y(0) = \hat{y}_0(\mu)$$

$$(6) \quad \hat{g}(y(t), \mu) \leq 0 \quad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

où μ est un paramètre appartenant à un espace de Banach M , est appelée *extension* du problème (\mathcal{P}) si (i) les applications $(\hat{\ell}, \hat{f}, \hat{g}, \hat{y}_0)$ sont de classe C^2 , avec $\hat{f}(\cdot, \cdot, \mu)$ uniformément lipschitzienne, et (ii) il existe $\mu_0 \in M$ tel que $\hat{\ell}(\cdot, \cdot, \mu_0) = \ell(\cdot, \cdot)$, etc.

2. Résultat Principal

On définit le *hamiltonien* $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^*} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$H(u, y, p) := \ell(u, y) + pf(u, y).$$

Définition 2.1. — Une trajectoire (u, y) est une *extrémale de Pontryaguine* (normale) du problème (\mathcal{P}) s'il existe une mesure de Radon η et une fonction à variation bornée p (appelé *état adjoint*), telles que :

$$(7) \quad dp(t) = H_y(u(t), y(t), p(t))dt + g_y(y(t))d\eta(t) \text{ sur } [0, T]; \quad p(T) = \phi_y(y(T))$$

$$(8) \quad u(t) \in \operatorname{argmin}_{\hat{u} \in \mathbb{R}} H(\hat{u}, y(t), p(t)) \quad \text{p.p. sur } [0, T]$$

$$(9) \quad 0 \geq g(y(t)) \text{ pour tout } t \in [0, T]; \quad d\eta \geq 0; \quad \int_0^T g(y(t))d\eta(t) = 0.$$

Si une condition de qualification est satisfaite, alors une solution locale de (\mathcal{P}) est une extrémale de Pontryaguine. On supposera que la solution nominale (\bar{u}, \bar{y}) de (\mathcal{P}) et ses (uniques) multiplicateurs associés $(\bar{p}, \bar{\eta})$ satisfont les hypothèses suivantes :

(A2) Uniforme forte convexité du hamiltonien par rapport à la variable de commande :

$$\exists \alpha > 0, \quad H_{uu}(\hat{u}, \bar{y}(t), \bar{p}(t^\pm)) \geq \alpha, \quad \text{pour tout } t \in [0, T] \text{ et tout } \hat{u} \in \mathbb{R}.$$

(A3) Uniforme régularité de la contrainte sur l'état près de l'ensemble de contact $I(y) := \{t \in [0, T]; g(y(t)) = 0\}$:

$$\exists \beta, \varepsilon > 0, \quad |g_y(\bar{y}(t))f_u(\hat{u}, \bar{y}(t))| \geq \beta, \quad \text{pour p.p. } t, \text{ dist}\{t; I(g(\bar{y}))\} \leq \varepsilon \text{ et tout } \hat{u} \in \mathbb{R}.$$

(A4) La trajectoire (\bar{u}, \bar{y}) a un nombre fini d'arcs, et $g(\bar{y}(T)) < 0$.

(A5) Complémentarité stricte uniforme sur les arcs frontière :

$$\exists \beta > 0 \quad \frac{d\bar{\eta}(t)}{dt} \geq \beta \quad \text{pour tout } t \text{ à l'intérieur des arcs frontière.}$$

(A6) Non tangentialité au second-ordre des points de contact isolés :

$$\frac{d^2}{dt^2} g(\bar{y}(t))|_{t=\tau} < 0, \quad \text{pour tout point de contact isolé } \tau.$$

Il a été montré dans [5] que sous (A2)-(A3), la commande optimale \bar{u} est continue, ainsi que les multiplicateurs \bar{p} et $\bar{\eta}$. Ceci implique en particulier que les points de contact isolés sont *non essentiels* (le saut du multiplicateur est nul), ainsi la complémentarité stricte n'est jamais satisfaite aux points de contacts isolés.

Soient l'espace des commandes (resp. états) linéarisés $\mathcal{V} := L^2(0, T; \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{Z} := H^1(0, T; \mathbb{R}^n)$). On considère le problème linéaire quadratique suivant, en une direction $d \in M$ (omettant la dépendance en t) :

$$(10) \quad (\mathcal{P}_d) \quad \min_{(v, z) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Z}} \frac{1}{2} \left\{ \int_0^T D_{(u, y, \mu), (u, y, \mu)}^2 H(\bar{u}, \bar{y}, \bar{p})((v, z, d), (v, z, d)) dt \right. \\ \left. + D^2 \hat{\phi}(\bar{y}(T), \mu_0)((z(T), d), (z(T), d)) + \int_0^T D^2 g(\bar{y}, \mu_0)((z, d), (z, d)) d\bar{\eta}(t) \right\}$$

soumis aux contraintes

$$(11) \quad \dot{z}(t) = D\hat{f}(\bar{u}, \bar{y}, \mu_0)(v, z, d) \quad \text{sur } [0, T], \quad z(0) = D\hat{y}_0(\mu_0)d$$

$$(12) \quad D\hat{g}(\bar{y}, \mu_0)(z, d) = 0 \quad \text{sur les arcs frontière de } (\bar{u}, \bar{y})$$

$$(13) \quad D\hat{g}(\bar{y}(\tau), \mu_0)(z(\tau), d) \leq 0, \quad \text{en tout point de contact isolé } \tau \text{ de } (\bar{u}, \bar{y}).$$

Le résultat principal (prouvé dans [4, 3]) est le suivant. Pour $u \in \mathcal{U}$, on note y_u^μ la solution (unique) dans \mathcal{Y} de (5) et $J^\mu(u)$ la fonction coût (4) au point $(u, y = y_u^\mu, \mu)$.

