GROUPES DE SÉRIES ET RENORMALISATION DES CHAMPS QUANTIQUES

Alessandra Frabetti

Résumé. — Les champs quantiques traditionnellement se renormalisent de façon perturbative, sur chaque coefficient des séries correspondantes. Les formules de renormalisation « globale » de Dyson suggèrent d'interpréter la renormalisation comme un mélange convenable de produits et compositions des séries invoquées. Cette interprétation est cohérente avec les travaux récents de Connes et Kreimer : ils montrent que la renormalisation des champs quantiques scalaires est gouvernée par une algèbre de Hopf commutative, à voir donc comme algèbre de fonctions sur le groupe de renormalisation.

Pour l'électrodynamique quantique, les propagateurs sont des matrices 4×4 et les facteurs de renormalisation ne sont plus forcément scalaires : ils ne peuvent plus être des caractères de l'algèbre de Connes et Kreimer. En effet, aucun principe de dualité n'est valable pour des caractères non commutatifs, mais avec Ch. Brouder on montre qu'il existe des algèbres de Hopf ni commutatives ni cocommutatives qui gouvernent la renormalisation de l'électrodynamique quantique. De plus, ces algèbres sont définies sur l'ensemble des arbres binaires planaires, et donnent naturellement lieu à un nouveau groupe de séries formelles développées sur les arbres.

1. Introduction. Le groupe de renormalisation

En théorie quantique des champs, chaque particule est décrite par un champ généralisé, c'est-à-dire une distribution à valeurs dans les opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert, qui vérifie l'équation différentielle d'Euler-Lagrange déduite du Lagrangien associé au champ considéré. Les informations sur la dynamique d'une particule, en connaissant son impulsion p, se trouvent à partir du propagateur de Feynman $D(p)$, qui est la fonction de Green de l'opérateur différentiel généralisé associé au Lagrangien de la théorie, et qui apparaît dans l'équation d'Euler-Lagrange.

Le propagateur de Feynman satisfait lui-même à une nouvelle équation différentielle fonctionnelle, l'équation de Schwinger-Dyson, qui en fait cache un système infini d'équations, et pour laquelle une solution exacte est connue seulement pour les théories de champs « libres », c'est-à-dire quand les particules sont complètement isolées, elles n'interagissent ni avec des particules du même type ni avec d'autres types de particules. Au contraire, pour les théories avec un potentiel d'interaction, qui décrivent l'interaction entre plusieurs particules, le propagateur de Feynman est en général inconnu.

Cependant, on le connaît de façon approximative quand le potentiel d'interaction est une perturbation (petite) de l'énergie cinétique. Cela se passe dans le cas des particules élémentaires qui nous intéresse : le potentiel d'interaction est proportionnel à la « constante de couplage », un paramètre typique de chaque particule, qui a un sens physique et en principe peut être mesuré, et qui en général a une valeur très petite par rapport à celles qu'on veut calculer. Dans les théories ϕ^3 et ϕ^4 des « champs scalaires », qui décrivent des bosons de spin 0 comme le Higgs, la constante de couplage est normalement indiquée avec les symboles g ou λ. En électrodynamique quantique, la théorie qui décrit l'interaction entre photons et électrons, la constante de couplage est la « constante fine de structure » $\alpha = e^2/4\pi \sim 1/137$, qui dépend de la charge e des électrons. Dans le cas perturbatif, en effet, on peut calculer les premiers termes du propagateur développé comme une série formelle

$$D(\alpha_0; p) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^n D_n(p)$$

en les puissances du paramètre α_0 d'interaction (où on utilise l'indice 0 parce qu'il s'avère ne pas être le bon paramètre...), avec coefficients perturbatifs

$$D_n(p) = \sum_{|\Gamma|=n} U(\Gamma; p),$$

normalement décrits à l'aide des graphes de Feynman Γ typiques des champs considérés, $|\Gamma|$ indiquant le nombre de boucles présentes dans le graphe. Une définition précise des diagrammes de Feynman, et de la théorie perturbative, peut être trouvée dans tous les livres de Théorie Quantique des Champs, par exemple [**IZ**] (voir en particulier la section 6-1-1, pp. 265-276), et [**PS**] (en particulier, l'« Invitation » au chapitre 1, et la section 4.4, pp. 90-99).

L'un des problèmes majeurs de la théorie perturbative est que les amplitudes $U(\Gamma; p)$ associées aux diagrammes de Feynman sont, en général, des intégrales divergentes qui doivent être renormalisées, c'est-à-dire ramenées à des valeurs finies $R(\Gamma; p)$ indépendantes de la procédure adoptée. La théorie de la renormalisation, en physique quantique, est traitée dans [**IZ**], ainsi que dans [**C**]. Le « propagateur renormalisé » est la série formelle

$$\overline{D}(\alpha; p) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \overline{D}_n(p),$$

où le nouveau paramètre α représente le paramètre d'interaction effectivement mesuré et les nouveaux coefficients sont les sommes finies

$$\overline{D}_n(p) = \sum_{|\Gamma|=n} R(\Gamma; p).$$

La procédure de renormalisation, c'est-à-dire le passage du propagateur $D(\alpha_0; p)$ au propagateur $\overline{D}(\alpha; p)$, est classiquement décrite de deux façons possibles :

(1) avec la formule globale de Dyson, voir [**D**] : il existe un « facteur de renormalisation » infini $Z(\alpha)$ tel que

$$D(\alpha_0; p) = \overline{D}(\alpha; p) Z(\alpha) ;$$

(2) avec la formule « forest » ou BPHZ (du nom des auteurs Bogoliubov, Parasiuk, Hepp et Zimmermann) sur chaque diagramme de Feynman, voir [**Z**] : pour tout diagramme de Feynman Γ il existe un « contre-terme » infini $C(\Gamma)$ de telle sorte que si $U(\Gamma; p)$ est une intégrale divergente, alors la combinaison

$$R(\Gamma; p) = \sum_{\gamma_i \subset \Gamma} U(\Gamma/\gamma_1 \cdots \gamma_l; p) C(\gamma_1) \cdots C(\gamma_l)$$

est finie. Ici, les γ_i sont les sous-graphes 1PI de Γ tels que $\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset$, et $\Gamma/\gamma_1 \cdots \gamma_l$ indique le graphe qu'on obtient en écrasant les γ_i à des points.

