

# CHAMPS MAGNÉTIQUES CRITIQUES ET HYSTÉRÉSIS DANS LES FILMS SUPRACONDUCTEURS

*Catherine Bolley & Bernard Helffer*

**Résumé.** — Nous nous proposons de décrire, dans cet article, des travaux récents sur les champs magnétiques critiques liés à certains matériaux supraconducteurs.

## 1. Description du problème

**1.1. Le problème physique.** — Un matériau supraconducteur peut changer de comportement suivant sa taille, sa géométrie, la température extérieure, etc. On traduira ces différents comportements par l'appartenance à l'un ou l'autre des états, appelés *état supraconducteur* et *état normal* (l'aluminium, par exemple, est toujours à l'état normal à température ambiante, mais il peut être à l'état supraconducteur à basse température).

L'*état supraconducteur* est caractérisé par plusieurs propriétés électromagnétiques particulières ; nous nous intéressons ici à ses propriétés magnétiques.

Une première propriété d'un matériau à l'état supraconducteur est d'empêcher un champ magnétique extérieur de pénétrer à l'intérieur. Plus précisément, lorsque le matériau étudié est soumis à un champ magnétique extérieur  $\vec{H}_e$ , pas trop grand, et que le matériau est refroidi en dessous d'une température critique, le champ magnétique intérieur  $\vec{H}$ , induit par  $\vec{H}_e$ , est expulsé du matériau : c'est ce que l'on appelle l'*effet Meissner*. Cette propriété est expliquée par les physiciens par l'existence, à l'état supraconducteur, de paires d'électrons, appelées paires de Cooper ou *super-électrons*, qui sont obtenues par le regroupement d'électrons de spin et de moment opposés et qui créent un « supercourant » intérieur différent du courant électrique habituel. Ce supercourant crée un autre champ magnétique qui s'oppose au précédent et l'expulse hors du matériau. Lorsqu'il n'existe pas de superélectrons, le champ magnétique extérieur pénètre dans le matériau qui est alors à l'*état normal*.

Une autre propriété d'un matériau à l'état supraconducteur est qu'un champ magnétique extérieur  $\vec{H}_e$  suffisamment fort détruit l'état supraconducteur (le matériau ne peut alors qu'être à l'état normal).

Notons que chez certains matériaux supraconducteurs, il existe un autre état, appelé *état mixte*, qui est un état intermédiaire. Cet état n'apparaît pas dans le problème traité ici.

Nous nous intéressons ici aux changements d'état d'un *film* supraconducteur lorsque l'intensité du champ magnétique extérieur  $\vec{H}_e$  varie, ainsi que l'épaisseur du film. La température extérieure est un paramètre important du problème physique, mais elle n'apparaîtra pas explicitement dans les équations en raison d'un changement de variables. Nous supposons dans la formulation que la température du matériau est en dessous d'une certaine température critique qui permet l'existence d'un état supraconducteur.

## 1.2. Modélisation du problème

*Les inconnues.* — L'état du film est décrit par un couple  $(f, \vec{A})$ , où  $f$  est une fonction d'onde, a priori complexe, telle que  $|f|^2$  représente la densité de superélectrons dans le matériau. Nous aurons donc  $f \equiv 0$  à l'état normal, car il n'y a pas de superélectrons, et  $f \not\equiv 0$  à l'état supraconducteur.  $\vec{A}$  est le potentiel magnétique intérieur avec  $\vec{H} = \text{rot}(\vec{A})$ .

Les états du film sont donnés, en fonction des paramètres du problème, par les minima locaux ou globaux d'une fonctionnelle, appelée fonctionnelle de Ginzburg-Landau, qui est invariante par changement de jauge ; nous la donnerons plus loin dans le contexte de notre problème.

*Les paramètres.* — Le matériau considéré ici étant un film, trois paramètres physiques vont intervenir :  $2d$  (l'épaisseur du film),  $h = |\vec{H}_e|$  (l'intensité du champ magnétique extérieur) et  $\kappa$  (le paramètre de Ginzburg-Landau, caractéristique du matériau).

Lorsque  $\vec{H}_e$  est parallèle au film, une modélisation de V. L. Ginzburg et L. D. Landau [**GiLa**] ramène le problème à un problème en dimension *un* d'espace et à une fonction d'onde  $f$  réelle.

En choisissant l'axe  $Oz$  dans la direction de  $\vec{H}_e$  et l'axe  $Ox$  perpendiculaire au film, nous avons  $f : x \in [-d, d] \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ , et  $\vec{H} = (0, 0, H(x))$ . L'invariance par changement de jauge de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau permet de choisir  $\vec{A}$  de divergence nulle et telle que  $\vec{A} = (0, A, 0)$  avec  $A = A(x)$ ,  $x \in [-d, d]$ . La *fonctionnelle de Ginzburg-Landau* est alors définie par

$$(f, A) \mapsto \Delta G_{d,h,\kappa}(f, A) = \int_{-d}^d \left[ \frac{1}{2} f^4 - f^2 + \kappa^{-2} f'^2 + f^2 A^2 + (A' - h)^2 \right] dx ,$$

où  $(f, A) \in (H^1([-d, d]))^2$ .

Nous appellerons *solutions normales* les couples  $(f, A)$  qui sont points critiques de  $\Delta G_{d,h,\kappa}$  et tels que  $f \equiv 0$ , et *solutions supraconductrices* les autres points critiques. Notons que l'ensemble de ces points critiques n'est pas connu en général.

**1.3. Réduction du problème et objectifs principaux.** — Dans l'étude de la transition état supraconducteur-état normal, la littérature de la physique met en évidence pour  $\kappa$  petit et  $d$  assez grand, l'existence d'un cycle d'hystérésis défini par deux champs magnétiques critiques, l'un, appelé *champ de retard à la condensation*, est noté  $h^{sc}(\kappa, d)$ , et l'autre, appelé *champ de surchauffe*, est noté  $h^{sh}(\kappa, d)$ ; ces champs critiques sont tels que  $0 < h^{sc}(\kappa, d) < h^{sh}(\kappa, d) < +\infty$ .

