A PROPOS D'ANOMALIES EN MATHÉMATIQUE ET EN PHYSIQUE

Sylvie Paycha

Résumé. — Nous montrons comment des anomalies « traciales » du côté des mathématiques peuvent se manifester en théorie des champs. Cette présentation est basée sur un article en collaboration avec A. Cardona et C. Ducourtioux [**4**].

Introduction

Le terme d'anomalie prend des sens différents selon le domaine d'application, mais dans tous les cas il s'agit d'une obstruction au sens large du terme. L'objectif de cet article est de relier les anomalies traciales du côté des mathématiques à certaines anomalies en théorie des champs du côté de la physique.

Par *anomalies traciales*, nous entendons des obstructions provenant de l'utilisation de « traces régularisées » qui étendent la trace ordinaire des matrices à l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels classiques. Elles dépendent d'un opérateur elliptique que l'on appellera le *poids*, et bien qu'elles soient de ce fait non traciales, nous les appellerons par abus de langage « traces pondérées » [**14**], [**5**]. A ces anomalies traciales est reliée l'*anomalie multiplicative* [**9**], [**13**], [**6**] du déterminant ζ qui étend le déterminant des matrices à une classe d'opérateurs pseudodifférentiels classiques ; c'est un « déterminant régularisé » de manière tout à fait analogue aux traces régularisées, qui n'est pas multiplicatif contrairement au déterminant ordinaire.

Bien que porteurs d'anomalies, les traces et déterminants régularisés s'avèrent très utiles pour décrire des systèmes physiques quantifiés. Nous montrerons comment les anomalies « mathématiques » qui découlent de leur utilisation sont liées à certains types d'*anomalies en théorie des champs*. Ces dernières correspondent le plus souvent à une obstruction à maintenir une symétrie lors de la quantification, c'est-à-dire lors du passage d'une théorie classique à une théorie quantique [**1**], [**2**], [**7**], [**12**]. Nous travaillerons ici dans le cadre de la quantification fonctionnelle qui utilise des intégrales de chemins « à la Feynman ».

1. Anomalies traciales

Nous nous proposons de généraliser la trace ordinaire $\mathrm{tr} : g\ell_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ sur l'algèbre $g\ell_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille (n,n) à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) à une algèbre d'opérateurs en dimension infinie. Le passage de la dimension finie à la dimension infinie va se faire par l'introduction d'une variété (que l'on prendra compacte, riemannienne et sans bord) notée M par la suite, ce qui va nous permettre de différentier et de « pseudodifférentier ». Sans nous attarder ici sur la notion assez technique d'opérateur pseudodifférentiel (voir l'appendice), rappelons simplement que ceux-ci généralisent les opérateurs différentiels, et que les inverses d'opérateurs différentiels sont des opérateurs pseudodifférentiels. Nous nous limiterons aux opérateurs pseudodifférentiels classiques, excluant ainsi les logarithmes de beaucoup d'opérateurs différentiels. Par contre sont encore classiques des crochets $[\log Q, A]$ de logarithmes d'opérateurs différentiels $\log Q$ avec des opérateurs différentiels classiques A, et les différentielles de familles de logarithmes d'opérateurs différentiels, $d \log Q$.

Nous nous proposons donc de remplacer l'algèbre $g\ell_n(\mathbb{K}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n)$ par l'algèbre $\mathcal{C}\ell(M, \mathbb{K}^n)$ des opérateurs pseudodifférentiels classiques agissant sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur M à valeurs dans $\mathbb{K}^n$. Lorsque M est réduit à un point, il n'y a plus de « place » pour différentier et $\mathcal{C}\ell(M, \mathbb{K}^n)$ se réduit à $g\ell_n(\mathbb{K})$. Plus généralement, on considérera un fibré vectoriel $E \to M$ basé sur M de rang n sur $\mathbb{K}$ et l'algèbre $\mathcal{C}\ell(M, E)$ des opérateurs pseudodifférentiels classiques opérant sur les sections $\mathcal{C}^\infty$ de E. Le cas où E est un fibré trivial $M \times \mathbb{K}^n$ redonne l'algèbre $\mathcal{C}\ell(M, \mathbb{K}^n)$. L'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels classiques agissant sur les sections d'un fibré E vers les sections d'un fibré F sera noté $\mathcal{C}\ell(M, E; F)$. Se pose alors le problème de remplacer la trace habituelle sur $g\ell_n(\mathbb{K})$ par une forme linéaire adéquate sur $\mathcal{C}\ell(M, E)$.

M. Wodzicki [**20**] a construit une trace sur $\mathcal{C}\ell(M, E)$, appelée depuis *résidu de Wodzicki*, qui est en fait l'unique trace sur cette algèbre à un facteur multiplicatif près si la variété sous-jacente est connexe et de dimension strictement supérieure à 1. La terminologie « résidu » s'explique par la manière dont on peut construire cette trace. Étant donnés un opérateur $A \in \mathcal{C}\ell(M, E)$ et un opérateur différentiel elliptique Q d'ordre strictement positif, que l'on supposera positif et inversible pour simplifier, l'opérateur AQ^{-z} avec z de partie réelle assez grande est « à trace » car d'ordre « assez négatif ». L'application $z \longrightarrow \mathrm{tr}(AQ^{-z})$ s'étend en une fonction méromorphe sur le plan complexe avec un pôle simple en 0. Le résidu de Wodzicki s'obtient à partir de ce résidu en 0 par la formule suivante :

$$\mathrm{res}(A) = \mathrm{ord}\, Q \cdot \mathrm{Res}_{z=0}\, \mathrm{tr}(AQ^{-z}), \tag{1}$$

où $\mathrm{ord}\, Q$ désigne l'ordre de l'opérateur Q. Bien que le membre de droite de (1) dépende apparemment de Q, le résidu $\mathrm{res}(A)$ est indépendant du choix de Q. Ce résidu de Wodzicki, qui est tracial, i.e. tel que $\mathrm{res}\,([A, B]) = 0$ pour tout $A, B \in \mathcal{C}\ell(M, E)$, a de plus une *propriété de localité*. Il peut se représenter par une intégrale, sur la variété sous-jacente M, d'une expression dépendant du symbole de A (le symbole permet de définir l'opérateur par transformée de Fourier, voir l'appendice) :

