

Une approche par les fonctions analytiques et l'approximation méromorphe du “ problème inverse EEG ” de localisation de foyers épileptogènes dans le cerveau depuis des mesures électroencéphalographiques

J. Leblond (INRIA, Sophia-Antipolis)¹

Dans le contexte bidimensionnel, les liens classiques entre les fonctions harmoniques et analytiques permettent de formuler les problèmes frontières pour l'opérateur de Laplace, qu'il soient directs ou inverses, en terme de reconstruction d'une fonction analytique (de la variable complexe) dans le domaine privé de ses éventuelles singularités, depuis ses valeurs sur une partie de la frontière. Les fonctions harmoniques sont en effet les parties réelles (ou imaginaires) de fonctions analytiques, que les équations de Cauchy-Riemann ou les formules de Poisson et Cauchy permettent, théoriquement, de calculer (intégrales de Carleman, “ boundary elements methods ”, ...).

Concernant les problèmes inverses, les procédures de *reconstruction* ou *d'extrapolation* sont cependant connues pour être relativement instables et peu robustes par rapport aux perturbations sur les données, lesquelles se produisent pourtant, numériquement et surtout expérimentalement (et ont pour effet que les données ne correspondent plus exactement à la classe - analytique ou harmonique - de fonctions considérée). Il semble ainsi approprié d'exprimer ces problèmes du Laplacien comme des questions de meilleure *approximation* dans les classes de Hardy H^p (de fonctions analytiques et bornées en norme L^p) du domaine, ou dans des classes de fonctions méromorphes ou rationnelles associées, le critère portant sur une partie de la frontière, avec une contrainte sur la partie complémentaire, éventuellement inaccessible aux mesures. Ces “ problèmes extrémaux bornés ” sont bien posés et admettent des schémas de résolution ayant de bonnes propriétés de robustesse et de continuité.

Notons que ce type d'approches revient en fait à discrétiser d'abord les conditions à la frontière, et non plus l'opérateur (comme traditionnellement avec les éléments finis, par exemple), en travaillant directement dans les classes de fonctions harmoniques / analytiques, et dispense aussi des résolutions itératives du problème direct associé, au profit d'une réelle efficacité numérique.

Pour préciser et illustrer ces liens, je m'appuierai sur un problème de détection / localisation de sources ponctuelles depuis des mesures frontière, intervenant notamment dans les modèles courants de détection par électroencéphalographie (EEG) de foyers épileptogènes dans le cortex. On l'aborde dans des géométries circulaires ou sphériques, en dimensions 2 et 3, en utilisant des procédures de meilleure approximation rationnelle en norme L^2 ou méromorphe en norme uniforme sur le cercle unité du plan complexe.

Je préciserai les notions et les résultats d'analyse intervenant dans ce traitement, ainsi que les schémas de résolution utilisés, et montrerai des simulations numériques.

1. En collaboration avec L. Baratchart (INRIA, S.-A.), A. Ben Abda, F. Ben Hassen, (ENIT-Lamsin, Tunis), J.-P. Marmorat (Ecole des Mines de Paris, CMA, S.-A.)