Nous avons étudié le champ critique  $h^{sc}(\kappa, d)$  dans [Bo] et [BoHe1] (pour tout  $\kappa > 0$ ); ce champ critique y est défini par une *limite de stabilité* des solutions normales.

Nous nous intéressons ici au champ de surchauffe associé à la *limite d'existence de solutions supraconductrices*. Pour simplifier le problème, nous nous limiterons au cas des *solutions supraconductrices symétriques* (c'est-à-dire des solutions  $(f, A)$  telles que  $f$  soit impaire et  $A$  paire) et *positives* (c'est-à-dire telles que  $f > 0$ ).

Nous restreignons donc la fonctionnelle  $\Delta G_{d,h,\kappa}(f, A)$  à l'intervalle  $] -d, 0[$ , puis à  $]0, d[$  par translation (le bord du film est alors en 0). Ceci nous amène à définir une fonctionnelle de Ginzburg-Landau réduite,  $\varepsilon_{d,h,\kappa}$ , par

$$\varepsilon_{d,h,\kappa}(f, A) = \int_0^d \left[ \frac{1}{2} f^4 - f^2 + \kappa^{-2} f'^2 + f^2 A^2 + (A' - h)^2 \right] dx,$$

où  $(f, A) \in V = \{(f, A) \in (H^1(]0, d[))^2 \text{ t. q. } A(d) = 0\}$ . Les points critiques de la fonctionnelle  $\varepsilon_{d,h,\kappa}$  sont les solutions des équations d'Euler-Lagrange,

$$(1.1) \quad (GL)_d^s \quad \begin{cases} (1) & -\kappa^{-2} f'' - f + f^3 + A^2 f = 0 \quad \text{sur } ]0, d[ , \\ (2) & -A'' + f^2 A = 0 \quad \text{sur } ]0, d[ , \\ (3) & f'(0) = 0, \quad f'(d) = 0, \\ (4) & A'(0) = h, \quad A(d) = 0, \end{cases}$$

où  $(f, A) \in (H^2(]0, d[))^2$ . Ces équations sont appelées *équations de Ginzburg-Landau*.

Les conditions limites (3) et (4) sont les conditions limites naturelles du problème de minimisation dans l'espace  $V$ . Les relations  $f'(d) = 0$  et  $A(d) = 0$  proviennent de la symétrie du problème, la relation  $f'(0) = 0$  exprime que le matériau est isolé et la relation  $A'(0) = h$  que le champ magnétique est donné au bord du film.

Nous noterons souvent  $(f, A; h)$  une solution des équations de Ginzburg-Landau, associée au paramètre  $h$ , et  $\mathcal{S}_d^+$  l'ensemble de solutions positives,

$$\mathcal{S}_d^+ = \{(f, A; h) \text{ solution de } (GL)_d^s \text{ t.q. } (f, A) \in (H^2(]0, d[))^2 \text{ et } f > 0\}.$$

Enfin, nous définissons un champ de surchauffe en restriction aux solutions positives,

$$h^{sh,+}(\kappa, d) = \sup \{h > 0; \exists (f, A; h) \in \mathcal{S}_d^+\}.$$

Pour étudier le champ critique de surchauffe lorsque  $d$  est grand, V. L. Ginzburg a introduit une autre modélisation par un modèle limite dit *modèle du demi-espace*, qui est défini sur l'intervalle non borné  $[0, +\infty[$ . Pour obtenir formellement ce problème

limite, nous prenons  $d = +\infty$  dans la définition de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau, mais ceci n'est possible qu'après renormalisation de la fonctionnelle en lui ajoutant le terme  $(\frac{1}{2} - h^2) d$  (cf. [BoHe2] ou [BoHe3]). La nouvelle fonctionnelle d'énergie est alors donnée par

$$\epsilon_{\infty, h, \kappa}(f, A) = \int_0^{+\infty} \left[ \frac{1}{2}(1 - f^2)^2 + \kappa^{-2} f'^2 + f^2 A^2 + A'^2 \right] dx + 2hA(0),$$

pour  $(f, A) \in \mathcal{H}_\infty = \{(f, A) ; (1 - f) \in H^1(]0, \infty[), A \in H^1(]0, \infty[)\}$ . Les équations de Ginzburg-Landau correspondantes sont alors :

$$(1.2) \quad (GL)_\infty \quad \begin{cases} -\kappa^{-2} f'' - f + f^3 + A^2 f = 0 & \text{sur } ]0, +\infty[, \\ -A'' + f^2 A = 0 & \text{sur } ]0, +\infty[, \\ f'(0) = 0, \\ A'(0) = h, \end{cases}$$

où  $(1 - f, A) \in (H^2(]0, +\infty[))^2$ .

Par analogie avec le problème précédent, nous notons  $\mathcal{S}_\infty$  l'ensemble des solutions,

$$\mathcal{S}_\infty = \{(f, A; h) \text{ solution de } (GL)_\infty \text{ telle que } (1 - f, A) \in (H^2(]0, \infty[))^2\},$$

et nous définissons le *champ critique de surchauffe* pour le problème  $(GL)_\infty$  par

$$(1.3) \quad h^{sh}(\kappa, +\infty) = \sup \{h > 0, \exists (f, A; h) \in \mathcal{S}_\infty\}.$$

P. G. De Gennes a obtenu de manière heuristique la localisation suivante de l'ensemble de solutions de  $\mathcal{S}_\infty$ , lorsque  $\kappa \rightarrow 0$  :

$$(1.4) \quad h^2 \sim \frac{\sqrt{2}}{\kappa} f(0)^2 \cdot (1 - f(0)^2);$$

en conséquence, il donne l'approximation suivante du champ de surchauffe, pour  $\kappa$  petit, en maximisant sur  $f_0$ ,

$$(1.5) \quad \kappa (h^{sh}(\kappa, \infty))^2 \sim \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Une telle formule est importante dans la pratique car elle permet de calculer la valeur caractéristique  $\kappa$  de nouveaux matériaux, en mesurant leur champ de surchauffe.