$$\operatorname{res}(A) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_M \operatorname{dvol}(m) \left(\int_{|\xi|=1} \operatorname{tr}_m \sigma_{-n}(m,\xi) d\xi \right), \tag{2}$$

où $\sigma_{-n}(m,\xi)$, $m \in M$, $\xi \in T_m^* M$, est la composante positivement homogène en ξ de degré $-n$ du symbole $\sigma(m,\xi)$ de A, n étant la dimension de M, l'homogénéité étant à entendre au sens suivant $\sigma_{-n}(m, t\xi) = t^{-n}\sigma_{-n}(m,\xi)$ pour tout $t > 0$. Le résidu de Wodzicki, qui semble donc avoir toutes les qualités requises pour pouvoir jouer, sur l'algèbre $\mathcal{C}\ell(M,E)$, le rôle que jouait la trace ordinaire tr sur l'algèbre $g\ell_n(\mathbb{K})$, a cependant un défaut de taille. Il ne « voit » pas les opérateurs de rang fini qui sont justement ceux qui gardent la mémoire de la dimension finie ; en effet si A est de rang fini, alors res(A) est nul. Pour pallier ce problème, nous allons laisser le résidu de Wodzicki sur le bord du chemin pour l'instant, quitte à le retrouver plus tard au détour d'un autre sentier, quelque peu sinueux.

Changeons radicalement de point vue et plutôt que de prendre le résidu en zéro de la fonction méromorphe $z \mapsto \operatorname{tr}(AQ^{-z})$, retranchons-le pour ne retenir que la partie finie (ce qui correspond à un procédé de régularisation en physique) :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}^Q(A) &= \operatorname{Pf}\left(\operatorname{tr}(AQ^{-z})\right)_{z=0} \\ &= \left(\operatorname{tr}(AQ^{-z}) - \frac{1}{z} \operatorname{Res}_{z=0}(\operatorname{tr}(AQ^{-z}) \right)_{z=0}. \end{aligned} \tag{3}$$

La fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{C}\ell(M,E)$ ainsi définie, que l'on appelera *trace pondérée* par Q, Q étant appelé le *poids*, semble avoir tous les défauts.

– tr^Q n'est pas traciale. Son cobord (dans la cohomologie de Hochschild) s'écrit :

$$\partial \operatorname{tr}^Q(A,B) := \operatorname{tr}^Q([A,B]) = -\frac{1}{\operatorname{ord} Q} \operatorname{res}(A[B, \log Q]), \tag{4}$$

– tr^Q dépend du choix de Q ; étant donnés deux poids Q_1 et Q_2 d'ordres strictement positifs :

$$\operatorname{tr}^{Q_1}(A) - \operatorname{tr}^{Q_2}(A) = -\operatorname{res}\left(A \left(\frac{1}{\operatorname{ord} Q_1} \log Q_1 - \frac{1}{\operatorname{ord} Q_2} \log Q_2 \right) \right). \tag{5}$$

– Par conséquent tr^Q ne commute pas avec la différentiation : étant donnée une famille d'opérateurs différentiels elliptiques Q d'ordre strictement positif, paramétrée par une variété, nous avons la relation :

$$[d, \operatorname{tr}^Q](A) := (d \circ \operatorname{tr}^Q - \operatorname{tr}^Q \circ d)(A) = -\frac{1}{\operatorname{ord} Q} \operatorname{res}(A \, d \log Q). \tag{6}$$

Les égalités (4)-(6), auxquelles nous nous référerons par le terme générique d'*anomalies traciales*, appellent quelques remarques, tout d'abord sur leur histoire. C'est dans le cadre de la physique et plus particulièrement celui de la quantification géométrique que sont apparus le cocycle de Radul $\partial\,\mathrm{tr}^Q$ et son expression comme résidu de Wodzicki (voir [**10, 18**]) dans le cas particulier où $Q = |D|$ est le module d'un opérateur de Dirac et M de dimension 1. Melrose et Nistor [**11**] ont généralisé cette formule à une dimension quelconque et à des poids Q plus généraux. Dans [**5**] nous avons fait cette même généralisation sans avoir eu connaissance des résultats de [**11**], et ce sur la base d'une formule de Kontsevich et Vishik [**9**],

$$\mathrm{Res}_{z=0}\,\mathrm{tr}(A(z)) = -\frac{1}{\alpha'(0)}\,\mathrm{res}(A(0)),$$

reliant plus généralement le résidu complexe en 0 de fonctions du type $z \to \mathrm{tr}(A(z))$, où $A(z)$ est une famille holomorphe d'opérateurs pseudodifférentiels classiques, au résidu de Wodzicki res $(A(0))$, $\alpha(z)$ désignant l'ordre de $A(z)$ et α' la dérivée de α. C'est aussi sur la base de cette même formule de Kontsevich et Vishik que nous avons pu établir dans [**5**] les formules (5) et (6). Voici maintenant quelques remarques utiles pour comprendre les formules (4) à (6).

– Les résidus de Wodzicki des membres de droite de (4), (5) et (6) sont bien définis puisque nous avons observé que les crochets du type $[A, \log Q]$, les différences et les différentielles $d\log Q$ sont classiques malgré le fait que $\log Q$ lui-même ne le soit pas.

– Ces formules donnent des expressions « locales » des anomalies traciales au sens de la propriété de localité du résidu explicitée dans (2).

Ayant laissé de côté le résidu de Wodzicki, nous le voyons donc réapparaître comme obstruction à la tracialité de tr^Q et à la possibilité d'échanger différentiation d et trace pondérée tr^Q. Il semble donc n'y avoir aucun argument en faveur des traces pondérées (terminologie abusive puisqu'elles ne sont pas traciales, mais qui s'avère bien pratique). Elles présentent cependant l'énorme avantage de conserver la mémoire de la dimension finie, au sens où elles coïncident avec la trace ordinaire des opérateurs de rang fini,

$$\mathrm{rg}(A) < \infty \implies \mathrm{tr}^Q(A) = \mathrm{tr}(A).$$

Rendons-leur justice en observant qu'elles ont de plus une propriété de covariance qui s'avérera bien utile par la suite :

$$\mathrm{tr}^{C^{-1}QC}(C^{-1}AC) = \mathrm{tr}^Q(A),$$

A étant un pseudo-différentiel classique quelconque, C un pseudo-différentiel inversible.