Théorème 2.2. — Soit (\bar{u}, \bar{y}) une extrémale de Pontryaguine de (\mathcal{P}) satisfaisant (A2)-(A6). Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour toute extension (\mathcal{P}^μ) de (\mathcal{P}) , il existe un voisinage (V_u, V_μ) de (\bar{u}, μ_0) , tel que pour

$\mu \in V_\mu$, il existe une unique solution locale (u^μ, y^μ) de (\mathcal{P}^μ) avec $u^\mu \in V_u$ satisfaisant la condition de croissance quadratique : il existe $c, r > 0$ tel que

$$J^\mu(u) \geq J^\mu(u^\mu) + c\|u - u^\mu\|_2^2, \quad \forall u; \|u - \bar{u}\|_\infty < r, \quad g^\mu(y_u^\mu) \leq 0 \text{ sur } [0, T].$$

(ii) La condition suffisante forte du second-ordre suivante est vérifiée : le problème de minimiser (10) pour $d = 0$ sous les contraintes (11)-(12) admet $(v, z) = 0$ pour unique solution.

Si (i) ou (ii) est satisfait, l'application $\mu \mapsto (u^\mu, y^\mu, p^\mu, \eta^\mu) \in \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \times L^\infty(0, T; \mathbb{R}^{n^*}) \times L^\infty(0, T; \mathbb{R})$ l'unique solution locale de (\mathcal{P}^μ) et multiplicateurs associés, est lipschitzienne sur un voisinage de μ_0 et Fréchet-directionnellement différentiable dans l'espace $L^r(0, T; \mathbb{R}) \times W^{1,r}(0, T; \mathbb{R}^n) \times L^r(0, T; \mathbb{R}^{n^*}) \times L^r(0, T; \mathbb{R})$ pour tout $1 \leq r < \infty$. La dérivée directionnelle dans la direction d est l'unique solution et multiplicateurs associés de (\mathcal{P}_d) . De plus, les arcs frontière sont stables et les points de contact isolés deviennent inactifs, restent points de contact ou bien se transforment en arcs frontière sur la solution du problème perturbé.

3. Exemple

On considère le problème suivant, pour des paramètres $g, h > 0$:

$$\min \int_0^1 \left(\frac{u(t)^2}{2} + gy(t) \right) dt; \quad \dot{y}(t) = u(t); \quad y(0) = 0 = y(1); \quad y(t) \geq -h.$$

Ce problème revient à déterminer la position d'équilibre d'un fil élastique de masse non nulle, fixé à ses extrémités et soumis à une force gravitationnelle. La contrainte sur l'état du premier ordre $y(t) \geq -h$ représente par exemple le niveau du sol. On considère une perturbation autour de la valeur nominale $(g_0, h_0) = (1, 1/8)$, pour laquelle on a un point de contact isolé en $\tau = 1/2$. La figure 1 montre trois directions de perturbation $d = (\delta g, \delta h)$, pour lesquelles un arc frontière apparaît.

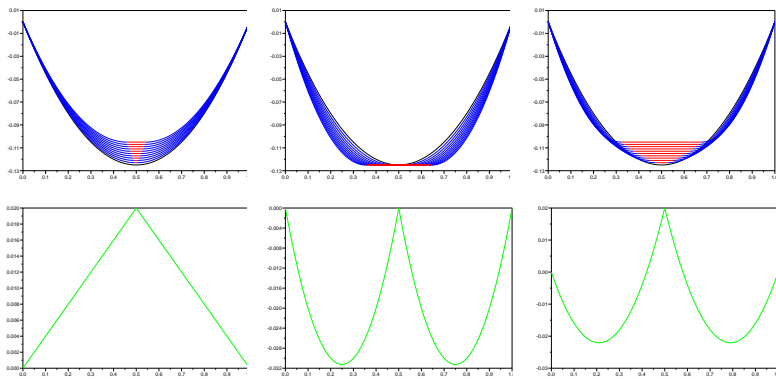


FIGURE 1. Solution du problème perturbé et dérivée directionnelle de l'état dans les directions (de gauche à droite) $d = (0, -0.02)$, $d = (1, 0)$, $d = (1, -0.02)$.

Références

- [1] P. Berkmann et H.J. Pesch. Abort landing in windshear : optimal control problem with third-order state constraint and varied switching structure. *J. Optim. Theory Appl.*, 1995.
- [2] J.T. Betts. *Practical methods for optimal control using nonlinear programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2001.
- [3] J.F. Bonnans et A. Hermant. No-gap second-order optimality conditions for optimal control problems with a single state constraint and control, to appear in *Math. Program.*
- [4] J.F. Bonnans et A. Hermant. Stability and sensitivity analysis for optimal control problems with a first-order state constraint. Rapport de Recherche INRIA, Juillet 2006.
- [5] D.H. Jacobson, M.M. Lele et J.L. Speyer. New necessary conditions of optimality for control problems with state-variable inequality constraints. *J. Math. Anal. Appl.*, 1971.
- [6] J. Stoer et R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag, 1993.

Audrey Hermant

INRIA Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay.

E-mail : `audrey.hermant@inria.fr`