L'objet de l'étude présentée ici est de justifier, sous certaines hypothèses sur  $\kappa$  et  $d$ , l'introduction du modèle du demi-espace dans une étude approchée du champ de surchauffe  $h^{sh,+}(\kappa, d)$ . Dans ce but, nous étudions successivement les problèmes  $(GL)_\infty$ , puis  $(GL)_d^s$ , dans des régimes asymptotiques où  $\kappa$  tend vers 0 et où, pour  $(GL)_d^s$ ,  $d$  tend vers  $+\infty$ . Pour chacun de ces modèles, nous donnons des estimations fines sur les solutions, afin d'encadrer a priori le champ de surchauffe; puis, nous construisons, par des techniques de sous-solutions, une solution pour un  $h$  voisin du champ magnétique critique obtenu précédemment, afin d'en obtenir une borne

inférieure. Les principales difficultés viennent du couplage entre les deux équations et du nombre de paramètres.

## 2. Le problème du demi-espace

L'étude mathématique du problème du demi-espace est faite essentiellement dans [BoHe2] et [BoHe3], mais elle a été complétée par la suite.

Donnons tout d'abord quelques propriétés élémentaires des solutions.

### 2.1. Premières propriétés

**Proposition 2.1** (cf. par ex. [BoHe3], [BoHe4], [BoFoHe]). — Pour tout  $\kappa > 0$  et pour toute solution  $(f, A; h) \in \mathcal{S}_\infty$ ,

- 1)  $|f| \leq 1$ ;
- 2)  $f$  est strictement positive, strictement croissante;
- 3)  $A$  est négative, strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

De plus, il n'existe pas de solutions normales dans  $\mathcal{S}_\infty$ , car  $(0, A; h)$  n'est jamais dans  $\mathcal{S}_\infty$ .

Les solutions *supraconductrices* sont souvent représentées dans la littérature de la physique par le graphe d'une fonction  $(f_0, h(f_0))$  où  $f_0$  est la valeur de  $f$  au bord du film; l'existence de ce graphe est montré dans [BoCa] pour ce problème. Des résultats numériques donnent pour l'ensemble des couples  $(f_0, h(f_0))$  solutions, une courbe partant de  $(1, 0)$ , présentant un point de retournement en un  $h > 2^{-1/2}$ , et tendant vers  $(0, 2^{-1/2})$  lorsque  $f_0 \rightarrow 0$ .

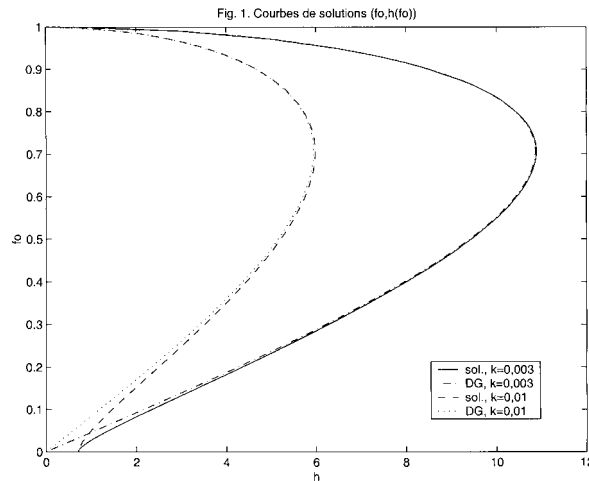


FIGURE 1. Courbes de solutions  $\text{sol} = (f_0, h(f_0))$  pour  $\kappa = 0,003$  et  $\kappa = 0,01$ .

*Comparaison avec les courbes DG données par la formule (1.4).* — L'étude de la limite quand  $f_0$  tend vers 0 est faite dans [BoHe6]. Notons aussi que, lorsque  $h > 1/\sqrt{2}$ , la fonctionnelle de Ginzburg-Landau n'est pas bornée inférieurement, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de minimum global (cf. [BoHe2]).

**2.2. Formules de De Gennes lorsque  $f(0) \geq \rho > 0$ .** — Afin de localiser les solutions de  $(GL)_\infty$  et d'étudier le champ de surchauffe  $h^{sh}(\kappa, +\infty)$ , les estimations a priori suivantes jouent un rôle important :

**Proposition 2.2 (cf. [BoHe3]).** — *Pour tout  $\kappa > 0$  et toute solution  $(f, A; h) \in \mathcal{S}_\infty$ ,*

- 1)  $\kappa h^2 \geq \sqrt{2} f(0)^2 (1 - f(0)^2)$ ,
- 2)  $\kappa h^2 \leq \sqrt{2} f(0)^2 (1 - f(0)^2) + 5\sqrt{2} \frac{h}{f(0)}$ .

Pour obtenir ces inégalités, on minore (ou on majore)  $h^2 = A'(0)^2$  grâce à des estimations fines des diverses quantités  $A, A', f, f'$ . On utilise en particulier le principe du maximum et la relation de conservation suivante :

$$(2.1) \quad \forall x \in [0, +\infty[ , \quad \kappa^{-2} f'(x)^2 + A'(x)^2 - f(x)^2 A(x)^2 - \frac{1}{2} (1 - f(x)^2)^2 = \tilde{C} ,$$

où  $\tilde{C}$  est une constante qui, compte tenu des conditions à l'infini, est égale à 0. Grâce à ces outils, nous montrons, par exemple dans [BoHe3], et pour obtenir les résultats de la Proposition 2.2, les relations suivantes.