2. Les déterminants ζ : anomalies là encore

Après les traces, c'est maintenant aux déterminants d'entrer en scène. Ils sont très intimement liés aux traces par la formule

(7) $$\det Q = \exp\circ\,\mathrm{tr}\circ\log Q,$$

qui vaut pour toute matrice $Q \in GL_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées de taille (n, n) inversibles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Il est donc naturel de chercher quel type de déterminant peut s'obtenir de manière analogue à partir de traces pondérées. Pour cela, il est utile de généraliser la notion de trace pondérée aux logarithmes d'opérateurs elliptiques classiques. Suivons la démarche adoptée dans [**6**] et commençons par définir $\mathrm{tr}^Q(\log Q)$ où Q est supposé elliptique admissible, ce qui correspond à une condition d'existence d'une coupure spectrale (il s'agit d'une condition technique qui permet de s'assurer que les logarithmes et les puissances complexes de tels opérateurs ont bien un sens). Un opérateur autoadjoint est admissible, et a fortiori un opérateur autoadjoint positif l'est aussi. La fonction $z \to \mathrm{tr}(\log Q Q^{-z}) = -\frac{d}{dz}\,\mathrm{tr}(Q^{-z}) = -\frac{d}{dz}\zeta_Q(z)$, où on a posé $\zeta_Q(z) := \mathrm{tr}(Q^{-z})$, admet une limite en 0 ce qui permet de définir la trace pondérée $\mathrm{tr}^Q(\log Q) := \lim_{z\to 0} \mathrm{tr}(\log Q Q^{-z})$. Compte tenu du fait que la différence (pondérée par les ordres) de deux logarithmes est un opérateur classique, on peut poser, pour un opérateur elliptique A admissible d'ordre strictement positif,

$$\mathrm{tr}^Q(\log A) := \frac{\mathrm{ord}\,A}{\mathrm{ord}\,Q}\,\mathrm{tr}^Q(\log Q) + \mathrm{tr}^Q(\log A - \frac{\mathrm{ord}\,A}{\mathrm{ord}\,Q}\log Q).$$

La formule d'anomalie (5) s'étend aux logarithmes de la façon suivante [**13**], [**6**] :

$$\begin{aligned}(8)\quad & \mathrm{tr}^{Q_1}(\log A) - \mathrm{tr}^{Q_2}(\log A) \\ &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{res}\left[\left(\log A - \frac{\mathrm{ord}\,A}{\mathrm{ord}\,Q_1}\log Q_1\right)\left(\frac{\log Q_1}{\mathrm{ord}\,Q_1} - \frac{\log Q_2}{\mathrm{ord}\,Q_2}\right)\right] \\ &\qquad - \frac{1}{2}\,\mathrm{res}\left[\left(\log A - \frac{\mathrm{ord}\,A}{\mathrm{ord}\,Q_2}\log Q_2\right)\left(\frac{\log Q_1}{\mathrm{ord}\,Q_1} - \frac{\log Q_2}{\mathrm{ord}\,Q_2}\right)\right]\end{aligned}$$

et donne donc à nouveau lieu à un terme de résidu.

Le *déterminant* ζ se définit alors tout naturellement en remplaçant dans (7) tr par tr^Q :

$$(9)\qquad \det_\zeta Q := \exp \circ\, \mathrm{tr}^Q \circ \log(Q) = \exp\left(-\zeta_Q'(0)\right).$$

La dépendance en Q de la trace pondérée tr^Q dans le membre de droite de (9) est source de multiples difficultés. Elle donne en particulier lieu à *l'anomalie multiplicative* traduisant le fait que $\det_\zeta(AB) \neq \det_\zeta A \det_\zeta B$, anomalie qui fait l'objet de l'article de Kontsevich et Vishik [**9**] mentionné plus haut, ainsi que de [**13**], [**6**]. Si A et B sont deux opérateurs elliptiques qui commutent et qui sont suffisamment proches (dans un sens spectral que nous éludons ici) d'opérateurs positifs et de plus d'ordres strictement positifs, alors l'anomalie multiplicative

$$F_\zeta(A, B) := \frac{\det_\zeta(AB)}{\det_\zeta(A)\det_\zeta(B)}$$

s'écrit à l'aide de la formule d'anomalie traciale (8) :

$$\begin{aligned}\log F_\zeta(A,B) &= \left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}^{AB}(\log A) - \operatorname{tr}^{A}(\log A)\right) + \left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}^{AB}(\log B) - \operatorname{tr}^{B}(\log B)\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{ord} A\cdot \operatorname{ord} B}{\operatorname{ord} A + \operatorname{ord} B}\cdot \operatorname{res}\left(\frac{\log A}{\operatorname{ord} A} - \frac{\log B}{\operatorname{ord} B}\right). \qquad (10)\end{aligned}$$

En particulier, si $A = B$ on obtient $F_\zeta(A,B) = 1$. Cette anomalie multiplicative, s'exprimant comme les précédentes en fonction du résidu de Wodzicki, hérite de la propriété de localité du résidu de Wodzicki.

Ce sont les variations logarithmiques de déterminants qui sont les plus utiles pour les applications physiques. Revenant momentanément à la dimension finie, en dérivant la relation (7) appliquée à une famille différentiable $\{Q_t, t \in [0,1]\}$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\log\det Q_t = \operatorname{tr}(Q_t^{-1}\dot{Q}_t),$$

formule que l'on établit en utilisant la cyclicité de la trace tr. Ici et dans ce qui suit, on pose $\dot{Q}_t := \frac{d}{dt}Q_t$. De même en dérivant la relation (9) on obtient :

$$\frac{d}{dt}\log\det{}_\zeta Q_t = \operatorname{tr}^{Q_t}(Q_t^{-1}\dot{Q}_t),$$

et ce malgré la non cyclicité des traces pondérées. C'est le fait que le poids Q_t commute avec toutes les puissances de Q_t, ce qui combiné avec la propriété de covariance de la trace pondérée permet de conclure.