Les graphes 1PI (« une particule irréductible ») sont des graphes de Feynman qui ne sont pas la jonction (par une ligne) de sous-graphes de Feynman. Autrement dit, les 1PI sont des graphes tels que si on coupe une quelconque arête interne, on n'obtient pas des graphes de Feynman décrivant la même particule ou la même situation pour les particules considérées. À partir des graphes 1PI, on peut construire tous les graphes de Feynman de la théorie, par simple jonction de deux pattes extérieures.

Évidemment, le facteur $Z(\alpha)$ qui apparaît dans la formule de Dyson est une série en α avec coefficients liés aux contre-termes $C(\Gamma)$ qui apparaissent dans la formule BPHZ. Dans les deux cas, la constante de couplage doit aussi être renormalisée, et sa renormalisation se fait avec un autre facteur de renormalisation $Z'(\alpha)$, en général lié au précédent, tel que $\alpha_0 = \alpha Z'(\alpha)$ soit aussi une série formelle en α.

La formule de Dyson peut alors être écrite comme

$$\overline{D}(\alpha; p) = D(\alpha_0(\alpha); p) Z(\alpha)^{-1},$$

et interprétée comme une simple combinaison de produits et compositions de certaines séries formelles en le paramètre α. Plus précisément, à partir des données initiales (α, D), et de la renormalisation choisie (Z', Z), le propagateur renormalisé est la deuxième composante du couple

$$\big(\alpha_0(\alpha), \overline{D}(\alpha; p)\big) = \big(\alpha_0(\alpha), D(\alpha_0(\alpha); p) Z(\alpha)^{-1}\big) = \big(\alpha, D(\alpha; p)\big) \cdot_{\ltimes} \big(\alpha Z'(\alpha), Z(\alpha)^{-1}\big),$$

qu'on reconnaît être le produit de deux couples de séries selon une loi de produit semidirect : la notation $\ltimes$ indique que la première composante agit à droite sur la deuxième composante, cf. [**R**] et [**Sc**]. De même, deux renormalisations (Z_1', Z_1) et (Z_2', Z_2) se composent selon une loi de produit semidirect : si $\alpha_1(\alpha) = \alpha Z_1'(\alpha)$ et $\alpha_2(\alpha) = \alpha Z_2'(\alpha)$, alors la composition est exactement

$$\big(\alpha_1(\alpha_2(\alpha)), (Z_1(\alpha_2(\alpha))Z_2(\alpha)\big) = \big(\alpha_1(\alpha), Z_1(\alpha)\big) \cdot_{\ltimes} \big(\alpha_2(\alpha), Z_2(\alpha)\big).$$

Pour la théorie ϕ^3, ce point de vue est étudié par F. Girelli, T. Krajewski et P. Martinetti en [**GKM**].

Pour éclaircir cette situation, il convient de simplifier les notations : appelons x les constantes de couplage effectives α, g, et λ. Les propagateurs D, $\overline{D}$ et les facteurs de renormalisation Z, Z' sont des séries formelles en x à coefficients dans $\mathbb{C}$ ou dans une algèbre unitaire $\mathcal{A}$, où le terme d'ordre 0 n'est jamais nul et peut être identifié à 1, et donc ils sont représentés par les éléments du groupe

$$G^{\mathrm{inv}} = \big\{ f(x) = 1 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots, \quad f_n \in \mathcal{A} \big\},$$

des séries inversibles, muni du produit ponctuel $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Par contre, les constantes de couplages α_0, g_0, λ_0 avant renormalisation sont des séries formelles en x à coefficients dans $\mathbb{C}$, où le terme d'ordre 0 est nul et le terme d'ordre 1 peut être identifié à 1, et donc elles sont représentées par les éléments du groupe

$$G^{\mathrm{dif}} = \big\{ \varphi(x) = x + \varphi_1 x^2 + \varphi_2 x^3 + \ldots, \quad \varphi_n \in \mathbb{C} \big\}$$

des difféomorphismes formels (tangents à l'identité), muni de la composition $(\phi \circ \psi)(x) = \phi(\psi(x))$. Évidement, le groupe G^{dif} agit à droite sur le groupe G^{inv} par simple composition, $(f \circ \phi)(x) = f(\phi(x))$.

En général, donc, la formule de Dyson montre que le groupe de renormalisation apparaît comme un sous-groupe du produit semi-direct $G^{\mathrm{dif}} \ltimes G^{\mathrm{inv}}$, et la procédure de renormalisation du propagateur est l'action droite de $G^{\mathrm{dif}} \ltimes G^{\mathrm{inv}}$ sur G^{inv} obtenue par restriction du produit de groupe.