**Lemme 2.3.** — *Pour tout  $\kappa > 0$  et pour toute solution  $(f, A; h) \in \mathcal{S}_\infty$ ,*

- 1) *pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $0 \leq \kappa^{-1} f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - f(x)^2)$ ;*
- 2) *pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $0 \leq -A(x) f(x) \leq A'(x) \leq -A(x)$ .*

Sous réserve de montrer l'existence de solutions, la Proposition 2.2 permet de justifier la formule de De Gennes (1.4) en dehors d'un domaine où  $f(0)$  est petit. Nous déduisons en effet de cette proposition l'encadrement qui suit.

**Théorème 2.4.** — *Pour tout  $\rho \in ]0, 1]$ , il existe des constantes  $C_\rho > 0$  et  $\kappa_0 > 0$  telles que, pour tout  $\kappa \in ]0, \kappa_0]$  et tout  $(f, A; h) \in \mathcal{S}_\infty$  vérifiant  $f(0) \geq \rho > 0$ , on ait*

$$(2.2) \quad | \kappa h^2 - \sqrt{2} f(0)^2 (1 - f(0)^2) | \leq C_\rho \kappa^{1/2} .$$

Du Théorème 2.4, nous déduisons une borne supérieure d'un champ de surchauffe « local », restreint aux solutions telles que  $f(0) \geq \rho$  (cf. aussi la définition (1.3)).

**Corollaire 2.5.** — *Pour tout  $\rho \in ]0, 1]$ , il existe  $C_\rho > 0$  et  $\kappa_0 > 0$  tels que, pour tout  $\kappa \in ]0, \kappa_0]$ ,*

$$(2.3) \quad \kappa (h^{sh, \rho}(\kappa, \infty))^2 \leq \frac{\sqrt{2}}{4} + C_\rho \kappa^{1/2} ,$$

où  $h^{sh, \rho}(\kappa, \infty) = \sup \{ h > 0 , \exists (f, A; h) \in \mathcal{S}_\infty \text{ tel que } f(0) \geq \rho \}$ .

**2.3. Comportement des solutions lorsque  $0 < f(0) \leq \rho$ .** — Nous avons déjà noté que la formule (1.4) ne peut pas se justifier lorsque  $f_0 = f(0)$  tend vers 0, puisque, comme énoncé plus haut,  $h(f_0)$  tend vers  $2^{-1/2}$  quand  $f_0$  tend vers 0, ce qui ne concorde évidemment pas avec (1.4). Par contre, nous pouvons remarquer que le champ de surchauffe donné par P. G. De Gennes en (1.5) est le terme principal de la borne supérieure de  $h^{s,h,\rho}(\kappa, \infty)$  lorsque  $\rho \sim 2^{-1/2}$  (cf. (2.3)); pour obtenir une borne supérieure d'un champ de surchauffe *global*, il suffit donc de montrer que  $\kappa h^2 < \sqrt{2}/4$  lorsque  $\kappa$  est petit dès que  $f(0) \in ]0, \rho]$ , pour un  $\rho$  convenable. Ceci est fait dans [BoHe3] où nous obtenons un minorant de  $f$  au voisinage de  $x = 0$  (lorsque  $f(0)$  est petit) permettant de lever la restriction  $f(0) \geq \rho$  du Corollaire 2.5.

**2.4. Borne inférieure du champ de surchauffe.** — Pour obtenir une borne inférieure du champ de surchauffe, il nous faut montrer l'existence d'une solution pour un  $h$  aussi grand que possible. Nous utilisons la *méthode des sous-solutions*. C'est une méthode classique dans le cadre des équations elliptiques ou paraboliques, que nous avons pu adapter à notre système en écrivant le problème sous la forme d'une équation ayant un terme non local :

$$(2.4) \quad \begin{cases} -\kappa^{-2}f'' - f + f^3 + h^2 B(f)^2 f = 0 & \text{dans } ]0, +\infty[, \\ f'(0) = 0, \\ (1 - f) \in H^2(]0, +\infty[), \end{cases}$$

où  $f \in H^2(]0, +\infty[)$  et où  $B(f)$  est la solution du problème suivant (lorsque  $f \neq 0$ ) :

$$(2.5) \quad \begin{cases} -B'' + f^2 B = 0 & \text{dans } ]0, +\infty[, \\ B'(0) = 1, \\ B \in H^2(]0, +\infty[). \end{cases}$$

Pour  $h > 0$ , un couple de fonctions  $(\phi, h B(\phi); h)$  est appelé *sous-solution* de  $(GL)_\infty$  si

$$(2.6) \quad \begin{cases} -\kappa^{-2}\phi'' - \phi + \phi^3 + h^2 B(\phi)^2 \phi \leq 0 & \text{dans } ]0, +\infty[, \\ \phi'(0) = 0, \\ (1 - \phi) \in H^2(]0, +\infty[), \end{cases}$$

où  $B(\phi) \in H^2(]0, +\infty[)$  est la solution de (2.5) avec  $\phi$  au lieu de  $f$ . De même, un couple de fonctions  $(\psi, h B(\psi); h)$  est une *sur-solution* du système  $(GL)_\infty$  si  $(\psi, h B(\psi); h)$  vérifie (2.6) avec l'égalité inverse.