3. Les déterminants ζ au service de la quantification fonctionnelle

En dimension finie, les déterminants apparaissent naturellement dans le calcul d'intégrales gaussiennes :

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle Qx,x\rangle}dx = (\det Q)^{-1/2},$$

où Q est une matrice symétrique définie positive, et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$. Par analogie, on calcule les intégrales gaussiennes de chemins qui apparaissent dans la quantification fonctionnelle (bosonique, le cas fermionique faisant appel à des intégrales de Berezin), en substituant au déterminant ordinaire le déterminant ζ :

$$\int_{\text{configurations }\varphi} e^{-\frac{1}{2}\langle Q\varphi,\varphi\rangle}\mathcal{D}^Q[\varphi] = (\det{}_\zeta Q)^{-1/2}, \qquad (11)$$

Q étant un opérateur elliptique admissible, inversible et d'ordre strictement positif, et $\mathcal{A}(\varphi) := \langle Q\varphi,\varphi\rangle$ correspondant à l'action classique décrivant le système physique dont on veut étudier le comportement quantique. Ces intégrales sur un espace de configurations (typiquement de dimension infinie) d'un système physique sont à comprendre comme des objets formels définis par le membre de droite. Les « mesures de volume » formelles $\mathcal{D}^Q[\varphi]$ –qui sont surtout là pour indiquer qu'on va calquer les procédés de calcul de ces intégrales sur ceux d'intégrales en dimension finie– dépendent a priori du choix de Q et il faudra tenir compte de cette dépendance dans ces calculs. De même que le poids Q avait servi à pondérer des traces de manière à extraire une partie finie d'expressions a priori divergentes, il sert ici à « extraire une partie finie » de ces intégrales de chemin formelles a priori mal définies.

Regardons comment cette dépendance en Q peut influer. A titre comparatif, opérons tout d'abord un changement de variable $\widetilde{x} = Cx$ dans une intégrale gaussienne en dimension finie et appelons J le jacobien de la transformation :

$$(12)\qquad \begin{array}{rcl} (\det Q)^{-1/2} & = & \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle Q\widetilde{x},\widetilde{x}\rangle} d\widetilde{x} \\ & = & \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle QCx,Cx\rangle} J dx \\ & = & J \cdot \det(C^*QC)^{-1/2}. \end{array}$$

Ceci s'écrit encore

$$J := \frac{(\det(C^*QC))^{1/2}}{(\det Q)^{1/2}} = \sqrt{\det(C^*C)} = |\det C|.$$

Par analogie, quitte à remplacer les déterminants ordinaires par des déterminants ζ, on pourrait penser que le module du déterminant jacobien d'une transformation $\widetilde{\varphi} = C\varphi$ dans (11) s'écrit comme quotient de déterminants ζ. Or le même type d'obstacle, source de l'anomalie multiplicative, est ici aussi source de problèmes.

Soit C un opérateur elliptique inversible d'ordre positif (pouvant être nul), C^* son adjoint formel (par rapport à une structure L^2 sur l'espace des sections sur lequel il agit), alors Q ayant été supposé positif (ou « suffisamment proche » d'un positif), C^*QC est un opérateur elliptique positif (ou « suffisamment proche » d'un positif) et d'ordre strictement positif de sorte qu'on peut définir son déterminant ζ sans problème. Un calcul analogue à celui qui précède donnerait le déterminant jacobien,

$$J_Q := \frac{\det_\zeta(C^*QC)^{1/2}}{(\det_\zeta Q)^{1/2}}.$$

Or il ne coïncide pas en général avec

$$\widetilde{J} := \sqrt{\det_\zeta(C^*C)},$$

ce dernier déterminant n'étant d'ailleurs défini que si C est un opérateur elliptique d'ordre strictement positif, ce qui n'est pas toujours le cas dans les applications, où il peut être d'ordre nul. Ce phénomène résulte de l'anomalie multiplicative (10) par les égalités

$$J_Q^2 = \frac{\det_\zeta(C^*QC)}{\det_\zeta Q} = \frac{\det_\zeta(QC^*C)}{\det_\zeta Q} = F_\zeta(Q, C^*C)\det_\zeta(C^*C) = F_\zeta(Q, C^*C) \cdot \widetilde{J}^2.$$

La deuxième égalité s'obtient en vérifiant que la famille $Q_t := Q^t C^* Q^{1-t} C$, $t \in [0,1]$, d'opérateurs elliptiques d'ordre constant qui interpole C^*QC et QC^*C a un déterminant constant, puisque $\frac{d}{dt}\log \det_\zeta Q_t = 0$. La troisième égalité résulte de la définition de l'anomalie multiplicative.

Dans les applications physiques, le déterminant jacobien est souvent défini par J_Q si C est un opérateur de multiplication (par exemple en théorie de jauge), par $\widetilde{J}$ si C est un opérateur elliptique d'ordre strictement positif (par exemple dans le procédé de Faddeev-Popov appliqué aux cordes). Plus précisément, il s'agit là du module d'un déterminant jacobien dont on souhaite étudier aussi les variations de la « phase » si tant est qu'elle puisse être définie.

4. Anomalies traciales et géométrie

Il est utile, pour situer le problème, de revenir avant tout au contexte matriciel $gl_n(\mathbb{C})$ de la section 1 en prenant ici $\mathbb{K} := \mathbb{C}$. Soit $A_t, t \in [0,1]$, un chemin continu tracé dans $GL_n(\mathbb{C})$ reliant $A_0 = \mathrm{Id}$ à $A_1 = A$. Le déterminant s'écrit

$$\det A = \exp \int_0^1 \mathrm{tr}(A_t^{-1}\dot{A}_t)dt,$$

et ceci indépendamment du chemin choisi dans $GL_n(\mathbb{C})$. Ici $\dot{A}_t := \frac{d}{dt}A_t$. Plus généralement, étant données une variété X et une famille de matrices $\{A_x \in GL_n(\mathbb{C}), x \in X\}$, l'expression $\mathrm{tr}(A^{-1}dA)$ définit une 1-forme sur X. Définir la fonction $x \to \det A_x$ revient à résoudre l'équation différentielle en $s \in \Omega^0(X, \mathbb{C}^*)$

$$s^{-1}ds = \mathrm{tr}(A^{-1}dA). \tag{13}$$

La condition d'intégrabilité

$$0 = d\,\mathrm{tr}(A^{-1}dA) = -\,\mathrm{tr}(A^{-1}dAA^{-1}dA)$$

est trivialement vérifiée grâce à la cyclicité de la trace. En effet, étant donnés deux vecteurs U, V tangents à X en un point x,

$$d\,\mathrm{tr}(A^{-1}dA)(U,V) = -\partial\,\mathrm{tr}(A^{-1}dA(U), A^{-1}dA(V)) = 0,$$

où, comme précédemment, $\partial\,\mathrm{tr}$ désigne le cobord de tr.