Le lien entre les deux points de vue est donc la dualité de Tannaka-Krein, celle entre un groupe et son algèbre de Hopf des fonctions polynomiales. Une « algèbre de Hopf » est en même temps une algèbre et une cogèbre (« coalgebra » en anglais), munie donc aussi d'un coproduit coassociatif, d'une counité et d'un antipode, qui sont induits sur les fonctions par le produit, l'unité et l'inversion sur le groupe. Deux références de base sur les algèbres de Hopf sont les livres de E. Abe [**A**] et de M. Sweedler [**Sw**]. Pour le Théorème de Tannaka-Krein, voir [**Hoc**], théorème 3.5, p. 35, et [**HR**], section 30, p. 157.

Le point de vue du groupe (formule de Dyson) a l'avantage de présenter les résultats dans une forme indépendante du développement perturbatif, mais pour le moment ne permet pas de trouver le couple (Z', Z) qui réalise la renormalisation de chaque propagateur $D(p)$. Par contre, la « bonne » renormalisation se détermine avec des calculs en coordonnées locales (formule BPHZ), c'est-à-dire sur l'algèbre de Hopf des fonctions. De plus, le point de vue de l'algèbre de Hopf a l'avantage de pouvoir se généraliser à un contexte d'algèbres non commutatives, même quand les groupes sont absents.

Le but de cet exposé est de présenter des résultats récents sur le deuxième point de vue et de montrer comment ils amènent naturellement à définir un nouveau groupe de séries indexées par l'ensemble des arbres binaires planaires et non plus par les entiers.

2. Algèbres de Hopf de la renormalisation

La première algèbre de Hopf qui règle une renormalisation, cachée dans la formule BPHZ, a été découverte par D. Kreimer dans [**K**] pour le champ scalaire ϕ^3. Dans cet article, Kreimer utilise une représentation des amplitudes de Feynman basée sur des arbres enracinés. Ensuite, le modèle a été élaboré par A. Connes et D. Kreimer directement sur les graphes de Feynman. La conclusion de leurs résultats, qui nous intéresse, est la suivante : pour la théorie quantique d'un champ scalaire $\phi : \mathbb{M}^D \longrightarrow \mathbb{C}$ avec potentiel ϕ^3 si $D = 6$ ou ϕ^4 si $D = 4$, l'algèbre de Hopf de la renormalisation est commutative.

Théorème 2.1 **([CK1] [CK2])**. — *Pour la théorie de champ quantique ϕ^3, on a les résultats suivants.*

(1) *Il existe une algèbre de Hopf commutative graduée et connexe $\mathcal{H}^{CK} = \mathbb{C}[1PI\, \Gamma]$ engendrée par les diagrammes de Feynman 1PI de la théorie ϕ^3, avec coproduit*

$$\Delta^{CK}\Gamma = \sum_{\gamma_i \subset \Gamma} \Gamma/\gamma_1 \cdots \gamma_l \otimes \gamma_1 \cdots \gamma_l,$$

où la somme porte sur les sous-graphes 1PI de Γ tels que $\gamma_i \cap \gamma_j = \varnothing$.

(2) *La formule de renormalisation BPHZ est équivalente à la donnée de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}^{CK}$, c'est-à-dire :*

$$R(\Gamma) = \langle U \otimes C, \Delta^{CK}\Gamma \rangle,$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ dénote l'évaluation des fonctions sur les graphes.

(3) *Par le théorème de Tannaka-Krein (ou sa version duale, le théorème de Milnor-Moore), il existe donc un groupe $G^{CK} := \mathrm{Hom}_{Alg}(\mathcal{H}^{CK}, \mathbb{C})$ de caractères de $\mathcal{H}^{CK}$, qui coïncide avec le groupe de renormalisation.*

De plus, l'algèbre de Lie de G^{CK} se décrit explicitement en termes de l'algèbre pré-Lie construite sur les arbres enracinés par Chapoton et Livernet, voir [**CL**].

Pour l'électrodynamique quantique (QED), avec champs vectoriels et spinoriels $A_{\mu\nu}, \psi : \mathbb{M}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$ décrivant respectivement les photons et les électrons, les propagateurs de Feynman $D_{\mu\nu}(p), S(p) \in M_4(\mathbb{C})$ sont des matrices 4x4 complexes. Le produit entre les amplitudes des diagrammes de Feynman n'est plus commutatif, et une partie du théorème précédent ne s'applique pas.

Pour décrire l'algèbre de renormalisation de la QED, avec Ch. Brouder on emploie un nouveau développement perturbatif des propagateurs basé sur les arbres binaires planaires $t \in Y$, qui a l'avantage de fournir une solution récursive pour les coefficients perturbatifs, voir [**B**], [**BF1**]. Les propagateurs du photon et de l'électron avant et après renormalisation sont donc les séries suivantes :

$$D(\alpha_0; p) = \sum_t \alpha_0^{|t|} U^\gamma(t; p) \ , \ \overline{D}(\alpha; p) = \sum_t \alpha^{|t|} R^\gamma(t; p)$$
$$S(\alpha_0; p) = \sum_t \alpha_0^{|t|} U^e(t; p) \ , \ \overline{S}(\alpha; p) = \sum_t \alpha^{|t|} R^e(t; p).$$

On peut ainsi trouver pour la QED des résultats analogues à ceux de Connes et Kreimer.