On montre, en utilisant le principe du maximum sur les équations elliptiques et des propriétés de monotonie de  $B(f)$  par rapport à  $f$  que, s'il existe une sous-solution  $(\phi, h B(\phi); h)$  et une sur-solution  $(\psi, h B(\psi); h)$  telles que  $\phi \leq \psi$  dans  $]0, +\infty[$ , alors il existe une solution  $(f, h B(f); h)$  de  $(GL)_\infty$  vérifiant

$$\phi \leq f \leq \psi \quad \text{dans } ]0, +\infty[.$$

On vérifie aisément que  $\psi \equiv 1$  donne une sur-solution de  $(GL)_\infty$ . Il suffit donc de construire une sous-solution de ce problème. Donnons une telle sous-solution.

**Lemme 2.6 (cf. [BoHe2]).** — *Il existe des constantes  $C_0, C_1, C_2$  et  $\kappa_0$  telles que pour tous  $\kappa \in ]0, \kappa_0]$  et  $h > 0$  vérifiant  $\kappa^{1/2}h = 2^{-3/4} + C_0\kappa$ , la fonction*

$$(2.7) \quad \phi(x) = \kappa^2 h^2 2^{-1/2} (1 + C_1\kappa) \exp\left(-(\sqrt{2} - C_2\kappa)x\right) + \tanh\left(\frac{\kappa}{\sqrt{2}}x + x_{h,\kappa}\right),$$

où  $x_{h,\kappa}$  est déterminée par la condition  $\phi'(0) = 0$ , définit une sous-solution  $(\phi, h B(\phi); h)$  du problème  $(GL)_\infty$ .

La démonstration est très technique. La principale difficulté apparaît dans la majoration du terme  $B(\phi)^2 \phi$ . On obtient des résultats suffisamment précis en étudiant une équation vérifiée par cette fonction.

Une conséquence du lemme est, sous les mêmes hypothèses, l'obtention d'une borne inférieure du champ de surchauffe,

$$\kappa^{1/2}h^{sh}(\kappa, \infty) \geq 2^{-3/4} + C_0\kappa.$$

**2.5. Estimation du champ de surchauffe pour  $(GL)_\infty$ .** — En regroupant les études précédentes, nous déduisons le résultat suivant.

**Théorème 2.7.** — *Il existe des constantes  $\kappa_0 > 0$  et  $C > 0$  telles que, pour tout  $\kappa \in ]0, \kappa_0]$ , on ait*

$$|\kappa (h^{sh}(\kappa, \infty))^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}| \leq C \kappa^{1/2}.$$

Ainsi nous obtenons la formule (1.5) avec une précision de l'ordre de  $\mathcal{O}(\kappa^{1/2})$ .

Des résultats récents de P. Del Castillo (cf. [Ca1]) permettent d'améliorer la minoration du champ critique. P. Del Castillo donne en effet, dans sa thèse, le terme suivant du développement de  $h^{sh}(\kappa, \infty)$  en puissances de  $\kappa$ , vérifiant ainsi partiellement une conjecture de H. Parr (cf. aussi [DBD]). Par contre, une amélioration de la majoration de  $(h^{sh}(\kappa, \infty))$  reste un problème ouvert.

### 3. Le problème $(GL)_d^s$

Considérons maintenant le problème  $(GL)_d^s$  sur l'intervalle borné  $[0, d]$ . Le problème est ici plus délicat que sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  en raison, d'une part, de l'existence d'un paramètre supplémentaire (le paramètre  $d$ ) et, d'autre part, d'une utilisation moins immédiate de la relation de conservation (2.1) (ce qui est dû au fait que la constante  $\bar{C}$  dépend maintenant de  $d$  et est donc inconnue).

**3.1. Quelques propriétés des solutions de  $(GL)_d^s$ .** — Contrairement au problème  $(GL)_\infty$ ,

- (1) pour tout  $\kappa > 0, d > 0$  et  $h > 0$ , il existe une solution normale du problème  $(GL)_d^s$  (la solution  $(0, h(d - x); h)$ );
- (2) si  $(f, A; h)$  est une solution, alors  $f$  n'est pas nécessairement positive.



En se restreignant aux solutions positives, nous montrons que les conclusions de la Proposition 2.1 sont encore vraies sur  $[0, d]$  au lieu de  $[0, +\infty[$  (cf. par exemple [BoHe2]) ; mais de nombreux autres problèmes restent ouverts.

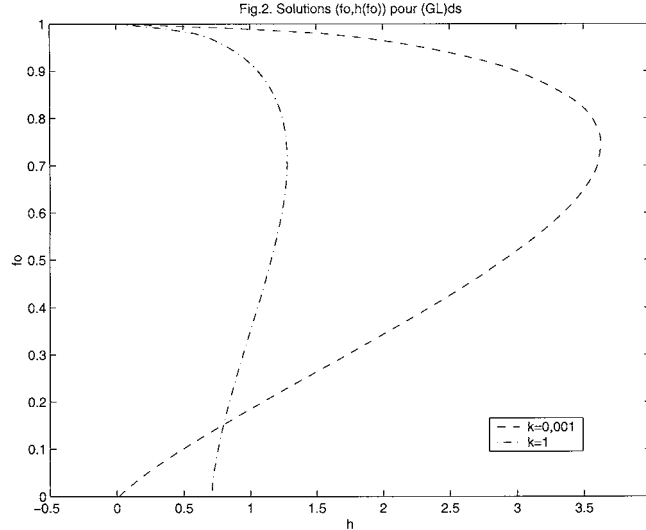


FIGURE 2. Courbes de solutions  $(f_0, h(f_0))$  du problème  $(GL)_d^s$

**Remarque 3.1.** — Le comportement des solutions de  $(GL)_d^s$  est très différent de celui des solutions de  $(GL)_\infty$  lorsque, pour  $f(0)$  petit et  $\kappa > 0$  fixé, on fait tendre  $d$  vers  $+\infty$ . Ce comportement est définie par le résultat de bifurcation suivant (cf. [BoHe1]) : pour tous  $\kappa > 0$  et  $d > 0$ , il existe une courbe de solutions supraconductrices bifurquées de  $(GL)_d^s$ , issues d'une solution normale  $(0, h_0(d - \kappa); h_0)$  ; la bifurcation est obtenue pour un  $h_0 = h_0(\kappa, d) > 0$  unique tel que  $h_0(\kappa, d)$  tende vers  $\kappa$  lorsque  $d \rightarrow +\infty$ .