Dans ce qui suit on interprétera, dans un cadre plus général, $\mathrm{tr}(A^{-1}dA)$ comme une connexion sur un fibré déterminant, sa différentielle extérieure étant sa courbure, et le transport parallèle $\exp\int_c \mathrm{tr}(A^{-1}dA)$ le long d'un lacet c de X comme l'holonomie de la connexion. Remplaçons le groupe des matrices $GL_n(\mathbb{C})$ par l'ensemble $\mathrm{Ell}^*_{\mathrm{ord}>0}(M, E; F)$ des opérateurs pseudodifférentiels elliptiques inversibles classiques agissant des sections $\Gamma(M, E)$ d'un fibré E vers les sections $\Gamma(M, F)$ d'un fibré F, tous deux des fibrés hermitiens de même rang basés sur une variété riemannienne compacte sans bord M. Substituons à l'équation (13) une équation dans laquelle la trace ordinaire a été remplacée par une trace pondérée,

$$s^{-1}ds = \mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA), \tag{14}$$

où $\{A_x \in \mathrm{Ell}^*(M, E; F), x \in X\}$ désigne une famille d'opérateurs elliptiques inversibles, admissibles (avec coupure spectrale commune, une condition technique pour donner un sens aux divers déterminants et traces régularisés dont on aura besoin) et d'ordre constant strictement positif. La condition d'intégrabilité qui s'écrit

$$0 = d\,\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA) = -\,\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dAA^{-1}dA) + [d, \mathrm{tr}^Q](A^{-1}dA)$$

n'est plus trivialement vérifiée, le terme $d\,\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA)$ s'interprétant comme une anomalie traciale. Étant donnés deux de vecteurs U, V tangents à la variété X en un point x :

(15)

$$d\,\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA)(U, V) = -\partial\,\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA(U), A^{-1}dA(V)) + [d, \mathrm{tr}^Q](A^{-1}dA)(U, V),$$

combinaison des anomalies traciales (4) et (6). Si l'équation (14) admet une solution, c'est maintenant d'une solution vectorielle s qu'il s'agit et plus forcément d'une fonction complexe. Celle-ci s'interprète comme section d'un fibré déterminant à la Quillen [**16**] associé à la famille $\{A_x, x \in X\}$; il s'agit d'un fibré en droites de base X que l'on notera $\mathcal{L}_A$. La fonction « module du déterminant des opérateurs A » s'interprète comme une *métrique* sur $\mathcal{L}_A$, introduite par Quillen [**16**],

$$\|\,\mathrm{Det}\,A\|_Q := \sqrt{\det_\zeta(A^*A)} := \det_\zeta |A|.$$

La 1-forme $\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA)$ s'interprète, lorsque $Q := A^*A$, comme une *connexion* sur $\mathcal{L}_A$, introduite par Bismut et Freed [**3**]. Elle est compatible avec la métrique de Quillen puisque sa partie réelle coïncide avec la variation logarithmique de la métrique

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA) &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA)\right) + i\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}d\log\det_\zeta Q + i\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA)\right).\end{aligned} \tag{16}$$

L'obstruction $d\,\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA)$ s'interprète alors comme la *courbure* de la connexion de Bismut-Freed que ceux-ci appellent *anomalie géométrique locale* [**3**]. Elle se réduit dans le cas présent à une anomalie traciale et on a le schéma suivant :

$$\begin{aligned}\text{anomalie géométrique locale} &\longleftrightarrow \text{courbure sur le fibré déterminant} \\ &\longleftrightarrow \text{anomalie traciale}\end{aligned}$$

A cette anomalie locale, s'ajoute une seconde obstruction, une *anomalie géométrique globale* [**19**] mesurée par l'holonomie de la connexion [**3**]. Elle est donnée par le transport parallèle
$\exp\int_c \mathrm{tr}^{A^*A}(A^{-1}dA)$ le long de lacets c de X. Dans le cas où ces deux anomalies géométriques s'annulent, on peut construire une section canonique plate globale du fibré déterminant, dont on se sert alors comme section de référence. A partir d'une section s du fibré déterminant, on obtient alors une « fonction déterminant » comme quotient de cette section par la section de référence.

5. Anomalies en théorie des champs et anomalies traciales

Dans une théorie des champs classique, les trajectoires sont obtenues en minimisant l'action classique donnée par une fonctionnelle sur l'espace des configurations. Celle-ci peut, dans certains cas, être invariante par l'action d'un groupe de transformations agissant sur l'espace des configurations. Le procédé de quantification qui, du point de vue de la quantification fonctionnelle (initiée par Richard Feynman), revient à prendre une « moyenne » sur l'espace des configurations à l'aide de mesures de volume formelles en utilisant des intégrales de chemin du type (11), se fait souvent au prix d'une rupture de cette invariance. On quantifie ce phénomène en introduisant la notion d'*anomalie*, définie (ici encore grossièrement, nous y reviendrons plus tard dans un contexte plus géométrique) comme *« variation logarithmique de déterminants jacobiens de transformations qui laissent invariante l'action classique »* (nous omettrons ici le signe $-$ habituel).