Théorème 2.2 **([BF1] [BF2] [BF3])**. — *Pour le propagateur du photon $D(p)$ de l'électrodynamique quantique, développés sur les arbres binaires planaires, on a les résultats suivants.*

(1) *Il existe une algèbre de Hopf commutative graduée et connexe $\mathcal{H}^\alpha = \mathbb{C}[\curlyvee^{t}, t \in Y]$ avec coproduit $\Delta^\alpha : \mathcal{H}^\alpha \longrightarrow \mathcal{H}^\alpha \otimes \mathcal{H}^\alpha$ qui « casse » les branches des arbres selon la règle*

$$\Delta^\alpha(\curlyvee^{t}) = \sum \text{« ce qui reste de } \curlyvee^{t} \text{ »} \otimes \text{« } \backslash\text{-branches de } t \text{ »}.$$

Le groupe de renormalisation de la charge α est le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathcal{H}^\alpha, \mathbb{C})$ dual de l'algèbre $\mathcal{H}^\alpha$.

(2) *La formule de renormalisation BPHZ pour le propagateur du photon est équivalente à une coaction $\Delta^\gamma : \mathcal{H}^\gamma \longrightarrow \mathcal{H}^\alpha \otimes \mathcal{H}^\gamma$ de $\mathcal{H}^\alpha$ sur l'algèbre non commutative $\mathcal{H}^\gamma = \mathbb{C}\langle t \in Y\rangle/(1 - |\,)$, où l'arbre-racine $|$ est identifié à l'unité 1, qui est multiplicative et sur les générateurs vaut $\Delta^\gamma(t) = \Delta^\alpha(t)$, c'est-à-dire :*

$$R^\gamma(t) = \langle U^\gamma \otimes C^\gamma, \Delta^\gamma(t)\rangle.$$

(3) *Le groupe de renormalisation du photon s'avère donc être le groupe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathcal{H}^\alpha, \mathbb{C})$ des caractères de $\mathcal{H}^\alpha$, c'est-à-dire le même groupe qui renormalise la charge.*

(4) *Il existe une version non commutative $\tilde{\mathcal{H}}^\alpha$ de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}^\alpha$, donnée par l'algèbre libre $\tilde{\mathcal{H}}^\alpha = \mathbb{C}\langle \curlyvee^{t}, t \in Y\rangle$ avec coproduit $\tilde{\Delta}^\alpha$ défini comme Δ^α sur les générateurs.*

À noter que le résultat du point 3) reproduit le résultat classique de Ward sur la renormalisation de la charge : le facteur de renormalisation $Z'(\alpha)$ de la charge coïncide avec le facteur de renormalisation $Z(\alpha)$ du photon.

Théorème 2.3 **([BF1] [BF2] [BF3] [Fr1])**. — *Pour le propagateur de l'électron $S(p)$ de l'électrodynamique quantique, développé sur les arbres binaires planaires, on a les résultats suivants.*

(1) *Il existe une algèbre de Hopf non commutative $\mathcal{H}^e = \mathbb{C}\langle t \in Y\rangle/(1 - |\,)$, sur laquelle $\mathcal{H}^\alpha$ coagit de telle sorte que le coproduit semidirect selon R. Molnar, cf.* [**M**], *soit une algèbre*

de Hopf non commutative graduée et connexe $\mathcal{H}^{\text{qed}} = \mathcal{H}^\alpha \ltimes \mathcal{H}^e$, *avec coproduit* $\Delta^{\text{qed}} = \Delta^\alpha \times \Delta^e$ *où* $\Delta^e : \mathcal{H}^e \longrightarrow \mathcal{H}^e \otimes \mathcal{H}^{\text{qed}}$ *« casse » les branches des arbres selon la règle*

$$\Delta^e(t) = \sum \text{« ce qui reste de } t \text{ »} \otimes (\text{« }\backslash\text{-branches de } t \text{ »} \otimes \text{« }/\text{-branches de } t \text{ »}).$$

(2) *La formule de renormalisation BPHZ pour le propagateur de l'électron est équivalente à la coaction* $\Delta^e : \mathcal{H}^e \longrightarrow \mathcal{H}^{\text{qed}} \otimes \mathcal{H}^e$ *définie en 1), c'est-à-dire :*

$$R^e(t) = \langle U^e \otimes (C^\gamma \times C^e), \Delta^e(t) \rangle.$$

(3) *Le groupe de renormalisation de l'électron se trouve à partir de l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathcal{H}^{\text{qed}}, M_4(\mathbb{C}))$ *des « caractères à valeurs matriciels » de* $\mathcal{H}^{\text{qed}}$.

L'ensemble des caractères d'une algèbre de Hopf, à valeurs dans une algèbre non commutative, n'est pas lui-même un groupe. Cependant, dans le cas qui nous intéresse, pour reconstruire le groupe il suffit de modifier la notion d'algèbre de Hopf en remplaçant le produit tensoriel $\otimes$ par le produit libre $\star$ cité dans [**L1**]. Ceci constitue le sujet d'un travail en cours, cf. [**Fr1**].

Pour ce qui concerne la renormalisation, le développement sur les arbres binaires planaires pose un problème : les coefficients perturbatifs $R^\gamma(t)$ et $R^e(t)$ des propagateurs renormalisés ne sont pas nécessairement finis, à cause de certaines identités (les Identités de Ward) qui relient les contre-termes de quelques diagrammes de Feynman représentés par le même arbre.

On est donc obligés de considérer ensemble tous les termes à un ordre d'interaction n donné, c'est-à-dire de considérer la somme $t_n := \sum_{|t|=n} t$ respectivement comme élément de $\mathcal{H}^\alpha$, de $\mathcal{H}^\gamma$ et de $\mathcal{H}^e$.

Théorème 2.4 **([BF2])**

(1) *Soient* $\overline{\mathcal{H}^\alpha} = \mathbb{C}[t_n, n \in \mathbb{N}]$, $\overline{\mathcal{H}^\gamma} = \mathbb{C}\langle t_n, n \in \mathbb{N}\rangle$ *et* $\overline{\mathcal{H}^e} = \mathbb{C}\langle t_n, n \in \mathbb{N}\rangle$ *les sous-algèbres de* $\mathcal{H}^\alpha$, $\mathcal{H}^\gamma$ *et* $\mathcal{H}^e$ *engendrées par les éléments* t_n.

Alors $\overline{\mathcal{H}^{\text{qed}}} = \overline{\mathcal{H}^\alpha} \ltimes \overline{\mathcal{H}^e}$ *est une sous-algèbre de Hopf de* $\mathcal{H}^{\text{qed}}$, *avec coproduit* $\Delta^{\text{qed}} = \Delta^\alpha \times \Delta^e$ *donné par*

$$\Delta^\alpha(t_n) = t_n \otimes 1 + 1 \otimes t_n + \sum_{m=1}^{n-1} t_m \otimes Q^m_{n-m}(t_*),$$
$$\Delta^e(t_n) = 1 \otimes (1, t_n) + t_n \otimes (1, 1) + \sum_{m=1}^{n-1} t_m \otimes T^m_{n-m}(t_*),$$

où

$$
\begin{aligned}
Q_m^l(t_*) &= \sum_{k=1}^{m} \binom{l+1}{k} P_m^{(k)}(t_*),\\
P_m^{(k)}(t_*) &= \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k=m\\ m_1,\ldots,m_k>0}} t_{m_1}\cdots t_{m_k},\\
T_m^l(t_*) &= (Q_m^l(t_*),1) + (1,t_m) + \sum_{k=1}^{m} (Q_{m-k}^l(t_*),t_k).
\end{aligned}
$$

De plus, $\overline{\mathcal{H}^{qed}}$ *coagit sur* $\overline{\mathcal{H}^{e}}$ *avec coaction* Δ^e*, et* $\overline{\mathcal{H}^{\alpha}}$ *coagit sur* $\overline{\mathcal{H}^{\gamma}}$ *avec coaction* Δ^γ *donnée sur les générateurs par* $\Delta^\gamma(t_n) = \Delta^\alpha(t_n)$.

(2) *La renormalisation de la QED à l'ordre d'interaction est équivalente aux coactions de* $\overline{\mathcal{H}^{\alpha}}$ *et* $\overline{\mathcal{H}^{qed}}$ *sur* $\overline{\mathcal{H}^{\gamma}}$ *et* $\overline{\mathcal{H}^{e}}$ *respectivement, et les termes*

$$
\begin{aligned}
R^\gamma(t_n) &= \langle U^\gamma \otimes C^\gamma, \Delta^\gamma(t_n)\rangle,\\
R^e(t_n) &= \langle U^e \otimes (C^\gamma \times C^e), \Delta^e(t_n)\rangle
\end{aligned}
$$

sont finis.

Donc, la renormalisation de la QED se décrit d'un côté par les formules de Dyson qui font intervenir produits et compositions de séries, et de l'autre par une algèbre de Hopf cette fois non commutative. Ces deux approches ne sont pas en contradiction, car les amplitudes de Feynman de la QED, qui jouent le rôle des caractères pour ces algèbres de Hopf, ne sont pas scalaires.

En effet, l'algèbre de Hopf duale du groupe abélien G^{inv} est cocommutative libre, et admet donc naturellement une version non commutative qui reste cocommutative libre et qui représente l'ensemble des fonctions sur G^{inv} à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{A}$.

Lemme 2.5

(1) *L'algèbre* $\mathcal{H}^{inv} = \mathrm{Fun}(G^{inv}, \mathcal{A})$ *des fonctions polynomiales sur le groupe* G^{inv} *est une algèbre libre,* $\mathcal{H}^{inv} = \mathbb{C}\langle b_n, n \in \mathbb{N}\rangle$ *: le symbole* b_n *agit sur* $f(x)$ *comme*

$$\langle b_n, f(x)\rangle = f_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n f(0)}{dx^n} \in \mathcal{A}.$$

(2) *L'algèbre non commutative* $\mathcal{H}^{inv} \cong \mathbb{C}\langle b_n, n \in \mathbb{N}\rangle$ *est une algèbre de Hopf cocommutative avec le coproduit*

$$\Delta^P b_n = b_n \otimes 1 + 1 \otimes b_n + \sum_{m=1}^{n-1} b_m \otimes b_{n-m},$$

et G^{inv} *peut être reconstruit à partir de l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{Alg}(\mathcal{H}^{inv}, \mathcal{A})$ *des « caractères de* $\mathcal{H}^{inv}$ *à valeurs dans* $\mathcal{A}$ *».*

Par contre, l'ensemble des séries à coefficients dans une algèbre non commutative ne forment pas un groupe pour la composition (qui n'est pas une opération associative dans ce cas). Donc, il est tout à fait inattendu que l'algèbre $\overline{\mathcal{H}^{\alpha}}$ duale du groupe de composition des séries admette une version non commutative.

***Théorème 2.6* ([BF2] [BFK])**

(1) *Sur l'algèbre non commutative* $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}} = \mathbb{C}\langle a_n, n \in \mathbb{N}\rangle$, *le coproduit*

$$\Delta^{\mathrm{dif}} a_n = a_n \otimes 1 + 1 \otimes a_n + \sum_{m=1}^{n-1} a_m \otimes Q^m_{n-m}(a_*)$$

est coassociatif. Donc, $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}}$ *est une algèbre de Hopf isomorphe à* $(\widetilde{\overline{\mathcal{H}^{\alpha}}}) = \overline{(\widetilde{\mathcal{H}^{\alpha}})}$.

(2) *L'abélianisée* $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}}_{ab} = \mathbb{C}[a_n, n \in \mathbb{N}] \cong \overline{\mathcal{H}^{\alpha}}$ *est l'algèbre des fonctions polynomiales sur le groupe de composition des séries* G^{dif} *: le symbole* a_n *agit sur* $\varphi(x)$ *comme*

$$\langle a_n, \varphi(x)\rangle = \varphi_n = \frac{1}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}\varphi(0)}{dx^{n+1}}.$$

(3) *L'action naturelle du groupe* G^{dif} *sur le groupe* G^{inv} *donnée par la composition à droite admet une version non commutative donnée par une coaction de* $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}}$ *sur* $\mathcal{H}^{\mathrm{inv}}$*. Le groupe semidirect* $G^{\mathrm{dif}} \ltimes G^{\mathrm{inv}}$ *admet donc une version non commutative, donnée par le coproduit semidirect* $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}} \ltimes \mathcal{H}^{\mathrm{inv}}$ *des algèbres de Hopf respectives.*

Par un théorème de Molnar, cf. [**M**], $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}} \ltimes \mathcal{H}^{\mathrm{inv}}$ est en même temps une algèbre et une cogèbre, mais pas une algèbre de Hopf. Par contre, le coproduit semidirect $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}}_{ab} \ltimes \mathcal{H}^{\mathrm{inv}}$ est une algèbre de Hopf ni commutative ni cocommutative. Puisque les constantes de couplage sont toujours des scalaires, l'algèbre de renormalisation des constantes de couplage est bien $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}}_{ab}$, et donc la renormalisation d'un propagateur à l'ordre d'interaction est toujours décrite par une véritable algèbre de Hopf.

En conclusion, la renormalisation de la QED peut être reconstruite en utilisant les amplitudes de Feynman U^{γ}, U^{e} et les contre-termes C^{γ}, C^{e} comme « caractères non commutatifs » d'une algèbre de Hopf non commutative.

3. Groupe de séries développées sur les arbres

L'usage de groupes et algèbres de Hopf non commutatives en renormalisation des champs quantiques est résumé dans le tableau 1.

Le troisième cadre de la troisième colonne correspond aux résultats de L. Foissy dans sa thèse [**Fo**]. Il trouve une algèbre de Hopf $\mathcal{H}^{D}_{P,R}$ non commutative sur les arbres planaires enracinés et décorés, qui généralise la première algèbre de la renormalisation introduite par Kreimer dans [**K**].

Séries développées sur :	**Groupes (= alg. Hopf comm.)**	**Algèbres de Hopf non commutatives**
entiers	$\mathrm{G}^{\mathrm{dif}} \ltimes \mathrm{G}^{\mathrm{inv}}$	$\mathcal{H}^{\mathrm{dif}}$ $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}}_{\mathrm{ab}} \ltimes \mathcal{H}^{\mathrm{inv}}$ [Brouder-Frabetti, QED]
arbres binaires planaires	?	$\widetilde{\mathcal{H}^{\alpha}} \cong \mathcal{H}^{\mathrm{LR}}$ [Loday-Ronco, Holtkamp, Foissy] $\mathcal{H}^{\mathrm{qed}} = \mathcal{H}^{\alpha} \ltimes \mathcal{H}^{e}$ [Brouder-Frabetti, QED]
arbres enracinés (décorés, planaires)	$\mathcal{H}_{\mathrm{R}} = \mathrm{Fun}(\mathrm{G}^{\mathrm{R}})$ groupe dont on connaît l'algèbre des polynômes [Kreimer, Φ^3] ou l'algèbre enveloppante [Grossman-Larson, Painate, Hoffman] ou une représentation sur l'espace des actions [Krajewski]	$\mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{P,R}}$ version non comm. de $\mathcal{H}_{\mathrm{R}}$ [Foissy] version opéradique [van der Laan]
graphes de Feynman	$\mathcal{H}^{\mathrm{CK}} = \mathrm{Fun}(\mathrm{G}^{\mathrm{CK}})$ groupe dont on connaît l'algèbre des polynômes ou l'algèbre de Lie [Connes-Kreimer, Φ^3]	??

TABLEAU 1

Foissy montre aussi que si l'ensemble D des décorations est trivial, alors $\mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{P,R}}$ est isomorphe à l'algèbre de Hopf $\tilde{\mathcal{H}}^{\alpha}$, ce qui généralise au cadre non commutatif la composition des renormalisations de la constante de couplage.

Une construction générale des algèbres de Hopf basées sur des arbres en termes d'opérades se trouve dans la thèse de P. van der Laan [**vdL**].

Dans le deuxième cadre de la troisième colonne, on indique l'isomorphisme entre l'algèbre non commutative de la charge $\overline{\mathcal{H}^\alpha}$ et l'algèbre de Hopf sur les arbres binaires planaires introduite par J.-L. Loday et M. Ronco dans [**LR**]. L'isomorphisme a été prouvé récemment par R. Holtkamp [**Hol**] en utilisant les résultats de Foissy.

Le trou ?? du tableau est une question ouverte : peut-on définir une version non commutative de l'algèbre de Hopf de Connes et Kreimer sur les graphes de Feynman de toute théorie non scalaire ?

Le trou ? correspond à un groupe de séries développées sur les arbres binaires planaires. Pour le définir, il faut donner un sens aux opérations de produit ponctuel et de composition entre symboles du type x^t, pour tout arbre t.

Pour avoir un groupe de séries avec produit ponctuel, on considère l'ensemble

$$G^{\mathrm{inv}}_Y = \{f(x) = x^{|} + \sum_{t \neq |} f(t) x^t, \quad f(t) \in M_4(\mathbb{C})\}.$$

Définition 3.1. — Soient $/, \backslash : Y \times Y \longrightarrow Y$ les opérations *over* et *under* introduites par Loday dans [**L2**], et qui correspondent aux greffes à gauche et à droite,

$$t/s := \begin{smallmatrix} t & & \\ & \diagdown & \\ & & s \end{smallmatrix}, \qquad t\backslash s := \begin{smallmatrix} & & s \\ & \diagup & \\ t & & \end{smallmatrix}.$$

Les greffes sont associatives, ont une unité commune donnée par l'arbre $|$, et satisfont à la relation suivante :

$$(t/s)\backslash r = t/(s\backslash r), \qquad \text{pour } t, s, r \in Y \text{ avec } s \neq | .$$

L'espace vectoriel engendré par les arbres binaires planaires est en effet l'algèbre de type libre sur un générateur, l'arbre $\curlyvee$.

On étend les greffes à l'ensemble G^{inv}_Y comme

$$f(x)/g(x) := \sum_{t,s \in Y} f(t)g(s) x^{t/s}, \qquad f(x)\backslash g(x) := \sum_{t,s \in Y} f(t)g(s) x^{t\backslash s},$$

et on pose

$$G^\gamma_Y := (G^{\mathrm{inv}}_Y, /), \qquad G^e_Y := (G^{\mathrm{inv}}_Y, \backslash).$$

Lemme 3.2

(1) *Les deux produits ponctuels* $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$ *et* $(f\backslash g)(x) := f(x)\backslash g(x)$ *sont associatifs et rendent* G^γ_Y *et* G^e_Y *des groupes non abéliens, avec unité* $1(x) := x^{|}$.

(2) *Les groupes* G^γ_Y *et* G^e_Y *sont les groupes de « caractères à valeurs dans les matrices » des algèbres* $\mathcal{H}^\gamma$ *et* $\mathcal{H}^e$*, i.e.*

$$G^\gamma_Y = \mathrm{Hom}_{Alg}(\mathcal{H}^\gamma, M_4(\mathbb{C})), \qquad G^e_Y = \mathrm{Hom}_{Alg}(\mathcal{H}^e, M_4(\mathbb{C})).$$

Pour avoir un groupe de séries avec la composition, on considère l'ensemble

$$G^{\mathrm{dif}}_{Y} = \{\varphi(x) = x^{\curlyvee} + \sum_{t \neq |\,,\,\curlyvee} \varphi(t) x^{t}, \quad \varphi(t) \in \mathbb{C}\}.$$

Suivant une idée de J.-L. Loday [**L2**][1], on définit la puissance $\varphi(x)^t$ d'une série par un arbre en utilisant la décomposition de l'arbre t en monôme sur le générateur $\curlyvee$ par rapport aux deux opérations de greffe / et \\.

Définition 3.3. — Pour tout arbre t, soit μ_t le monôme qui décrit l'arbre t comme produit de greffes gauches et droites de l'arbre $\curlyvee$ par lui même. Par exemple

$$\substack{\curlyvee\\ \curlyvee} = (\curlyvee \backslash \curlyvee)/\curlyvee \qquad \text{donc} \quad \mu_{\substack{\curlyvee\\ \curlyvee}} = (\ \backslash\ )/\ ,$$

$$\substack{\curlyvee\curlyvee\\ \curlyvee} = (\curlyvee / \curlyvee)\backslash \curlyvee = \curlyvee/(\curlyvee \backslash \curlyvee) \qquad \text{donc} \quad \mu_{\substack{\curlyvee\curlyvee\\ \curlyvee}} = (\ /\ )\backslash\ = \ /(\ \backslash\ ).$$

On peut voir le monôme μ_t comme une application $\mu_t : Y \longrightarrow Y$ qui est l'identité pour $t = \curlyvee$, qui vaut $\mu_t(\curlyvee) = t$ sur le générateur $\curlyvee$ et qui calcule le produit défini par t sur les autres arbres $s \in Y$. Par exemple

$$\mu_{\substack{\curlyvee\\ \curlyvee}}(s) = (s\backslash s)/s.$$

On étend alors l'application μ_t aux séries formelles comme évaluation du monôme μ_t sur toute série. En particulier, l'évaluation de μ_t sur $\varphi(s)x^s$ donne $\mu_t(\varphi(s)x^s) = \varphi(s)^{|t|}x^{\mu_t(s)}$.

Théorème 3.4 **([Fr1])**

(1) *Soit*

$$G^{\alpha}_{Y} := \{\varphi(x) = x^{\curlyvee} + \sum_{t \neq |\,,\,\curlyvee} \varphi(t) x^{t/\curlyvee}, \quad \varphi(t) \in \mathbb{C}\}$$

le sous-ensemble de G^{dif}_{Y} *des séries* $\varphi(x) = \varphi^{-}(x)/x^{\curlyvee}$*, pour toute séries* $\varphi^{-}(x) \in G^{\mathrm{inv}}_{Y}$*. Le produit de composition* $(\varphi \circ \psi)(x) := \varphi(\psi(x))$ *défini à partir de*

$$\psi(x)^t := \mu_t(\psi(x))$$

est associatif et fait de G^{α}_{Y} *un groupe non abélien.*

(2) *En effet,* G^{α}_{Y} *est le groupe des caractères de* $\mathcal{H}^{\alpha}$*, i.e.* $G^{\alpha}_{Y} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathcal{H}^{\alpha}, \mathbb{C})$*. De même,* $G^{\alpha}_{Y} \ltimes G^{e}_{Y}$ *est le groupe dual de* $\mathcal{H}^{\mathrm{qed}} = \mathcal{H}^{\alpha} \ltimes \mathcal{H}^{e}$*, dans le sens où il peut être reconstruit à partir de l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathcal{H}^{\mathrm{qed}}, M_4(\mathbb{C}))$.

[1] Loday applique cette idée à une opération construite à partir des greffes, et non aux greffes elles-mêmes.

L'application $|\ |: Y \longrightarrow \mathbb{N}$ qui compte le nombre $|t|$ de sommets internes de t (l'ordre de t) est surjective, et induit des projections

$$G^{\alpha}_{Y} \longrightarrow G^{\mathrm{dif}}, \qquad G^{\gamma}_{Y} \longrightarrow G^{\mathrm{inv}}, \qquad G^{e}_{Y} \longrightarrow G^{\mathrm{inv}},$$

entre les groupes de séries développées sur les arbres et les groupes de séries développées sur les entiers.

Comme le groupe G^{dif} de composition des séries usuelles est le groupe des difféomorphismes formels de $\mathbb{C}$, il se pose naturellement la question suivante, ouverte à notre connaissance : peut-on interpréter le groupe G^{α}_{Y} comme groupe d'automorphismes formels d'un certain espace ?

Références

[A] E. Abe, *Hopf Algebras*, Cambridge Univ. Press ed. 1977.

[B] Ch. Brouder, *On the trees of quantum fields*, Eur. Phys. J. C **12** (2000), 535-549.

[BF1] Ch. Brouder, A. Frabetti, *Renormalization of QED with planar binary trees*, Eur. Phys. J. C **19** (2001), 715-741.

[BF2] Ch. Brouder, A. Frabetti, *Noncommutative renormalization of massless QED*, `http://arxiv.org/abs/hep-th/0011161`.

[BF3] Ch. Brouder, A. Frabetti, *QED Hopf algebra on planar binary trees*, J. Alg. **267** (2003), 298-322.

[BFK] Ch. Brouder, A. Frabetti, Ch. Krattenthaler, *Noncommutative Hopf algebra of formal diffeomorphisms*, en préparation.

[CL] F. Chapoton, M. Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Int. Math. Res. Notices **8** (2001), 395-408.

[C] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge Univ. Press ed. 1984.

[CK1] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I : the Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*, Comm. Math. Phys. **210** (2000), 249-273.

[CK2] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem II : the β function, diffeomorphisms and the renormalization group*, Comm. Math. Phys. **216** (2001), 215-241.

[D] F.J. Dyson, *The S matrix in quantum electrodynamics*, Phys. Rev. **75** (1949), 1736–55.

[Fo] L. Foissy, *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés I, II*, Bull. Sci. Math. **126** (2002), 193-239, 249-288.

[Fr1] A. Frabetti, *Groups of tree-expanded series*, en préparation.

[Fr1] A. Frabetti, *Free product Hopf algebras and groups of noncommutative valued characters*, en préparation.

[GKM] F. Girelli, T. Krajewski, P. Martinetti, *The Hopf algebra of Connes and Kreimer and wave function renormalization*, Modern Phys. Lett. A **16** (2001), 299-303.

[Hoc] G. Hochschild, *La structure des groupes de Lie*, Dunod ed. 1968.

[HR] E. Hewitt, K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis II*, Springer-Verlag 1970.

[Hol] R. Holtkamp, *Comparison of Hopf algebras on trees*, Arch. Math. **80** (2002), 368-383.

[IZ] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill ed. 1980.

[K] D. Kreimer, *On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theory*, Adv. Th. Math. Phys. **2** (1998), 303-334.

[L1] J.-L. Loday, *Künneth-style formula for the homology of Leibniz algebras*, Math. Z. **221** (1996), 41-47.

[L2] J.-L. Loday, *Arithmetree*, J. Alg. **258** (2002), 275-309.

[LR] J.-L. Loday, M. Ronco, *Hopf algebra of the planar binary trees*, Adv. in Math. **139** (1998), 293-309.

[M] R.K. Molnar, *Semi-direct products of Hopf algebras*, J. Alg. **47** (1977), 29-51.

[PS] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *Quantum Field Theory*, Perseus Books Publ. ed. 1995.

[R] J.J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer Verlag ed. 1995.

[Sc] L. Schwartz, *Algèbre*, Dunod, 2 ed. 2003.

[Sw] M.E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Benjamin ed. 1969.

[vdL] P. van der Laan, *Some Hopf algebras of trees*, `http://front.math.ucdavis.edu/math.QA/0106244` ou `http://arxiv.org/abs/math.QA/0106244`.

[Z] W. Zimmermann, *Convergence of Bogoliubov's method of renormalization in momentum space*, Comm. Math. Phys. **15** (1969), 208-234.

Alessandra Frabetti

Institut Girard Desargues, Bât. Braconnier, Université de Lyon 1, 21, avenue Claude Bernard, 69622 Villeurbanne Cedex.

E-mail : `frabetti@igd.univ-lyon1.fr`