Notons aussi que A. Aftalion et E. Dancer ont donné un résultat d'unicité (cf. [AfDa]) pour tout  $\kappa > 0$ , mais pour  $d$  « petit », et que nous avons montré d'existence de solutions asymétriques ( $f$  n'est ni paire, ni impaire) lorsque  $\kappa d$  est grand (cf. [BoHe5]). D'autres résultats numériques sont donnés dans [AfTr].

**3.2. Estimations des solutions lorsque  $f(0) \geq \rho > 0$ .** — Ce travail a été initialisé dans [BoFoHe] et amélioré dans [BoHe7]. Nous reprenons l'idée générale du paragraphe 2.1, mais ici la constante  $\tilde{C}$  de la relation de conservation (2.1) est égale à  $\tilde{C} = A'(d)^2 - \frac{1}{2}(1 - f(d))^2$ . La Proposition 2.2 est remplacée par la suivante (cf. [BoFoHe]) :

**Proposition 3.2.** — *Pour tout  $\kappa > 0$ , tout  $d > 0$  et toute solution positive  $(f, A; h) \in \mathcal{S}_d^+$ , nous avons :*

$$(3.1) \quad h^2 \leq \sqrt{2} \kappa^{-1} (1 - f(0)^2) f(0)^2 + (5\sqrt{2} + 6A'(d)) \frac{h}{f(0)} \\ + \kappa^{-1} \left( 2^{-1/2} + 2\kappa d \right) (1 - f(d)^2) + (2d + 1)A'(d)^2 .$$

et

$$(3.2) \quad h^2 \geq \sqrt{2} \kappa^{-1} (1 - f(0)^2) f(0)^2 - \sqrt{2} \kappa^{-1} (1 - f(d)^2) - 2(\kappa^{-1} + \sqrt{2}d)A'(d) .$$

Nous obtenons des termes additionnels de l'ordre de  $dA'(d)$  et  $(1 - f(d)^2)$ . Pour les contrôler, nous devons obtenir des estimations a priori très précises sur  $A'$  et  $(1 - f^2)$  à l'intérieur du film, c'est à dire en  $x = d$ . Dans ce but, nous avons montré des estimations de type Agmon sur ces fonctions, avec par exemple pour  $A'$  le résultat suivant.

**Lemme 3.3** (cf. [BoHe7], Lemma 5.4). — *Pour tous  $\kappa > 0$ ,  $d > 0$  et  $\gamma_1 \in ]0, 1[$ , et pour toute solution  $(f, A; h) \in \mathcal{S}_d^+$ , nous avons :*

$$\forall x \in [0, d], \quad A'(x) \leq \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{d}} h}{\sqrt{(1 - \gamma_1) f(0)}} \exp(-\gamma_1^{1/2} f(0) x) .$$

Nous obtenons des estimations analogues sur  $(1 - f^2)$  en améliorant celles données par [Ca1]. Il en résulte le théorème suivant.

**Théorème 3.4** (cf. [BoHe7], Théorème 5.2). — *Soit  $\rho \in ]0, 1[$  et  $\gamma \in ]0, 1[$ . Il existe des constantes  $L_\rho > 0$ ,  $\kappa_\rho > 0$ ,  $C_\rho > 0$  et  $C'_\rho > 0$  telles que, pour  $(\kappa, d)$  vérifiant  $0 < \kappa \leq \kappa_\rho$  et  $\kappa d \geq L_\rho$ , et pour toute solution  $(f, A; h) \in \mathcal{S}_d^+$  telle que  $f(0) \geq \rho$ , alors :*

$$(3.3) \quad \left| \kappa h^2 - \sqrt{2} f(0)^2 \cdot (1 - f(0)^2) \right| \leq C_\rho \kappa^{1/2} + C'_\rho \exp(-\gamma^{1/2} f(0) \kappa d) .$$

Cette formule est à comparer avec la formule (2.2) obtenue pour le problème  $(GL)_\infty$ . Les estimations a priori obtenues ici possèdent un terme supplémentaire exponentiellement petit lorsque  $\kappa d$  tend vers  $+\infty$ .

**3.3. Estimations lorsque  $0 < f(0) \leq \rho$  et effet Meissner.** — Lorsque  $f(0)$  est proche de 0, les estimations de type Agmon précédentes sur  $A'$  et sur  $(1 - f^2)$  ne sont pas suffisantes car elles ne permettent pas de faire tendre  $f(0)$  vers 0. Nous reprenons donc les techniques classiques liées au principe du maximum que nous avons utilisées en particulier pour le problème  $(GL)_\infty$ , mais en les appliquant à une fonction  $V = e^\Phi A'$ , où  $\Phi$  est une phase convenablement choisie. Nous obtenons alors la borne supérieure suivante pour  $A'$  :

**Proposition 3.5** (cf. [BoHe7]). — Soit  $\kappa > 0$  et  $d_0 > 0$ , alors il existe une constante  $\gamma \in ]0, 1[$  telle que, pour tout  $d \geq d_0$  et toute solution  $A \in H^2(]0, d[)$  de (1.1)<sub>(2,4)</sub> :

$$(3.4) \quad \forall x \in [0, d], \quad A'(x) \leq e^{\gamma d_0} A'(0) \cdot \exp\left(-\gamma \int_0^x f(t)^2 dt\right).$$

Outre l'efficacité de (3.4) dans le domaine qui nous intéresse ici, cette formule donne une mesure de l'effet Meissner, avec, en particulier,  $A'$  exponentiellement petit à l'intérieur du film lorsque  $\int_0^d f(t)^2 dt \geq \kappa^{-\beta}$  (pour  $\beta > 0$ ).