Arrêtons nous tout d'abord au cas (bosonique) d'une action classique $\mathcal{A}$ donnée par la fonctionnelle quadratique $\varphi \to \mathcal{A}(\varphi) := \langle A\varphi, \varphi\rangle$, $A \in \mathcal{C}\ell(M, E)$ étant un opérateur différentiel elliptique inversible autoadjoint. Alors le déterminant ζ (étendu aux opérateurs autoadjoints non positifs) permet de définir la fonction de partition correspondante, en posant comme en (11),

$$Z \text{ « := » } \int_{\text{configurations } \varphi} e^{-\frac{1}{2}\langle A\varphi, \varphi\rangle} \mathcal{D}^A[\varphi] := (\det_\zeta A)^{-1/2}.$$

Avec les notations de la section 3, une famille de transformations $C_x, x \in X$, sur l'espace des configurations, indexée par une variété X (on supposera les transformations C_x elliptiques), induit une famille de jacobiens $\{J_x, x \in X\}$, et la 1-forme sur X donnée par une variation logarithmique,

$$J_x^{-1} dJ_x := \det_\zeta(A_x)^{-1} d\left(\det_\zeta(A_x)\right),$$

où on a posé $A_x := C_x^* Q C_x$ (ou $A_x := C_x^* C_x$ selon les cas), peut s'interpréter comme une anomalie. Lorsque $A_x := C_x^* A C_x$, Q_x est vue comme une déformation de Q, et l'anomalie peut s'écrire comme (l'opposé de la) variation dW de l'*action effective* $W(x)$ définie par

$$e^{-W(x)} := \int_{\text{configurations } \varphi} e^{-\frac{1}{2}\langle A_x\varphi, \varphi\rangle} \mathcal{D}^A[\varphi] = (\det_\zeta A_x)^{-1/2}.$$

Dans le cas fermionique, l'action est donnée par $\mathcal{A}(\psi, \overline{\psi}) = \langle B\psi, \overline{\psi}\rangle$, où $\psi \in \Gamma(M, E)$ et $\overline{\psi} \in \Gamma(M, F)$ sont des sections des fibrés E et F respectivement, et où $B \in \mathcal{C}\ell(M, E; F)$ est un opérateur elliptique. L'intégration gaussienne bosonique définissant la fonction de partition est alors remplacée par une intégration gaussienne fermionique, du type Berezin,

$$e^{-W(x)} := \int_{\text{configurations } \psi, \overline{\psi}} e^{-\langle B_x\psi, \overline{\psi}\rangle} \mathcal{D}^B[\psi]\mathcal{D}^B[\overline{\psi}] = \text{« } \det_\zeta B_x \text{ ».}$$

Dans ce cas, la définition du déterminant « $\det_\zeta B_x$ » pose problème puisque B_x envoie les sections de E sur les sections de F ; on l'interprète, comme dans la section 4, comme une section d'un fibré déterminant. L'opérateur $B_x^* B_x \in \mathcal{C}\ell(M, E)$ étant autoadjoint positif, s'il est elliptique d'ordre strictement positif, on peut définir son déterminant ζ de sorte que le module du déterminant de B_x peut être défini par $|\det_\zeta B_x| := \sqrt{\det_\zeta(B_x^* B_x)}$. C'est la « phase » $\frac{\text{« } \det_\zeta B_x \text{ »}}{|\det_\zeta B_x|}$ du déterminant de B qui pose problème et c'est en général des variations logarithmiques de la phase que surgissent des anomalies en théorie des champs, qui sont de type *chiral* dans ce cadre fermionique.

Ces anomalies géométriques constituent autant d'obstacles à construire une théorie quantique invariante par un certain groupe de symétries sous l'action duquel l'action classique $\langle B_x\psi, \overline{\psi}\rangle$ serait invariante. Typiquement, le groupe de symétries agit sur $\langle B_x\psi, \overline{\psi}\rangle$ par une action sur la famille d'opérateurs B_x induite par une action sur X. Cependant, la fonction de partition correspondante donnée par « $\det_\zeta(B_x)$ » n'a a priori aucune raison de rester invariante par l'action du groupe. Sa variation logarithmique dans la direction de l'algèbre de Lie du groupe de symétries ne s'annule pas en général, ni même sa « deuxième variation logarithmique » ; autrement dit, ni la connexion sur le fibré déterminant $\mathcal{L}$ associé à la famille $\{B_x, x \in X\}$, ni même la courbure de cette dernière ne s'annulent dans les directions tangentes à l'action du groupe [**8**].

C'est encore par une anomalie traciale que peut se mesurer l'obstruction correspondante concernant la courbure. En effet, $\mathcal{G}$ étant un groupe de Lie (typiquement un groupe de jauge de dimension infinie) agissant sur la variété X, x étant un point de X, désignons par

$$
\begin{aligned}
\theta_x : \mathcal{G} &\longrightarrow X \\
g &\longmapsto x \cdot g
\end{aligned}
\tag{17}
$$

l'application induite par cette action, qui envoie un élément du groupe dans l'orbite de x sous l'action de ce groupe. La 1-forme $\operatorname{tr}^Q(A^{-1}dA)$ sur X, correspondant à la connexion de Bismut-Freed, induit une 1-forme $\theta^*\left(\operatorname{tr}^Q(A^{-1}dA)\right)$ sur $\mathcal{G}$ par tiré en arrière sous l'action de θ. D'après (15), sa différentielle extérieure s'interprète comme une anomalie traciale : pour tous u et v éléments de l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}$,

$$
\theta^*\left(\operatorname{tr}^Q(A^{-1}dA)\right)(u,v) = -\partial\operatorname{tr}^Q(A^{-1}dA(U), A^{-1}dA(V)) + [d, \operatorname{tr}^Q](A^{-1}dA)(U,V),
$$

où on a posé $U = d\theta(u)$ et $V = d\theta(v)$. Cette anomalie traciale constitue l'une des obstructions au fait que la connexion de Bismut-Freed puisse induire une connexion sur le fibré déterminant quotient : $\mathcal{L}/\mathcal{G} \to X/\mathcal{G}$. Elle peut aussi s'interpréter comme une obstruction aux relations de compatibilité de Wess-Zumino (Wess-Zumino consistency relations) dans l'approche BRS (Becchi-Rouet-Stora) des anomalies de jauge.

Cette discussion peut se résumer par le schéma de correspondances suivant :

(tiré en arrière sur le groupe de jauge de l') anomalie géométrique locale

$\longleftrightarrow$ obstructions aux relations de compatiblité de Wess-Zumino

$\longleftrightarrow$ (tiré en arrière sur le groupe de jauge de la) courbure sur le fibré déterminant

$\longleftrightarrow$ anomalie traciale.

Dans ce qui précède, la variété M et les fibrés E et F basés sur M sont fixes, ce qui correspond typiquement au cadre géométrique des *anomalies de jauge*. Le cas des *anomalies gravitationnelles* nécessitant non plus une variété et un fibré vectoriel fixes mais une famille de variétés $\{M_x, x \in X\}$ et une famille de fibrés vectoriels $\{E_x, x \in X\}$ et $\{F_x, x \in X\}$ basés sur les M_x étant plus compliqué, nous n'en dirons ici que quelques mots, en laissant de côté la description précise (voir [**3**]) du cadre géométrique correspondant. Quitte à remplacer dans les expressions précédentes, la différentielle extérieure d par une dérivation covariante ∇ qui tient compte de la géométrie de la fibration en variétés sous-jacente, la connexion de Bismut-Freed s'écrit $\mathrm{tr}^Q(A^{-1}[\nabla, A])$ où l'on a posé $[\nabla, A] := \nabla A - A\nabla$. Quant à l'*anomalie chirale (géométrique) locale*, qui correspond à la courbure sur le fibré déterminant $\mathcal{L}_A$ associé à la famille $\{A_x, x \in X\}$ agissant sur les sections des fibrés $E_x \to M_x$ et à valeurs dans les sections des fibrés $F_x \to M_x$, en posant $Q_x = A_x^* A_x$ où A_x^* est l'adjoint (formel) de A_x, elle s'écrit [**15**] :

$$
\begin{aligned}
d\,\mathrm{tr}^Q(A^{-1}[\nabla, A]) &= \frac{1}{2} d\,\mathrm{str}^Q(Q^{-1}[\nabla^2, Q]) \\
&= -\,\mathrm{str}^Q(\nabla^2) + \frac{1}{2}\left[\nabla, \mathrm{str}^Q\right](Q^{-1}[\nabla, Q]) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\mathrm{str}^Q(Q^{-1}[\nabla, Q]Q^{-1}[\nabla, Q]) \\
&= -\,\mathrm{str}^Q(\nabla^2) + \text{ anomalie traciale.}
\end{aligned} \tag{18}
$$

Si le terme $\mathrm{str}^Q(\nabla^2)$ est local, l'anomalie traciale étant elle aussi locale comme résidu de Wodzicki, on peut s'attendre à une expression locale de la courbure. Dans le cas d'une famille d'opérateurs de Dirac sur des variétés spin, Bismut et Freed [**3**] ont exprimé cette courbure comme (limite du) terme de second degré du caractère de Chern d'une famille de superconnexions [**17**] construites à partir de ∇ et de la famille d'opérateurs. Le théorème d'indice des familles donne alors une expression locale explicite de cette courbure en fonction de la géométrie sous-jacente ; cette anomalie géométrique locale correspond à une anomalie qui sous-tend la quantification des cordes [**8**]. Ici la géométrie sous-jacente se mêle donc (sous la forme du terme $\mathrm{str}^Q(\nabla^2)$) à l'anomalie traciale pour donner une anomalie chirale.

6. Conclusion

Les anomalies en théorie des champs sont donc intimement liées,

– d'une part, à la géométrie des familles d'opérateurs elliptiques (typiquement des opérateurs de Dirac) et plus précisément à la géométrie des fibrés déterminants associés à de telles familles d'opérateurs ;

– d'autre part, aux « anomalies traciales » inhérentes au fait que l'on traite la dimension infinie comme un prolongement de la dimension finie, tant au niveau des traces qu'au niveau des déterminants et donc des intégrales de chemins. Traiter les anomalies de jauge chirales de ce point de vue (ce qui est quelque peu inhabituel) permet d'éclaircir les liens entre les anomalies chirales et les anomalies traciales [**4**], liens qui sont moins directement visibles dans le cas des anomalies gravitationnelles, comme nous avons tenté de l'expliquer dans le présent article.

Il ressort de cette analyse qu'une manière de contourner un certain nombre d'anomalies en théorie des champs serait d'éviter l'utilisation de traces régularisées sources d'anomalies traciales. On pourrait substituer au déterminant ζ un déterminant exotique, introduit par Wodzicki $\det_{\mathrm{res}} := \exp \circ \mathrm{res} \circ \log$, pour donner un sens à certaines intégrales de chemins du type (11). Cependant, puisque le résidu s'annule sur les opérateurs de rang fini, remplacer les traces régularisées par le résidu de Wodzicki se ferait au prix de perdre de vue la dimension finie et ne retiendrait de la théorie que des divergences, celles-la même que l'on s'évertue à éliminer en théorie des champs !

Appendice : Opérateurs pseudodifférentiels

Un outil important utilisé dans cette approche est la notion d'opérateur pseudodifférentiel. Pour définir cette classe d'opérateurs, il est utile de passer par leur transformée de Fourier, ce qui conduit à la notion de symbole. Regardons tout d'abord le cas d'un opérateur différentiel familier, le laplacien sur $\mathbb{R}^n$, défini par

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Étant donnée une fonction de Schwartz (ou encore $\mathcal{C}^\infty$ à support compact) sur $\mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{F}u(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx$ sa transformée de Fourier. Un calcul simple montre que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(\Delta u)(\xi) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\Big) \cdot \mathcal{F}(u)(\xi).$$

La fonction $\sigma_\Delta(\xi) = \|\xi\|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ est appelé le *symbole de* Δ. Les opérateurs différentiels ont des symboles donnés par des fonctions polynomiales. En élargissant cette classe de symboles de manière à y inclure, entre autres, des fractions rationnelles, on peut construire une classe plus large d'opérateurs appelée opérateurs pseudodifférentiels.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'ensemble $S^\alpha(U)$ des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{aligned} U \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,\xi) &\longmapsto \sigma(x,\xi), \end{aligned}$$

à support compact en x et vérifiant la propriété suivante : étant donnés deux multiindices $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^d$ et $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n) \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_{\gamma,\delta}$ telle que

$$|D_x^\gamma D_\xi^\delta \sigma(x,\xi)| \le C_{\gamma,\delta}(1 + \|\xi\|)^{\alpha - |\delta|} \quad \forall x \in U, \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

où, comme précédemment, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Remarquons que cette condition impose aux dérivées $D_\xi^\delta \sigma(x,\xi)$ un certain type de comportement asymptotique quand $\|\xi\| \to \infty$. Elle est en particulier vérifiée lorsque σ est un symbole polynomial. Un élément de $S^\alpha(U)$ est appelé *symbole d'ordre* α. Un symbole d'ordre α est dit *classique* s'il existe $\sigma_{\alpha-j} \in S^{\alpha-j}(U)$, $j \in \mathbb{N}$, qui sont positivement homogènes, i.e.

$$\sigma_{\alpha-j}(x, t\xi) = t^{\alpha-j}\sigma_{\alpha-j}(x,\xi) \quad \forall t > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

et tels que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sigma(x,\xi) - \sum_{j=0}^{N} \sigma_{\alpha-j}(x,\xi) \in S^{\alpha-N-1}(U).$$

A un symbole $\sigma \in S^\alpha(U)$, on associe un opérateur *pseudodifférentiel*

$$\begin{aligned} A : C_c^\infty(U) &\longrightarrow \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto (x \to Au(x))\,, \end{aligned}$$

défini par $Au(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\sigma(x,\cdot)\mathcal{F}(u)\right)$. Ici, $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ désigne l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U. L'ordre de l'opérateur est donné par l'ordre de son symbole et l'opérateur est dit *classique* lorsque le symbole correspondant est classique.

Reprenons l'exemple précédent avec $U = \mathbb{R}^n$. Le laplacien $\Delta := -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est un opérateur différentiel (et donc pseudodifférentiel) d'ordre 2 et de symbole σ_Δ. On peut, à partir de l'opérateur Δ, construire d'autres opérateurs, par exemple $(\Delta + 1)^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, qui est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $-2k$ et de symbole $\sigma_{(\Delta+1)^{-k}} = 1/(1 + \|\xi\|^2)^k$.

La notion d'opérateur pseudodifférentiel se généralise à des variétés compactes sans bord en utilisant une partition de l'unité. En autorisant les symboles à valeurs matricielles, on peut aussi définir des opérateurs pseudodifférentiels agissant sur des sections de fibrés vectoriels basés sur une variété compacte sans bord.

Remerciements

Je remercie beaucoup Alexander Cardona et Catherine Ducourtioux, dont les commentaires à la lecture d'une première version de ce texte m'ont été fort utiles. Un grand merci aussi à Daniel Bennequin, dont les critiques m'ont permis d'éclaircir certains points et d'améliorer la présentation de certains aspects de cet article. Je suis par ailleurs très reconnaissante à Yvette Perrin d'avoir fait une relecture critique du manuscrit et suggéré certaines améliorations. Marie-Paule Bressoulaly m'a apporté une aide précieuse en tapant une première version de ce texte et je l'en remercie chaleureusement.

Références

[1] R. Baadhio, *Quantum Topology and Global Anomalies*, Adv. Ser. in Math. Phys. **23**, World Scientific, 1996.

[2] R. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, Oxford University Press, 1996.

[3] J.M. Bismut, D. Freed, *The analysis of elliptic families I and II*, Comm. Math. Phys. **106**, 159-176, et Comm. Math. Phys. **107**, 103-163 (1986).

[4] A. Cardona, C. Ducourtioux, S. Paycha, *From tracial anomalies to anomalies in quantum field theory*, à paraître dans Communications in Mathematical Physics.

[5] A. Cardona, C. Ducourtioux, J. P. Magnot, S. Paycha, *Weighted traces on algebras of pseudodifferential operators and geometry of loop groups*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. and Relat. Top. **5**, 503-540 (2002).

[6] C. Ducourtioux, *Weighted traces on pseudo-differential operators and associated determinants*, Thèse de Doctorat de l'Université Blaise Pascal, 2001.

[7] P. Deligne, P. Etinghof, D. Freed, L. Jeffrey, D. Kazhdan, J. Morgan, D. Morrison, E. Witten, *Quantum Fields and Strings : A Course for Mathematicians*, American Mathematical Society, 1999.

[8] D. Freed, *Determinants, torsion, and strings*, Comm. Math. Phys. **107**, 487-525 (1987).

[9] M. Kontsevich, S. Vishik, *Geometry of determinants of elliptic operators*, Func. Anal. on the Eve of the XXI Century, Vol. I, Progress in Mathematics **131**, 173-197 (1994).

[10] J. Mickelsson, *Wodzicki residue and anomalies on current algebras* in *Integrable Models and Strings*, A. Alekseer ed., Lecture Notes in Physics **436**, Springer, 1994.

[11] R. Melrose and V. Nistor, *Homology of pseudo-differential operators I. Manifolds with boundary*, Preprint funct.an 96 06 005, juin 99.

[12] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics, 1990.

[13] K. Okikiolu, *The multiplicative anomaly for determinants of elliptic operators*, Duke Math. Journ. **79**, 723-750 (1995) ; K. Okikiolu, *The Campbell-Hausdorff theorem for elliptic operators and a related trace formula*, Duke Math. Journ. **79**, 687-722 (1995).

[14] S. Paycha, *Renormalized traces as a looking glass into infinite dimensional geometry*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. and Relat. Top. **4**, 221-266 (2001).

[15] S. Paycha, S. Rosenberg, *Curvature on determinant bundles and first Chern forms*, Journ. Geom. Phys. **45**, 393-429 (2003).

[16] D. Quillen, *Determinants of Cauchy-Riemann operators over a Riemann surface*, Funktsional Anal. i Prilozhen. **19**, 37-41 (1985).

[17] D. Quillen, *Superconnections and the Chern character*, Topology **24**, 89-95 (1985).

[18] A.O. Radul, *Lie algebras of differential operators, their central extensions and W-algebras*, Funct. Anal. Appl. **25**, 25-39 (1992).

[19] E. Witten, *Global gravitational anomalies*, Comm. Math. Phys. **100**, 197-229 (1985).

[20] M. Wodzicki,*Non commutative residue*, in Lecture Notes in Math. **1283**, Springer Verlag, 1987.

Sylvie Paycha

Département de Mathématiques Appliquées, Complexe universitaire des Cézeaux,
Université Blaise Pascal, 63177 Aubière cedex, France.

E-mail : `Sylvie.Paycha@math.univ-bpclermont.fr`