Le bon contrôle des solutions donné par la Proposition 3.5, lorsque  $f(0)$  est petit, nous permet, par une démonstration quelque peu technique (cf. [BoHe7]), de montrer que pour toute constante  $M \in ]0, \sqrt{2}/4[$ , il existe une constante  $\rho \in ]0, 1[$  telle que pour  $\kappa$  petit et  $\kappa d$  grand, et pour toute solution  $(f, A; h) \in S_d^+$  vérifiant  $0 < f(0) \leq \rho$ , alors

$$\kappa A'(0)^2 < M.$$

**3.4. Borne supérieure du champ de surchauffe  $h^{sh,+}(\kappa, d)$ .** — En combinant le résultat précédent et (3.3), nous déduisons une borne supérieure du champ de surchauffe dans le régime étudié.

**Proposition 3.6** (cf. [BoHe7]). — Il existe des constantes  $\gamma \in ]0, 1[$ ,  $C, C', \kappa_0 > 0$  et  $L_0 > 0$  telles que pour tout  $(\kappa, d)$  vérifiant  $\kappa \in ]0, \kappa_0]$  et  $\kappa d \geq L_0$  :

$$\kappa (h^{sh,+}(\kappa, d))^2 \leq \frac{\sqrt{2}}{4} + C\kappa^{1/2} + C' \exp(-\gamma\kappa d).$$

**3.5. Borne inférieure du champ de surchauffe  $h^{sh,+}(\kappa, d)$ .** — Pour obtenir une borne inférieure du champ de surchauffe, nous reprenons la méthode des sous-solutions décrite dans le paragraphe 2.3 et construisons une sous-solution adaptée au problème  $(GL)_d^s$  (cf. aussi [Ca2]).

Pour cela, nous reprenons la fonction  $\phi$  définie en (2.7) et grâce à une fonction de troncature permettant d'obtenir la condition de Neumann en  $x = d$  et quelques ajustements assez techniques pour contrôler tous les termes, nous montrons l'existence d'une solution  $(f, A; h)$  de  $(GL)_d^s$  pour un  $h$  tel que  $\kappa h^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + C_0\kappa^{1-\varepsilon} + C'_0 \exp(-\alpha_0\kappa d))$ , avec  $\kappa$  suffisamment petit et  $\kappa d$  suffisamment grand.

Si  $\Xi_1$  est une fonction de troncature  $C^\infty$  telle que

$$\Xi_1(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{si } y \geq \frac{3}{4}, \end{cases}$$

une sous-solution est donnée, pour des constantes  $C_0, C'_0, C_1, C'_1$  et  $\alpha_0$  convenables, par la fonction suivante :

$$(3.5) \quad \underline{\phi}(x) = \tanh \left( \frac{\kappa}{\sqrt{2}} (1 + C_1 \kappa^{1-\varepsilon} + C'_1 \exp(-\alpha_0 \kappa d)) x + x_{\kappa, h} \right) \\ + 2^{-1/2} \kappa^2 h^2 \exp(-\sqrt{2}x) + \lambda_{d, \kappa, h} \exp(-\sqrt{2}\kappa(d-x)) \Xi_1 \left( \frac{x}{d} \right),$$

où  $x_{\kappa, h}$  et  $\lambda_{d, \kappa, h}$  sont des constantes déterminées par  $\underline{\phi}'(0) = 0, \underline{\phi}'(d) = 0$ .

Nous en déduisons la borne inférieure suivante pour le champ de surchauffe (cf. [BoHe7]) :

**Proposition 3.7.** — *Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$  et  $\alpha_0 \in ]0, \sqrt{2}[$ . Il existe des constantes  $\kappa_0 > 0, L_0 > 0, C_0$  et  $C'_0$  telle que pour tout  $(\kappa, d)$  vérifiant  $0 < \kappa \leq \kappa_0$  et  $\kappa d \geq L_0$ ,*

$$\kappa (h^{sh,+}(\kappa, d))^2 \geq \frac{\sqrt{2}}{4} + C_0 \kappa^{1-\varepsilon} + C'_0 \exp(-\alpha_0 \kappa d).$$

Notons que cette technique de sous-solutions a permis à P. Del Castillo dans [Ca1] de montrer l'existence de solutions de  $(GL)_d^s$  ne correspondant pas à un minimum local.

**3.6. Estimation du champ de surchauffe  $h^{sh,+}(\kappa, d)$ .** — Des Propositions 3.7 et 3.6, nous déduisons immédiatement une estimation précise du champ de surchauffe.

**Théorème 3.8.** — *Étant donné  $\alpha_0 \in ]0, \sqrt{2}[$ , il existe des constantes  $\kappa_0 > 0, L_0 > 0, C_0 \geq 0$  et  $C'_0 \geq 0$  telles que pour tout  $(\kappa, d)$  vérifiant  $0 < \kappa \leq \kappa_0$  et  $\kappa d \geq L_0$ ,*

$$\left| \kappa (h^{sh,+}(\kappa, d))^2 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right| \leq C_0 \kappa^{1/2} + C'_0 \exp(-\alpha_0 \kappa d).$$

### Conclusion

L'étude présentée ici donne une bonne justification de la formule énoncée par P. G. De Gennes sur le champ de surchauffe de films supraconducteurs dans un régime où  $\kappa$  est petit et  $\kappa d$  grand. Elle montre aussi que, dans ce même régime, le problème  $(GL)_d^s$  est assez bien approché par le modèle du demi-espace, en dehors d'un domaine où  $f(0)$  est petit. Il serait cependant intéressant de montrer que l'écart entre les deux champs de surchauffe  $h^{sh}(\kappa, \infty)$  et  $h^{sh,+}(\kappa, d)$  est de l'ordre de  $\mathcal{O}(\exp(-\alpha_0 \kappa d))$ , afin de mieux comparer les deux modèles lorsque  $d$  est grand, au sens «  $\kappa d$  grand ».

### Remerciements

La première auteure aimerait remercier Anne-Marie Charbonnel et Colette Anné pour l'organisation de la journée de recherche « Femmes en Physique mathématique » à Nantes en novembre 2001 et de lui avoir ainsi donné l'occasion d'exposer ses derniers travaux.

### Références

- [AfDa] A. Aftalion, E. N. Dancer, On the symmetry and uniqueness of solutions of the Ginzburg-Landau equations for small domains (2000). *Com. Contemp. Math.* **3**, 1–14 (2001).
- [AfTr] A. Aftalion, W. C. Troy, On the solutions of the one-dimensional Ginzburg-Landau equations for superconductivity. *Physica D* **132**, 214–232 (1999).
- [Ag] S. Agmon, Lecture on Exponential Decay of Solutions of Second Order Elliptic Equations. *Math. Notes*, T. 29, Princeton University Press (1982).
- [Bo] C. Bolley, Modélisation du champ de retard à la condensation d'un supraconducteur par un problème de bifurcation. *Math. Model. Num. Anal.*, **26** n° 2, 235–287 (1992).
- [BoCa] C. Bolley, P. Del Castillo, Existence and uniqueness for the half-space Ginzburg-Landau model. *Nonlin. Anal.* **47**, n° 1, 135–146 (2001).
- [BoFoHe] C. Bolley, F. Foucher, B. Helffer, Superheating field for the Ginzburg-Landau equations in the case of a large bounded interval. *J. Math. Phys.* **41** n° 11, 7263–7289 (2000).
- [BoHe1] C. Bolley, B. Helffer, An application of semi-classical analysis to the asymptotic study of the supercooling field of a superconducting material. *Ann. Inst. Henri Poincaré (Physique Théorique)* **58** n° 2, 169–233 (1993).
- [BoHe2] C. Bolley, B. Helffer, Rigorous results for the Ginzburg-Landau equations associated to a superconducting film in the weak  $\kappa$ -limit. *Reviews in Math. Physics* **8** n° 1, 43–83 (1996).
- [BoHe3] C. Bolley, B. Helffer, Proof of the De Gennes formula for the superheating field in the weak  $\kappa$  limit. *Ann. Inst. Henri Poincaré (Analyse non linéaire)* **14** n° 5, 597–613 (1997).
- [BoHe4] C. Bolley, B. Helffer, The Ginzburg-Landau equations in a semi-infinite superconducting film in the large  $\kappa$  limit. *Eur. J. Appl. Math.* **8**, 347–367 (1997).
- [BoHe5] C. Bolley, B. Helffer, Stability of bifurcating solutions for the Ginzburg-Landau equations. *Rev. in Math. Physics* **10** n° 5, 579–626 (1998).
- [BoHe6] C. Bolley, B. Helffer : A priori estimates for Ginzburg-Landau solutions. Institut Scientifique de Cargèse (1999). Submitted in *Nonlinear PDE's in Physics*, H. Berestycki and Y. Pomeau eds., NATO Science ASI Series. Elsevier Publ. Co., Dordrecht. Rapport de recherche de l'Université de Nantes (2002).
- [BoHe7] C. Bolley, B. Helffer, Global superheating field for superconductors in a large bounded interval. *Physica D* **172** n° 1–4, 162–189 (2002).
- [Ca1] P. Del Castillo, Etude de champs critiques en théorie de Ginzburg-Landau, Thèse de Doctorat de l'Université de Paris-Sud, Orsay, 2000.
- [Ca2] P. Del Castillo, Two terms in the lower bound for the superheating field in a semi-infinite film in the weak- $\kappa$  limit. *Europ. J. Appl. Math.* **13** n° 5, 517–544 (2002).

- [Ch] S. J. Chapman, Superheating field of type II superconductors. *Siam J. Appl. Math.* **55** n° 5, 1233–1258 (1995).
- [DBD] A. J. Dolgert, S. J. Di Bartolo, A. T. Dorsey, Superheating fields of superconductors : asymptotic analysis and numerical results. *Phys. Rev. B* **53** n° 9, 5650-5660 (1996).  
Erratum : Superheating fields of superconductors : asymptotic analysis and numerical results. *Phys. Rev. B* **56** n° 5, 2883 (1997).
- [Ge] P. G. de Gennes, Superconductivity, selected topics in solid state physics and theoretical Physics. *Proc. of 8-th Latin American School of Physics*, Caracas (1966).
- [Gi2] V. L. Ginzburg, On the destruction and the onset of superconductivity in a magnetic field, *Zh. Eksperim. i Teor. Fiz.* **34**, 113-125 (1958). Transl. *Soviet Physics JETP* **7**, 78–87 (1958).
- [GiLa] V. L. Ginzburg, L. D. Landau, On the theory of superconductivity. *Zh. Eksperim. i Teor. Fiz.* **20**, 1064-1082 (1950). English translation *Men of Physics*, L. D. Landau, D. Ter Haar ed., Pergamon Press, Oxford, 1965.
- [JaSaTh] D. Saint James, G. Sarma and E. J. Thomas, Type II Superconductivity. Pergamon Press, Oxford, 1969.
- [Pa] H. Parr, Superconducting superheating field for finite  $\kappa$ . *Z. Physik B* **25**, 359–361 (1976).

*Catherine Bolley*

UMR 6629 CNRS, École Centrale de Nantes, BP 92101, F-44321 Nantes Cedex 03.

*Bernard Helffer*

UMR 8628 CNRS, Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay.