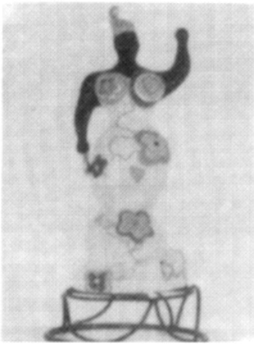
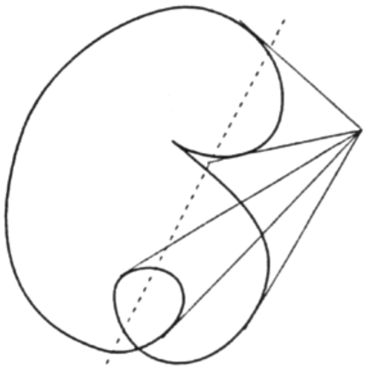
femmes & math

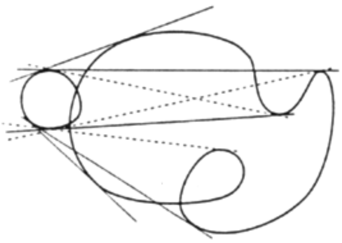


N°7

Décembre 2003

Sommaire





Revue de l'association
femmes et mathématiques

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris CEDEX 05

Niki de St Phalle
Nana with Golden turt
1986

Women's art magazin
sept/oct 1993

Eileen Cooper
Woman with birds
1989

L'ouvert

juin 1994

Women's art magazine
jan/feb 1992

Claude Cahun
Autoportrait
1929

L'ouvert

juin 1994

Women's art magazine
sept/oct 1995

SOMMAIRE

ÉDITORIAL

La publication de ce numéro a pris beaucoup de retard, pour de multiples raisons et en particulier, par manque de temps et « de bras » alors que les sollicitations que nous recevons sont de plus en plus nombreuses.

La plupart des textes ici réunis sont relatifs aux journées régionales de l'association qui ont eu lieu à Nantes en 2001.

La revue reflète une bonne partie de la vie et des activités de notre association sous les trois rubriques habituelles, dont voici succinctement les contenus.

Vie de l'association. — Les journées de Nantes avaient pour thème « Des femmes en physique mathématique » et une table ronde sur « les filles en écoles d'ingénieurs » avait eu lieu.
Nous publions ici le compte rendu des débats de cette table ronde.

Plusieurs mathématiciennes françaises ont participé en 2001 à la 10^{e} assemblée générale de l'association *European Women in Mathematics,* qui a eu lieu à Malte : Sylvie Paycha en fait un compte rendu.

Un colloque intitulé « Pour plus de femmes scientifiques. Bilans et perspectives » a eu lieu à l'Institut Henri Poincaré à Paris le 17 mai 2003. Annick Boisseau en a fait un compte rendu succint, déjà publié dans la revue *Quadrature.*

A propos de mathématiques. — Cette rubrique contient quatre articles de physique mathématique qui ont été exposés à Nantes lors de nos journées régionales en 2001. D'une part, deux articles qui sont liés à l'étude d'équations aux dérivées partielles : Laurence Nedelec étudie les résonances pour des opérateurs de Schrödinger matriciels tandis que Catherine Bolley et Bernard Helffer présentent leurs résultats sur les champs magnétiques critiques dans les matériaux supraconducteurs. Et d'autre part, deux articles où physique et mathématique sont intimement liées : Alessandra Frabetti introduit plusieurs théories de renormalisation de champs quantiques, et

Sylvie Paycha étudie les anomalies physiques et mathématiques de généralisations en dimension infinie de notions telles que la trace ou le déterminant d'une matrice. Monique Combescure [1], actuellement à l'Institut de Physique nucléaire de Lyon, a aussi exposé à Nantes ses recherches sur *Physique semi-classique et Mathématique semi-quantique* : on peut en trouver un résumé dans un article de CNRS Info de mai 2000, disponible à l'adresse `www.cnrs.fr/Cnrspresse/math2000/pdf/Maths13.pdf`.

A propos des femmes. — Mme Largillière, conseillère municipale, nous a chaleureusement reçues à la Mairie de Nantes en novembre 2001, et a prononcé un très beau discours en notre honneur en évoquant la mémoire de plusieurs femmes célèbres de la région nantaise : nous reproduisons ici son discours.

Huguette Delavault, qui a été l'une des premières adhérentes de l'association, et qui a beaucoup œuvré notamment pour les femmes scientifiques, est décédée en avril dernier : son amie Danielle Gondard lui rend hommage.

Cette revue serait incomplète s'il n'y avait pas quelques statistiques concernant les femmes : Christine Charretton se fait l'écho du travail entamé au ministère de l'Education nationale sous la direction de Francine Demichel, directrice de l'enseignement supérieur jusqu'à l'été 2002.

Enfin, au moment où le 6e PCRD se met en place, Nathalie Guri présente toutes les mesures en faveur des femmes dans ce programme européen destiné à subventionner la recherche en Europe et en France. Isabelle Collet présente le projet européen Ada, auquel elle a participé dans la région du nord de la France et en Belgique, et qui est destiné à favoriser l'accès des femmes aux métiers des technologies de l'information et de la communication. Ce projet tire son nom de Ada Lovelace, fille du poète Byron, et première programmeuse : son histoire est présentée aussi ici.

Tous nos remerciements vont aux auteures des articles pour le travail supplémentaire que ces textes leur ont demandé et leur patience pour notre lenteur à les publier.

Véronique Slovacek-Chauveau
présidente de l'association *femmes et mathematiques*

[1] M. Combescure, J. Ralston, D. Robert, A proof of the Gutzwiller semiclassical trace formula using coherent states decomposition, Comm. Math. Phys. 202, 463-480 (1999)

DIXIÈME RENCONTRE EUROPEAN WOMEN IN MATHEMATICS MALTE 24-30 AOÛT 2001

Sylvie Paycha

La dixième rencontre d'E.W.M. (European Women in Mathematics) a eu lieu à Malte, après une première tentative (qui a échoué) de l'organiser en Estonie. Malgré les difficultés liées à cette modification du site de la rencontre, celle-ci s'est déroulée dans de bonnes conditions, dans un cadre magnifique et une atmosphère très propices aux échanges informels entre les participantes.

De nombreuses jeunes mathématiciennes étaient présentes, qui ont toutes manifesté leur plaisir à participer à une rencontre mathématique si chaleureuse par rapport aux conférences dont elles avaient eu l'expérience auparavant. Cette rencontre rassemblait 76 personnes venues de 21 pays différents, dont la plupart européens (étaient aussi représentés le Liban et le Japon). Elle était essentiellement subventionnée par la communauté européenne, l'E.M.S. (European Mathematics Society) et l'U.N.E.S.C.O..

Le programme s'organisait en 4 sections :

1. Mathématiques financières. — Avec 3 exposés d'une heure :

– N. Bellami, Portfolio optimization in finance : an introduction
– F. Diener, Derivatives : a scientific revolution of the 70's
– N. Pontier, Why heavy tails in financial series ? Estimations and tests

Cette série d'exposés a été suivie d'une discussion très intéressante sur le rôle des mathématiques financières et des mathématiciens qui la pratiquent dans l'économie à l'heure actuelle. Certaines françaises présentes à la discussion ont manifesté le souhait de la prolonger dans le cadre de l'association Femmes et Mathématiques.

Les actes ont été publiés par World Scientific, Proceedings of the Tenth General Meeting European Women in Mathematics, 2003, Emilia Mezetti, Sylvie Paycha en sont les éditrices.

2. Mathématiques pures. — Avec 2 exposés d'une heure :

– C. de Fabritis, Analytic and geometric features of de Rham and Dolbeault cohomology
– Y. Ito, The Mc Kay correspondance : a bridge from algebra to geometry

suivis d'un exposé plus court :

– B. Fantechi, Cohomology of sheaves

3. Une section interdisciplinaire; utilisation d'outils géométriques dans divers domaines. — Avec 3 exposés d'une heure

– A. Weiss, Tessellations and related modular groups
– X. de la Ossa, Geometry in string theory
– C. Series, Why is there hyperbolic geometry in dynamical systems ?

suivis d'un exposé plus court :

– K. Rietsch, Total positivity, flag varieties and quantum cohomology

4. Popularisation des mathématiques. — Avec 2 exposés d'une heure :

– F. Bruckler, Popularization of mathematics : local and not so local perspectives
– M. Chaleyat-Morel, Raising public awaereness in mathematics

suivis d'un exposé plus court

– S. Schiller, Math-kit : a multimedia project for teaching mathematics to undergraduates

Des questions et débats qui ont suivi les exposés, il est ressorti en particulier que la popularisation des mathématiques et des sciences en général est moins développée en France qu'en Angleterre et aux États-Unis.

La terminologie « vulgarisation », anciennement utilisée pour désigner la popularisation des mathématiques en France, est révélatrice du manque de reconnaissance que connaît cette discipline au sein de la communauté mathématique française.

L'association E.W.M. et l'association Femmes et Mathématiques ont peut-être un rôle à jouer dans l'analyse de ce phénomène et dans les développements futurs de cette discipline.

A ces quatre sections s'ajoutaient d'autres types d'interventions, en particulier deux exposés sur la place des femmes dans les mathématiques et un (mini-) cours sur les polytopes :

La place des femmes dans les sciences

– C. Hermann, Women in science in Europe and in France
– R.M. Spitalieri, Focus on women and science in Italy.

Cours E.M.S sur les polytopes. — Série de 3 cours délivrés par M. Vergne sur les polytopes, cours organisés sous l'égide de l'E.M.S.

De plus, une session de « poster » a permis à 35 participantes de présenter leurs travaux; certaines avaient fait un réel effort de présentation, qui rendait leur poster très avenant.

Le programme de cette rencontre, qui était donc relativement dense, donnera lieu à des actes qui seront publiés par World Scientific.

L'assemblée générale — qui se tient tous les deux ans dans le cadre d'une rencontre de l'association E.W.M. — a permis d'élire la nouvelle coordonnatrice de l'association E.W.M., Ludmila Bordag, actuellement en poste a Cottbus, en Allemagne, et de mettre en place le comité d'organisation pour la prochaine rencontre d'E.W.M. prévue pour 2003, et dont le lieu reste à décider.

Sylvie Paycha
Département de Mathématiques Appliquées, Complexe universitaire des Cézeaux,
Université Blaise Pascal, 63177 Aubière cedex, France.
E-mail : `Sylvie.Paycha@math.univ-bpclermont.fr`

COMPTE RENDU DES DÉBATS DE LA TABLE RONDE « LES FILLES DANS LES ÉCOLES D'INGÉNIEURS »

Colette Anné et Anne-Marie Charbonnel

Les journées régionales 2001 de l'association *femmes et mathématiques* ont eu lieu les 9 et 10 novembre à l'université de Nantes. La première journée a été consacrée à des exposés scientifiques en physique mathématique (voir la rubrique « A propos de mathématiques » de ce numéro de la revue). La journée du 10 novembre 2001 a été consacrée à l'assemblée générale de l'association le matin et à une table ronde sur le thème « Les filles dans les écoles d'ingénieurs » l'après-midi. Un compte rendu de plusieurs interventions de cette table ronde a été publié dans la Gazette des Mathématiciens, n° 92 (avril 2002, Société mathématique de France), sous le titre *Les filles dans les écoles d'ingénieurs* et peut être consulté sur le site `http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~anne/`

Marie-France Gonin, déléguée régionale aux droits des femmes, a présenté la situation générale des femmes dans notre société au regard de l'éducation et de l'emploi. **Huguette Delavault**, co-auteure du rapport « Les femmes dans les filières de l'enseignement supérieur » (réalisé en octobre 2000 à la demande de Francine Demichel, directrice de l'Enseignement supérieur à l'époque), et dont cette journée a été la dernière intervention publique, a présenté la situation générale dans les écoles d'ingénieurs. Enfin **Patricia Lutse** (ingénieure à Électricité de France) a présenté le métier d'ingénieur, notamment pour une femme. A la suite de ces trois interventions, les personnes présentes à la table ronde ont décrit la situation dans leur école ou établissement d'enseignement supérieur.

Nicole Berline (mathématicienne) présente la situation à l'École polytechnique et renvoie aux travaux de Catherine Marry [1] pour ce qui se passe après l'École : « A l'entrée par concours la situation est stable depuis 1998. En 1997 il y a eu un grand changement : les deux filières MP et PC ont recruté le même nombre d'élèves. Le

[1] L'article « Polytechniciennes = polytechniciens ? », Les Cahiers du MAGE, 3-4, 1995, 73-86, l'article « Femmes et sciences : une équation improbable ? L'exemple des normaliennes scientifiques et des polytechniciennes », Formation-Emploi 55, 1996, 3-18, et le livre de C. Marry « Une révolution respectueuse, les femmes ingénieurs », Belin, 2004

résultat a été une très grosse décroissance du nombre de filles entrant en filière MP, tandis qu'en filière PC les pourcentage de filles sont restés stables.

Voici un tableau qui donne les nombres d'élèves en 1998 :

	Total français	filles françaises	total étrangers	étrangères
MP	177	17	16	5
PC	173	37	12	2
autre	50	1	40	7

La dernière ligne regroupe une filière technique et les universités étrangères. L'écrit du concours MP « massacre » les filles (l'École normale supérieure rencontre le même problème) : 15% des filles parmi les candidats, 10% parmi les admissibles et 9,6% parmi les reçus ; alors qu'au concours PC ces pourcentages restent égaux et autour de 20%.

Le jury est inquiet ; Mme Bénard, directrice adjointe à l'École normale supérieure, avait demandé un examen de toutes les copies de mathématiques, et elle croit observer que les garçons sont plus habiles que les filles à grappiller des points (rires dans la salle). J'ai tendance à rapprocher cette observation d'une autre qu'on peut faire dans la vie professionnelle : les femmes s'efforcent de bien faire leur travail, alors que les hommes s'efforcent de promouvoir leur carrière. Ces chiffres sont à rapprocher de ceux des classes préparatoires : en MP* il y a 19% de filles, et en PC* 24% (statistiques de l'Union des professeurs de spéciales).

A l'École polytechnique, on observe aussi que, durant le cursus, la proportion des filles dans le peloton de tête en mathématiques et physique est inférieure au pourcentage des admises alors qu'en chimie et en français elle est supérieure. Comment les filles s'orientent-elles ensuite ? L'école demande maintenant aux élèves de choisir une voie dès la première année.

	nb élèves	dont filles	% des choix des filles	des garçons
voie A (nature)	228	42	65%	45%
voie B (math-phys)	112	12	19%	25%
voie C (décision)	133	10	16%	30%

En deuxième année 22% des filles font de la biologie et seulement 9% des garçons ; 12% des filles font de la chimie et seulement 2% des garçons ; 5% des filles font de l'informatique et 11% des garçons ; 14% des filles font des mathématiques et 33% des garçons ; en mécanique, il y a beaucoup plus de filles ; en physique beaucoup plus de garçons.

Dernière remarque : le directeur du concours a été très agréable avec moi ; il a montré beaucoup de bonne volonté et a changé d'attitude vis à vis du problème. »

Nicole Burger (mathématicienne) présente la situation à l'IRESTE, école qui fait partie de l'École Polytechnique de l'Université de Nantes. Cette école recrute des étudiants après un DUT (30%), un DEUG (20%) ou une classe préparatoire (50%). Au total l'école recrute environ 300 étudiants en 5 filières. On y retrouve les mêmes tendances :

– en informatique très peu de filles 15%,
– en matériaux et thermiques 20 à 25%,
– en électricité beaucoup moins de filles,
– en électronique 15%.

Au total, 15% de filles, et c'est aussi la proportion des candidates, le concours n'est donc pas sexiste. A la sortie, d'après les statistiques (du CNISF ou de la Conférence des grandes écoles) les filles ont plus de CDD que les garçons qui ont plus de CDI. Cette différence n'existe pas pour les écoles de commerce !

Catherine Bolley (mathématicienne) présente la situation à l'École Centrale de Nantes : les filles représentent 22% des reçues, et il y a eu une augmentation par rapport à 4 ou 5 ans en arrière. Quant aux filières, il y a peu de filles en informatique, beaucoup plus actuellement dans la filière Génie Civil, grâce à son option environnement. Les filles ont conscience que ce sera plus difficile pour elles de trouver du travail. Il faut donc qu'elles se montrent les meilleures. On le constate en remarquant que les filles sont très souvent en tête, dans la plupart des options, dans les classements de fin d'études. Mais on constate aussi qu'à la sortie de l'école, les filles ont moins de CDI que les garçons.

Safouana Tabiou précise que la situation de l'École des Mines de Nantes semble un peu meilleure. Il n'y a que 15 à 20% de filles mais on ne note pas de discrimination à l'embauche. Dans l'école, les filles sont très actives (les activités extrascolaires sont encouragées). On est très fier des filles.

Zahra Royer (enseignante à l'IUT de Saint-Nazaire) présente la situation de cet IUT tertiaire et secondaire :

– « Dans le tertiaire, il y a 50% de filles mais elles ne vont pas au-delà du DUT pour prolonger leurs études. Par contre, 50% des garçons poursuivent en études de gestion, de la décision ou de logistique et cela leur permet d'obtenir des postes de direction ;

– en génie civil, on note une percée des filles ;

– dans le bâtiment, il y a toujours très peu de filles mais quand elles sont là, elles sont très solides ;

– au niveau de la formation continue, les femmes ne s'impliquent pas à cause de leurs responsabilités familiales ;

D'après une enquête nationale sur les anciens étudiants : il n'y a aucune fille à un poste de direction en logistique. »

Dominique Vellard (enseignante en informatique à l'IUT de Nantes) : « Dans la filière informatique, on ne peut pas parler comme ailleurs de progression lente ou même de stagnation du pourcentage de filles mais d'un recul drastique : en 1980, on avait 60% de filles et maintenant 10%. En sortie, les professionnels recrutent des femmes comme informaticiennes (après des études de chimie par exemple !), donc elles réapparaissent et on ne peut donc pas dire que les métiers de l'informatique sont uniquement masculins. »

Catherine Dubois et **Catherine Martineau** (enseignantes en classes préparatoires au lycée Clemenceau à Nantes) donnent les statistiques de l'UPS : 24% de filles en classes de PC*, 30% en PC, 19% en MP*, 25% en MP ; en sciences de l'ingénieur : 16% en classes* et 18% en classes non*. On remarque que les filles ont tendance à s'autocensurer dans leur choix en allant plutôt en classes non*.

Suite à ces interventions un débat s'engage. Il semble que chez les adolescents et adolescentes se développe une image terrifiante des classes préparatoires ; et ceci est étonnant, car en classes préparatoires, les étudiants et étudiantes sont tout de même encadrés, tandis qu'en pharmacie ou en médecine, où il y a beaucoup de femmes et où il y a aussi une quantité de travail énorme, on l'est beaucoup moins. Cependant il est fait remarquer qu'en marge des préparations universitaires au concours de pharmacie ou de médecine, il y a beaucoup de cours privés supplémentaires ; ainsi ces formations sont aussi des formations de classes d'élite.

En conclusion, les membres des associations présentes autour de cette table proposent différentes actions, mais elles insistent surtout sur la nécessité d'aller dans les écoles, les collèges et les lycées pour que les jeunes rencontrent des femmes qui exercent des métiers scientifiques, ainsi que des jeunes femmes qui ont suivi des études scientifiques telles que des ingénieures.

Dans cette optique, l'association *femmes et mathématiques* a produit une exposition "femmes en maths... pourquoi pas vous ?" qui présente des portraits de femmes qui ont fait des études de mathématiques et qui sont entrées dans la vie professionnelle avec des métiers très différents, des métiers de la recherche ou de l'enseignement mais aussi des métiers autres.

Par ailleurs, l'association française des femmes ingénieurs a réalisé un kit de présentation pour aider les personnes qui vont dans les écoles et les lycées pour parler du métier d'ingénieur.

Il est clair que les choses ne vont pas progresser naturellement. Il est indispensable d'agir, les trois associations Femmes Ingénieurs[2], *femmes et mathématiques*[3] et

[2]`http://www.femmes-ingenieurs.org/index_2.html`
[3]`http://www.femmes-et-maths.fr.fm/`

Femmes et Sciences[4] interviennent activement et élaborent ensemble des outils performants pour être plus efficaces, actions qui continuent à se développer au moment où ces débats sont publiés.

Colette Anné et Anne-Marie Charbonnel
Université de Nantes, 2, rue de la Houssinière, BP 92208, 44322 Nantes.
E-mail : colette.anne@math.univ-nantes.fr
E-mail : anne-marie.charbonnel@math.univ-nantes.fr

[4] http://www.int-evry.fr/femmes_et_sciences/

ÉCHOS DU COLLOQUE « POUR PLUS DE FEMMES SCIENTIFIQUES - BILANS ET PERSPECTIVES »

Annick Boisseau

Le samedi 17 mai 2003, à l'Institut Henri Poincaré (Paris), se tenait le colloque « Pour plus de femmes scientifiques - Bilans et perspectives » organisé par l'association *femmes et mathématiques* et l'Université de Reims Champagne-Ardenne. Ce colloque a réuni plus de 120 personnes, femmes et hommes, d'horizons très divers mais partageant les mêmes interrogations sur la faible proportion de filles dans les études supérieures scientifiques et de femmes dans les professions correspondantes. Le public, composé principalement d'universitaires et de professeur-e-s du secondaire, comprend aussi un proviseur de lycée, une éditrice, des représentant-e-s d'organismes officiels (SAIO, rectorats, inspections régionales et générale, IREM) et d'entreprises privées. L'association Femmes et Sciences et l'Association Française des Femmes Ingénieurs (AFFI), partenaires de *femmes et mathématiques* dans les actions, sont présentes à la tribune.

Les conférences ont lieu dans l'amphithéâtre Hermite.

La journée commence par un exposé passionnant et revigorant intitulé « le cerveau, le sexe et les mathématiques ». Catherine Vidal, neurobiologiste, démonte brillamment les arguments et les idées reçues sur un éventuel « déterminisme biologique » et explique que si de supposées différences d'aptitudes cognitives existent entre les sexes, celles-ci proviennent plus certainement de facteurs socioculturels.

Ce fait étant posé, la suite des travaux de la journée prend tout son sens.

Les bilans portent sur différentes actions menées auprès des jeunes pour tenter de les réconcilier avec les sciences et les techniques, et si possible, de susciter des vocations dans ces domaines, en particulier chez les filles.

Plusieurs oratrices présentent la nature des interventions dans des collèges ou des lycées qu'elles ont mises au point, pour des carrefours des métiers ou des tables rondes sur les carrières scientifiques, parfois devant une ou plusieurs classes, ou encore pour animer des « cafés des sciences ».

L'exposition « Femmes en maths... pourquoi pas vous », réalisée par l'association *femmes et mathématiques*, circule un peu partout en France depuis octobre 2001, surtout dans des établissements scolaires ou universitaires. Elle rencontre d'autant plus de succès auprès des élèves du secondaire, que la visite a été préparée à l'avance. Le questionnaire proposé aux élèves, lors de leur visite, a été dépouillé et a permis d'étudier les représentations et perceptions qu'elles et ils ont des mathématiques. L'exposition s'accompagne d'une brochure reprenant et complétant les panneaux, et bientôt, en réponse à une demande fréquente, d'un document d'accompagnement qui proposera des pistes d'utilisation (conseils pour la présentation, pièges à éviter,...). Une version en anglais de l'exposition et de la brochure sont actuellement disponibles et circulent en Europe et dans des pays non européens.

Un buffet organisé dans la cafétéria de l'IHP permet des échanges informels et fructueux pendant la pause déjeuner.

L'après-midi, consacré aux perspectives, commence par une présentation de la réforme L-M-D (Licence - Mastère - Doctorat) à l'université, les questions et les espoirs qu'elle suscite.

Les mathématiques, présentes dans de nombreux domaines de l'activité humaine, sont peu visibles, d'où la nécessité d'un travail de vulgarisation de la part des mathématicien-ne-s : c'est l'objet de la brochure « L'explosion des maths » réalisée par la Société Mathématique de France et la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles.

Un exemple d'application des mathématiques : l'analyse d'images pour l'aide au diagnostic du cancer du sein, par Christine Graffigne, enseignante-chercheuse en mathématiques à l'Université Paris V.

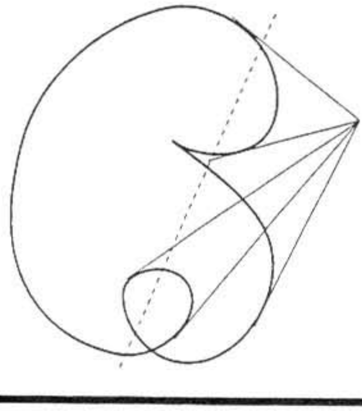
En conclusion, le rejet des études scientifiques par les jeunes et en particulier par les filles, la faible présence des femmes dans les professions scientifiques et techniques, leur proportion s'affaiblissant d'autant plus que l'on s'élève dans la hiérarchie, constituent un véritable problème de société, sur lequel toutes les personnes et associations présentes sont très mobilisées.

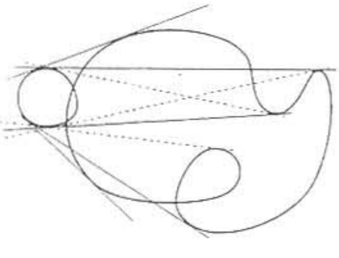
Un tel colloque permet une prise de conscience, montre que des actions sont possibles... et que beaucoup reste à faire !

Les Actes du colloque sont disponibles auprès de l'association *femmes et mathématiques*, à l'adresse électronique : `fetm@ihp.jussieu.fr` et auprès de l'université de Reims Champagne-Ardenne, à l'adresse : `femmes.maths@univ-reims.fr`

Annick Boisseau
Lycée Fragonard, Allée Verte, 95290 L'Isle-Adam.
E-mail : `annick.boisseau@wanadoo.fr`

à propos de mathématiques





CHAMPS MAGNÉTIQUES CRITIQUES ET HYSTÉRÉSIS DANS LES FILMS SUPRACONDUCTEURS

Catherine Bolley & Bernard Helffer

Résumé. — Nous nous proposons de décrire, dans cet article, des travaux récents sur les champs magnétiques critiques liés à certains matériaux supraconducteurs.

1. Description du problème

1.1. Le problème physique. — Un matériau supraconducteur peut changer de comportement suivant sa taille, sa géométrie, la température extérieure, etc. On traduira ces différents comportements par l'appartenance à l'un ou l'autre des états, appelés *état supraconducteur* et *état normal* (l'aluminium, par exemple, est toujours à l'état normal à température ambiante, mais il peut être à l'état supraconducteur à basse température).

L'état supraconducteur est caractérisé par plusieurs propriétés électromagnétiques particulières ; nous nous intéressons ici à ses propriétés magnétiques.

Une première propriété d'un matériau à l'état supraconducteur est d'empêcher un champ magnétique extérieur de pénétrer à l'intérieur. Plus précisément, lorsque le matériau étudié est soumis à un champ magnétique extérieur $\vec{H}_e$, pas trop grand, et que le matériau est refroidi en dessous d'une température critique, le champ magnétique intérieur $\vec{H}$, induit par $\vec{H}_e$, est expulsé du matériau : c'est ce que l'on appelle l'*effet Meissner*. Cette propriété est expliquée par les physiciens par l'existence, à l'état supraconducteur, de paires d'électrons, appelées paires de Cooper ou *superélectrons*, qui sont obtenues par le regroupement d'électrons de spin et de moment opposés et qui créent un « supercourant » intérieur différent du courant électrique habituel. Ce supercourant crée un autre champ magnétique qui s'oppose au précédent et l'expulse hors du matériau. Lorsqu'il n'existe pas de superélectrons, le champ magnétique extérieur pénètre dans le matériau qui est alors à l'*état normal*.

Une autre propriété d'un matériau à l'état supraconducteur est qu'un champ magnétique extérieur $\vec{H}_e$ suffisamment fort détruit l'état supraconducteur (le matériau ne peut alors qu'être à l'état normal).

Notons que chez certains matériaux supraconducteurs, il existe un autre état, appelé *état mixte*, qui est un état intermédiaire. Cet état n'apparaît pas dans le problème traité ici.

Nous nous intéressons ici aux changements d'état d'un *film* supraconducteur lorsque l'intensité du champ magnétique extérieur $\vec{H}_e$ varie, ainsi que l'épaisseur du film. La température extérieure est un paramètre important du problème physique, mais elle n'apparaîtra pas explicitement dans les équations en raison d'un changement de variables. Nous supposons dans la formulation que la température du matériau est en dessous d'une certaine température critique qui permet l'existence d'un état supraconducteur.

1.2. Modélisation du problème

Les inconnues. — L'état du film est décrit par un couple $(f, \vec{A})$, où f est une fonction d'onde, a priori complexe, telle que $|f|^2$ représente la densité de superélectrons dans le matériau. Nous aurons donc $f \equiv 0$ à l'état normal, car il n'y a pas de superélectrons, et $f \not\equiv 0$ à l'état supraconducteur. $\vec{A}$ est le potentiel magnétique intérieur avec $\vec{H} = \vec{\mathrm{rot}}(\vec{A})$.

Les états du film sont donnés, en fonction des paramètres du problème, par les minima locaux ou globaux d'une fonctionnelle, appelée fonctionnelle de Ginzburg-Landau, qui est invariante par changement de jauge ; nous la donnerons plus loin dans le contexte de notre problème.

Les paramètres. — Le matériau considéré ici étant un film, trois paramètres physiques vont intervenir : $2d$ (l'épaisseur du film), $h = |\vec{H}_e|$ (l'intensité du champ magnétique extérieur) et κ (le paramètre de Ginzburg-Landau, caractéristique du matériau).

Lorsque $\vec{H}_e$ est parallèle au film, une modélisation de V. L. Ginzburg et L. D. Landau [**GiLa**] ramène le problème à un problème en dimension *un* d'espace et à une fonction d'onde f réelle.

En choisissant l'axe Oz dans la direction de $\vec{H}_e$ et l'axe Ox perpendiculaire au film, nous avons $f \ : \ x \in [-d,\ d] \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$, et $\vec{H} = (0,\ 0,\ H(x))$. L'invariance par changement de jauge de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau permet de choisir $\vec{A}$ de divergence nulle et telle que $\vec{A} = (0,\ A,\ 0) \quad \text{avec } A = A(x)\ ,\ x \in [-d, d]$. La *fonctionnelle de Ginzburg-Laudau* est alors définie par

$$(f, A) \mapsto \Delta G_{d,h,\kappa}(f, A) = \int_{-d}^{d} \left[\frac{1}{2} f^4 - f^2 + \kappa^{-2} f'^2 + f^2 A^2 + (A' - h)^2 \right] dx\ ,$$

où $(f,\ A) \in (H^1(]-d,\ d[))^2$.

Nous appellerons *solutions normales* les couples (f, A) qui sont points critiques de $\Delta G_{d,h,\kappa}$ et tels que $f \equiv 0$, et *solutions supraconductrices* les autres points critiques. Notons que l'ensemble de ces points critiques n'est pas connu en général.

1.3. Réduction du problème et objectifs principaux. — Dans l'étude de la transition état supraconducteur-état normal, la littérature de la physique met en évidence pour κ petit et d assez grand, l'existence d'un cycle d'hystérésis défini par deux champs magnétiques critiques, l'un, appelé *champ de retard à la condensation*, est noté $h^{sc}(\kappa, d)$, et l'autre, appelé *champ de surchauffe*, est noté $h^{sh}(\kappa, d)$; ces champs critiques sont tels que $0 < h^{sc}(\kappa, d) < h^{sh}(\kappa, d) < +\infty$.

Nous avons étudié le champ critique $h^{sc}(\kappa, d)$ dans **[Bo]** et **[BoHe1]** (pour tout $\kappa > 0$) ; ce champ critique y est défini par une *limite de stabilité* des solutions normales.

Nous nous intéressons ici au champ de surchauffe associé à la *limite d'existence de solutions supraconductrices*. Pour simplifier le problème, nous nous limiterons au cas des *solutions* supraconductrices *symétriques* (c'est-à-dire des solutions (f, A) telles que f soit impaire et A paire) et *positives* (c'est-à-dire telles que $f > 0$).

Nous restreignons donc la fonctionnelle $\Delta G_{d,h,\kappa}(f, A)$ à l'intervalle $]-d, 0[$, puis à $]0, d[$ par translation (le bord du film est alors en 0). Ceci nous amène à définir une fonctionnelle de Ginzburg-Landau réduite, $\varepsilon_{d,h,\kappa}$, par

$$\varepsilon_{d,h,\kappa}(f, A) = \int_0^d \left[\frac{1}{2} f^4 - f^2 + \kappa^{-2} f'^2 + f^2 A^2 + (A' - h)^2 \right] dx ,$$

où $(f, A) \in V = \{(f, A) \in (H^1(]0, d[))^2 \quad \text{t. q.} \quad A(d) = 0\}$. Les points critiques de la fonctionnelle $\varepsilon_{d,h,\kappa}$ sont les solutions des équations d'Euler-Lagrange,

$$\text{(1.1)} \qquad (GL)^s_d \quad \begin{cases} (1) & -\kappa^{-2} f'' - f + f^3 + A^2 f = 0 \quad \text{sur }]0, d[, \\ (2) & -A'' + f^2 A = 0 \quad \text{sur }]0, d[, \\ (3) & f'(0) = 0 , \ f'(d) = 0 , \\ (4) & A'(0) = h , \ A(d) = 0 , \end{cases}$$

où $(f, A) \in (H^2(]0, d[))^2$. Ces équations sont appelées *équations de Ginzburg-Landau*.

Les conditions limites (3) et (4) sont les conditions limites naturelles du problème de minimisation dans l'espace V. Les relations $f'(d) = 0$ et $A(d) = 0$ proviennent de la symétrie du problème, la relation $f'(0) = 0$ exprime que le matériau est isolé et la relation $A'(0) = h$ que le champ magnétique est donné au bord du film.

Nous noterons souvent $(f, A; h)$ une solution des équations de Ginzburg-Landau, associée au paramètre h, et $\mathcal{S}_d^+$ l'ensemble de solutions positives,

$$\mathcal{S}_d^+ = \{(f, A; h) \text{ solution de } (GL)^s_d \text{ t.q. } (f, A) \in (H^2(]0, d[))^2 \text{ et } f > 0\} .$$

Enfin, nous définissons un champ de surchauffe en restriction aux solutions positives,

$$h^{sh,+}(\kappa, d) = \sup \left\{ h > 0 \, ; \exists \, (f, A; h) \in \mathcal{S}_d^+ \right\} .$$

Pour étudier le champ critique de surchauffe lorsque d est grand, V. L. Ginzburg a introduit une autre modélisation par un modèle limite dit *modèle du demi-espace*, qui est défini sur l'intervalle non borné $[0, +\infty[$. Pour obtenir formellement ce problème limite, nous prenons $d = +\infty$ dans la définition de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau, mais ceci n'est possible qu'après renormalisation de la fonctionnelle en lui ajoutant le terme $(\frac{1}{2} - h^2)\,d$ (cf. [**BoHe2**] ou [**BoHe3**]). La nouvelle fonctionnelle d'énergie est alors donnée par

$$\epsilon_{\infty,h,\kappa}(f,A) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{2}(1-f^2)^2 + \kappa^{-2}\,f'^2 + f^2\,A^2 + A'^2\right]\,dx \;+2\,h\,A(0)\;,$$

pour $(f,A) \in \mathcal{H}_\infty = \{(f,A)\;;\;(1-f) \in H^1(]0,\infty[),\; A \in H^1(]0,\infty[)\}$. Les équations de Ginzburg-Landau correspondantes sont alors :

$$\text{(1.2)} \qquad (GL)_\infty \quad \begin{cases} -\kappa^{-2}f'' - f + f^3 + A^2 f = 0 \quad \text{sur }]0,+\infty[\,, \\ -A'' + f^2 A = 0 \quad \text{sur }]0,+\infty[\,, \\ f'(0) = 0\,, \\ A'(0) = h\,, \end{cases}$$

où $(1-f,A) \in (H^2(]0,+\infty[))^2$.

Par analogie avec le problème précédent, nous notons $\mathcal{S}_\infty$ l'ensemble des solutions,

$$\mathcal{S}_\infty = \{(f,A;\,h) \text{ solution de } (GL)_\infty \text{ telle que } (1-f,A) \in (H^2(]0,\infty[))^2\},$$

et nous définissons le *champ critique de surchauffe* pour le problème $(GL)_\infty$ par

$$\text{(1.3)} \qquad h^{sh}(\kappa,+\infty) = \sup\{h > 0\;,\exists\,(f,A;\,h) \in \mathcal{S}_\infty\}\,.$$

P. G. De Gennes a obtenu de manière heuristique la localisation suivante de l'ensemble de solutions de $\mathcal{S}_\infty$, lorsque $\kappa \to 0$:

$$\text{(1.4)} \qquad h^2 \sim \frac{\sqrt{2}}{\kappa} f(0)^2 \cdot (1 - f(0)^2)\;;$$

en conséquence, il donne l'approximation suivante du champ de surchauffe, pour κ petit, en maximisant sur f_0,

$$\text{(1.5)} \qquad \kappa\;\left(h^{sh}(\kappa,\infty)\right)^2 \sim \frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

Une telle formule est importante dans la pratique car elle permet de calculer la valeur caractéristique κ de nouveaux matériaux, en mesurant leur champ de surchauffe.

L'objet de l'étude présentée ici est de justifier, sous certaines hypothèses sur κ et d, l'introduction du modèle du demi-espace dans une étude approchée du champ de surchauffe $h^{sh,+}(\kappa,d)$. Dans ce but, nous étudions successivement les problèmes $(GL)_\infty$, puis $(GL)^s_d$, dans des régimes asymptotiques où κ tend vers 0 et où, pour $(GL)^s_d$, d tend vers $+\infty$. Pour chacun de ces modèles, nous donnons des estimations fines sur les solutions, afin d'encadrer a priori le champ de surchauffe ; puis, nous construisons, par des techniques de sous-solutions, une solution pour un h voisin du champ magnétique critique obtenu précédemment, afin d'en obtenir une borne inférieure. Les principales difficultés viennent du couplage entre les deux équations et du nombre de paramètres.

2. Le problème du demi-espace

L'étude mathématique du problème du demi-espace est faite essentiellement dans [**BoHe2**] et [**BoHe3**], mais elle a été complétée par la suite.

Donnons tout d'abord quelques propriétés élémentaires des solutions.

2.1. Premières propriétés

***Proposition 2.1* (cf. par ex. [BoHe3], [BoHe4], [BoFoHe]).** — *Pour tout* $\kappa > 0$ *et pour toute solution* $(f, A; h) \in \mathcal{S}_\infty$,

1) $|f| \leqslant 1$ *;*

2) f *est strictement positive, strictement croissante ;*

3) A *est négative, strictement croissante sur* $[0, +\infty[$.

De plus, il n'existe pas de solutions normales dans $\mathcal{S}_\infty$*, car* $(0, A; h)$ *n'est jamais dans* $\mathcal{S}_\infty$.

Les solutions *supraconductrices* sont souvent représentées dans la littérature de la physique par le graphe d'une fonction $(f_0, h(f_0))$ où f_0 est la valeur de f au bord du film ; l'existence de ce graphe est montré dans [**BoCa**] pour ce problème. Des résultats numériques donnent pour l'ensemble des couples $(f_0, h(f_0))$ solutions, une courbe partant de $(1, 0)$, présentant un point de retournement en un $h > 2^{-1/2}$, et tendant vers $(0, 2^{-1/2})$ lorsque $f_0 \to 0$.

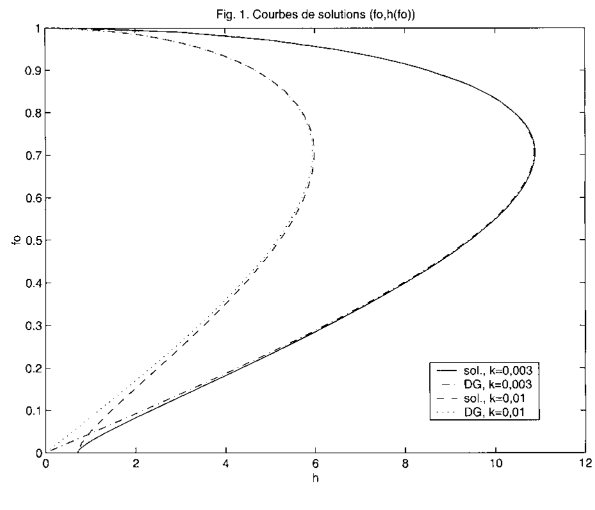


FIGURE 1. Courbes de solutions sol $= (f_0, h(f_0))$ pour $\kappa = 0,003$ et $\kappa = 0.01$.

Comparaison avec les courbes DG *données par la formule (1.4)*. — L'étude de la limite quand f_0 tend vers 0 est faite dans [**BoHe6**]. Notons aussi que, lorsque $h > 1/\sqrt{2}$, la fonctionnelle de Ginzburg-Landau n'est pas bornée inférieurement, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de minimum global (cf. [**BoHe2**]).

2.2. Formules de De Gennes lorsque $f(0) \geqslant \rho > 0$**.** — Afin de localiser les solutions de $(GL)_\infty$ et d'étudier le champ de surchauffe $h^{sh}(\kappa, +\infty)$, les estimations a priori suivantes jouent un rôle important :

***Proposition 2.2* (cf. [BoHe3])**. — *Pour tout* $\kappa > 0$ *et toute solution* $(f, A;\, h) \in \mathcal{S}_\infty$,
1) $\kappa h^2 \geqslant \sqrt{2}\, f(0)^2(1 - f(0)^2)$,
2) $\kappa h^2 \leqslant \sqrt{2}\, f(0)^2(1 - f(0)^2) + 5\sqrt{2}\,\dfrac{h}{f(0)}$.

Pour obtenir ces inégalités, on minore (ou on majore) $h^2 = A'(0)^2$ grâce à des estimations fines des diverses quantités A, A', f, f'. On utilise en particulier le principe du maximum et la relation de conservation suivante :

$$\forall x \in [0, +\infty[\,, \quad \kappa^{-2} f'(x)^2 + A'(x)^2 - f(x)^2 A(x)^2 - \frac{1}{2}(1 - f(x)^2)^2 = \bar{C} \,, \tag{2.1}$$

où $\bar{C}$ est une constante qui, compte tenu des conditions à l'infini, est égale à 0. Grâce à ces outils, nous montrons, par exemple dans [**BoHe3**], et pour obtenir les résultats de la Proposition 2.2, les relations suivantes.

Lemme 2.3. — *Pour tout* $\kappa > 0$ *et pour toute solution* $(f, A;\, h) \in \mathcal{S}_\infty$,
1) pour tout $x \in [0, +\infty[$, $0 \leqslant \kappa^{-1} f'(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1 - f(x)^2)$ *;*
2) pour tout $x \in [0, +\infty[$, $0 \leqslant -A(x)\, f(x) \leqslant A'(x) \leqslant -A(x)$.

Sous réserve de montrer l'existence de solutions, la Proposition 2.2 permet de justifier la formule de De Gennes (1.4) en dehors d'un domaine où $f(0)$ est petit. Nous déduisons en effet de cette proposition l'encadrement qui suit.

Théorème 2.4. — *Pour tout* $\rho \in \,]0, 1]$, *il existe des constantes* $C_\rho > 0$ *et* $\kappa_0 > 0$ *telles que, pour tout* $\kappa \in \,]0, \kappa_0]$ *et tout* $(f, A;\, h) \in \mathcal{S}_\infty$ *vérifiant* $f(0) \geqslant \rho > 0$, *on ait*

$$|\, \kappa h^2 - \sqrt{2}\, f(0)^2(1 - f(0)^2) \,| \leqslant C_\rho\, \kappa^{1/2} \,. \tag{2.2}$$

Du Théorème 2.4, nous déduisons une borne supérieure d'un champ de surchauffe « local », restreint aux solutions telles que $f(0) \geqslant \rho$ (cf. aussi la définition (1.3)).

Corollaire 2.5. — *Pour tout* $\rho \in \,]0, 1]$, *il existe* $C_\rho > 0$ *et* $\kappa_0 > 0$ *tels que, pour tout* $\kappa \in \,]0, \kappa_0]$,

$$\kappa \left(h^{sh,\rho}(\kappa, \infty)\right)^2 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4} + C_\rho\, \kappa^{1/2} \,, \tag{2.3}$$

où $h^{sh,\rho}(\kappa, \infty) = \sup\{h > 0 \,, \exists\, (f, A;\, h) \in \mathcal{S}_\infty \text{ tel que } f(0) \geqslant \rho\}$.

2.3. Comportement des solutions lorsque $0 < f(0) \leqslant \rho$**. —** Nous avons déjà noté que la formule (1.4) ne peut pas se justifier lorsque $f_0 = f(0)$ tend vers 0, puisque, comme énoncé plus haut, $h(f_0)$ tend vers $2^{-1/2}$ quand f_0 tend vers 0, ce qui ne concorde évidemment pas avec (1.4). Par contre, nous pouvons remarquer que le champ de surchauffe donné par P. G. De Gennes en (1.5) est le terme principal de la borne supérieure de $h^{sh,\rho}(\kappa,\infty)$ lorsque $\rho \sim 2^{-1/2}$ (cf. (2.3)) ; pour obtenir une borne supérieure d'un champ de surchauffe *global*, il suffit donc de montrer que $\kappa h^2 < \sqrt{2}/4$ lorsque κ est petit dès que $f(0) \in]0,\rho]$, pour un ρ convenable. Ceci est fait dans [**BoHe3**] où nous obtenons un minorant de f au voisinage de $x = 0$ (lorsque $f(0)$ est petit) permettant de lever la restriction $f(0) \geqslant \rho$ du Corollaire 2.5.

2.4. Borne inférieure du champ de surchauffe. — Pour obtenir une borne inférieure du champ de surchauffe, il nous faut montrer l'existence d'une solution pour un h aussi grand que possible. Nous utilisons la *méthode des sous-solutions*. C'est une méthode classique dans le cadre des équations elliptiques ou paraboliques, que nous avons pu adapter à notre système en écrivant le problème sous la forme d'une équation ayant un terme non local :

$$\left\{\begin{array}{l} -\kappa^{-2} f'' - f + f^3 + h^2\, B(f)^2\, f = 0 \quad \text{dans }]0,+\infty[, \\ f'(0) = 0\ , \\ (1-f) \in H^2(]0,+\infty[)\ , \end{array}\right. \tag{2.4}$$

où $f \in H^2(]0,+\infty[)$ et où $B(f)$ est la solution du problème suivant (lorsque $f \not\equiv 0$) :

$$\left\{\begin{array}{l} -B'' + f^2\, B = 0 \quad \text{dans }]0,+\infty[, \\ B'(0) = 1\ , \\ B \in H^2(]0,+\infty[)\ . \end{array}\right. \tag{2.5}$$

Pour $h > 0$, un couple de fonctions $(\phi,\ h\,B(\phi);\ h)$ est appelé *sous-solution* de $(GL)_\infty$ si

$$\left\{\begin{array}{l} -\kappa^{-2} \phi'' - \phi + \phi^3 + h^2\, B(\phi)^2\, \phi \leqslant 0 \quad \text{dans }]0,+\infty[, \\ \phi'(0) = 0\ , \\ (1-\phi) \in H^2(]0,+\infty[)\ , \end{array}\right. \tag{2.6}$$

où $B(\phi) \in H^2(]0,+\infty[)$ est la solution de (2.5) avec ϕ au lieu de f. De même, un couple de fonctions $(\psi,\ h\,B(\psi);\ h)$ est une *sur-solution* du système $(GL)_\infty$ si $(\psi,\ h\,B(\psi);\ h)$ vérifie (2.6) avec l'égalité inverse.

On montre, en utilisant le principe du maximum sur les équations elliptiques et des propriétés de monotonie de $B(f)$ par rapport à f que, s'il existe une sous-solution $(\phi,\ h\,B(\phi);\ h)$ et une sur-solution $(\psi,\ h\,B(\psi);\ h)$ telles que $\phi \leqslant \psi$ dans $[0,+\infty[$, alors il existe une solution $(f,\ h\,B(f);\ h)$ de $(GL)_\infty$ vérifiant

$$\phi \leqslant f \leqslant \psi \quad \text{dans } [0,+\infty[.$$

On vérifie aisément que $\psi \equiv 1$ donne une sur-solution de $(GL)_\infty$. Il suffit donc de construire une sous-solution de ce problème. Donnons une telle sous-solution.

***Lemme 2.6* (cf. [BoHe2]).** — *Il existe des constantes* C_0, C_1, C_2 *et* κ_0 *telles que pour tous* $\kappa \in]0,\kappa_0]$ *et* $h > 0$ *vérifiant* $\kappa^{1/2}h = 2^{-3/4} + C_0\kappa$, *la fonction*

$$\phi(x) = \kappa^2 h^2 2^{-1/2}(1 + C_1\kappa)\exp\left(-(\sqrt{2} - C_2\kappa)x\right) + \tanh\left(\frac{\kappa}{\sqrt{2}}x + x_{h,\kappa}\right) , \tag{2.7}$$

où $x_{h,\kappa}$ *est déterminée par la condition* $\phi'(0) = 0$, *définit une sous-solution* $(\phi,\ h\,B(\phi);\ h)$ *du problème* $(GL)_\infty$.

La démonstration est très technique. La principale difficulté apparaît dans la majoration du terme $B(\phi)^2\,\phi$. On obtient des résultats suffisamment précis en étudiant une équation vérifiée par cette fonction.

Une conséquence du lemme est, sous les mêmes hypothèses, l'obtention d'une borne inférieure du champ de surchauffe,

$$\kappa^{1/2}h^{sh}(\kappa,\infty) \geqslant 2^{-3/4} + C_0\kappa\ .$$

2.5. Estimation du champ de surchauffe pour $(GL)_\infty$. — En regroupant les études précédentes, nous déduisons le résultat suivant.

Théorème 2.7. — *Il existe des constantes* $\kappa_0 > 0$ *et* $C > 0$ *telles que, pour tout* $\kappa \in]0,\kappa_0]$, *on ait*

$$|\kappa\left(h^{sh}(\kappa,\infty)\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}| \leqslant C\,\kappa^{1/2}.$$

Ainsi nous obtenons la formule (1.5) avec une précision de l'ordre de $\mathcal{O}(\kappa^{1/2})$.

Des résultats récents de P. Del Castillo (cf. [**Ca1**]) permettent d'améliorer la minoration du champ critique. P. Del Castillo donne en effet, dans sa thèse, le terme suivant du développement de $h^{sh}(\kappa,\infty)$ en puissances de κ, vérifiant ainsi partiellement une conjecture de H. Parr (cf. aussi [**DBD**]). Par contre, une amélioration de la majoration de $(h^{sh}(\kappa,\infty)$ reste un problème ouvert.

3. Le problème $(GL)^s_d$

Considérons maintenant le problème $(GL)^s_d$ sur l'intervalle borné $[0,d]$. Le problème est ici plus délicat que sur l'intervalle $[0,+\infty[$ en raison, d'une part, de l'existence d'un paramètre supplémentaire (le paramètre d) et, d'autre part, d'une utilisation moins immédiate de la relation de conservation (2.1) (ce qui est dû au fait que la constante $\bar{C}$ dépend maintenant de d et est donc inconnue).

3.1. Quelques propriétés des solutions de $(GL)^s_d$. — Contrairement au problème $(GL)_\infty$,

(1) pour tout $\kappa > 0$, $d > 0$ et $h > 0$, il existe une solution normale du problème $(GL)^s_d$ (la solution $(0, h(d-x);\ h)$);

(2) si $(f, A;\ h)$ est une solution, alors f n'est pas nécessairement positive.

En se restreignant aux solutions positives, nous montrons que les conclusions de la Proposition 2.1 sont encore vraies sur $[0, d]$ au lieu de $[0, +\infty[$ (cf. par exemple [**BoHe2**]) ; mais de nombreux autres problèmes restent ouverts.

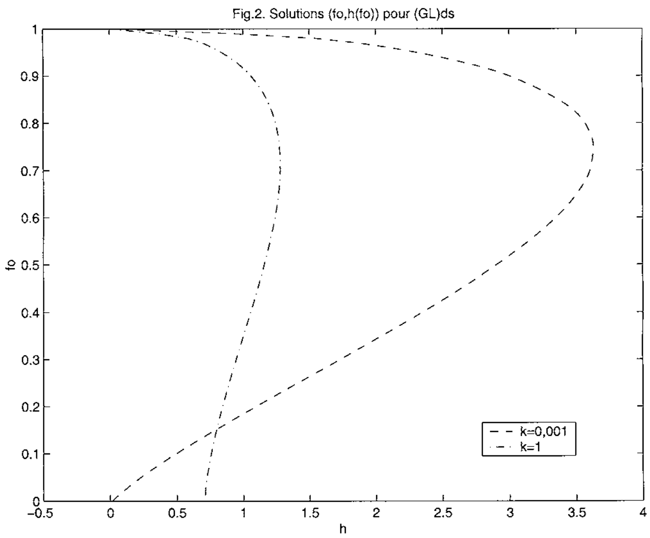


FIGURE 2. Courbes de solutions $(f_0, h(f_0))$ du problème $(GL)^s_d$

Remarque 3.1. — Le comportement des solutions de $(GL)^s_d$ est très différent de celui des solutions de $(GL)_\infty$ lorsque, pour $f(0)$ petit et $\kappa > 0$ fixé, on fait tendre d vers $+\infty$. Ce comportement est définie par le résultat de bifurcation suivant (cf. [**BoHe1**]) : pour tous $\kappa > 0$ et $d > 0$, il existe une courbe de solutions supraconductrices bifurquées de $(GL)^s_d$, issues d'une solution normale $(0, h_0(d - x); h_0)$; la bifurcation est obtenue pour un $h_0 = h_0(\kappa, d) > 0$ unique tel que $h_0(\kappa, d)$ tende vers κ lorsque $d \to +\infty$.

Notons aussi que A. Aftalion et E. Dancer ont donné un résultat d'unicité (cf. [**AfDa**]) pour tout $\kappa > 0$, mais pour d « petit », et que nous avons montré d'existence de solutions asymétriques (f n'est ni paire, ni impaire) lorsque κd est grand (cf. [**BoHe5**]). D'autres résultats numériques sont donnés dans [**AfTr**].

3.2. Estimations des solutions lorsque $f(0) \geqslant \rho > 0$. — Ce travail a été initialisé dans [**BoFoHe**] et amélioré dans [**BoHe7**]. Nous reprenons l'idée générale du paragraphe 2.1, mais ici la constante $\bar{C}$ de la relation de conservation (2.1) est égale à $\bar{C} = A'(d)^2 - \frac{1}{2}(1 - f(d)^2)^2$. La Proposition 2.2 est remplacée par la suivante (cf. [**BoFoHe**]) :

Proposition 3.2. — *Pour tout* $\kappa > 0$*, tout* $d > 0$ *et toute solution positive* $(f, A; h) \in \mathcal{S}_d^+$*, nous avons :*

$$h^2 \leqslant \sqrt{2}\,\kappa^{-1}\,(1-f(0)^2)f(0)^2 + (5\sqrt{2}+6A'(d))\,\frac{h}{f(0)} + \kappa^{-1}\,\left(2^{-1/2}+2\kappa d\right)(1-f(d)^2) + (2d+1)A'(d)^2\ . \tag{3.1}$$

et

$$h^2 \geqslant \sqrt{2}\kappa^{-1}(1-f(0)^2)f(0)^2 - \sqrt{2}\kappa^{-1}(1-f(d)^2) - 2(\kappa^{-1}+\sqrt{2}d)A'(d)\ . \tag{3.2}$$

Nous obtenons des termes additionnels de l'ordre de $d\,A'(d)$ et $(1-f(d)^2)$. Pour les contrôler, nous devons obtenir des estimations a priori très précises sur A' et $(1-f^2)$ à l'intérieur du film, c'est à dire en $x = d$. Dans ce but, nous avons montré des estimations de type Agmon sur ces fonctions, avec par exemple pour A' le résultat suivant.

***Lemme 3.3* (cf. [BoHe7], Lemma 5.4).** — *Pour tous* $\kappa > 0$, $d > 0$ *et* $\gamma_1 \in\,]0,1[$*, et pour toute solution* $(f, A; h) \in \mathcal{S}_d^+$*, nous avons :*

$$\forall\, x \in [0,d]\ , \quad A'(x) \leqslant \frac{\sqrt{1+\frac{1}{d}}\ h}{\sqrt{(1-\gamma_1)\,f(0)}}\ \exp(-\gamma_1^{1/2} f(0)\,x)\ .$$

Nous obtenons des estimations analogues sur $(1-f^2)$ en améliorant celles données par [**Ca1**]. Il en résulte le théorème suivant.

***Théorème 3.4* (cf. [BoHe7], Théorème 5.2).** — *Soit* $\rho \in\,]0,1[$ *et* $\gamma \in\,]0,1[$*. Il existe des constantes* $L_\rho > 0$*,* $\kappa_\rho > 0$*,* $C_\rho > 0$ *et* $C'_\rho > 0$ *telles que, pour* (κ, d) *vérifiant* $0 < \kappa \leqslant \kappa_\rho$ *et* $\kappa d \geqslant L_\rho$*, et pour toute solution* $(f, A; h) \in \mathcal{S}_d^+$ *telle que* $f(0) \geqslant \rho$*, alors :*

$$\left|\kappa\, h^2 - \sqrt{2}f(0)^2 \cdot (1-f(0)^2)\right| \ \leqslant\ C_\rho\,\kappa^{1/2} + C'_\rho\ \exp(-\gamma^{1/2}f(0)\kappa d)\ . \tag{3.3}$$

Cette formule est à comparer avec la formule (2.2) obtenue pour le problème $(GL)_\infty$. Les estimations a priori obtenues ici possèdent un terme supplémentaire exponentiellement petit lorsque κd tend vers $+\infty$.

3.3. Estimations lorsque $0 < f(0) \leqslant \rho$ **et effet Meissner. —** Lorsque $f(0)$ est proche de 0, les estimations de type Agmon précédentes sur A' et sur $(1-f^2)$ ne sont pas suffisantes car elles ne permettent pas de faire tendre $f(0)$ vers 0. Nous reprenons donc les techniques classiques liées au principe du maximum que nous avons utilisées en particulier pour le problème $(GL)_\infty$, mais en les appliquant à une fonction $V = e^\phi\, A'$, où ϕ est une phase convenablement choisie. Nous obtenons alors la borne supérieure suivante pour A' :

***Proposition 3.5* (cf. [BoHe7]).** — *Soit* $\kappa > 0$ *et* $d_0 > 0$*, alors il existe une constante* $\gamma \in]0,1[$ *telle que, pour tout* $d \geqslant d_0$ *et toute solution* $A \in H^2(]0,d[)$ *de (1.1)*$_{(2,4)}$ *:*

$$\forall x \in [0,d]\,, \quad A'(x) \leqslant e^{\gamma\, d_0}\, A'(0) \cdot \exp\left(-\gamma \int_0^x f(t)^2\, dt\right)\,. \tag{3.4}$$

Outre l'efficacité de (3.4) dans le domaine qui nous intéresse ici, cette formule donne une mesure de l'*effet Meissner*, avec, en particulier, A' exponentiellement petit à l'intérieur du film lorsque $\int_0^d f(t)^2\, dt \geqslant \kappa^{-\beta}$ (pour $\beta > 0$).

Le bon contrôle des solutions donné par la Proposition 3.5, lorsque $f(0)$ est petit, nous permet, par une démonstration quelque peu technique (cf. **[BoHe7]**), de montrer que pour toute constante $M \in]0, \sqrt{2}/4[$, il existe une constante $\rho \in]0,1[$ telle que pour κ petit et κd grand, et pour toute solution $(f, A;\, h) \in \mathcal{S}_d^+$ vérifiant $0 < f(0) \leqslant \rho$, alors

$$\kappa\, A'(0)^2 \,<\, M.$$

3.4. Borne supérieure du champ de surchauffe $h^{sh,+}(\kappa, d)$. — En combinant le résultat précédent et (3.3), nous déduisons une borne supérieure du champ de surchauffe dans le régime étudié.

***Proposition 3.6* (cf. [BoHe7]).** — *Il existe des constantes* $\gamma \in]0,1[$, C, C', $\kappa_0 > 0$ *et* $L_0 > 0$ *telles que pour tout* (κ, d) *vérifiant* $\kappa \in]0, \kappa_0]$ *et* $\kappa d \geqslant L_0$ *:*

$$\kappa\left(h^{sh,+}(\kappa, d)\right)^2 \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4} + C\kappa^{1/2} + C' \exp(-\gamma \kappa d).$$

3.5. Borne inférieure du champ de surchauffe $h^{sh,+}(\kappa, d)$. — Pour obtenir une borne inférieure du champ de surchauffe, nous reprenons la méthode des sous-solutions décrite dans le paragraphe 2.3 et construisons une sous-solution adaptée au problème $(GL)_d^s$ (cf. aussi **[Ca2]**).

Pour cela, nous reprenons la fonction ϕ définie en (2.7) et grâce à une fonction de troncature permettant d'obtenir la condition de Neumann en $x = d$ et quelques ajustements assez techniques pour contrôler tous les termes, nous montrons l'existence d'une solution $(f, A;\, h)$ de $(GL)_d^s$ pour un h tel que $\kappa h^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + C_0 \kappa^{1-\varepsilon} + C_0' \exp(-\alpha_0 \kappa d))$, avec κ suffisamment petit et κd suffisamment grand.

Si Ξ_1 est une fonction de troncature C^∞ telle que

$$\Xi_1(y) = \left|\begin{array}{ll} 0 & \text{si } \ y \leqslant \frac{1}{2}\,, \\ 1 & \text{si } \ y \geqslant \frac{3}{4}\,, \end{array}\right.$$

une sous-solution est donnée, pour des constantes C_0, C_0', C_1, C_1' et α_0 convenables, par la fonction suivante :

$$\begin{aligned}(3.5)\quad \underline{\phi}(x) = \tanh\Big(\frac{\kappa}{\sqrt{2}}(1 + C_1\,\kappa^{1-\varepsilon} + C_1' \exp(-\alpha_0\kappa d))\,x + x_{\kappa,h}\Big)\\ +2^{-1/2}\,\kappa^2\,h^2\,\exp(-\sqrt{2}x)\ + \lambda_{d,\kappa,h}\,\exp(-\sqrt{2}\kappa(d-x))\,\Xi_1(\frac{x}{d})\ ,\end{aligned}$$

où $x_{\kappa,h}$ et $\lambda_{d,\kappa,h}$ sont des constantes déterminées par $\underline{\phi}'(0) = 0$, $\underline{\phi}'(d) = 0$.

Nous en déduisons la borne inférieure suivante pour le champ de surchauffe (cf. [**BoHe7**]) :

Proposition 3.7. — *Soit* $\varepsilon \in]0,1[$ *et* $\alpha_0 \in]0,\sqrt{2}[$. *Il existe des constantes* $\kappa_0 > 0$, $L_0 > 0$, C_0 *et* C_0' *telle que pour tout* (κ, d) *vérifiant* $0 < \kappa \leqslant \kappa_0$ *et* $\kappa d \geqslant L_0$,

$$\kappa\,\left(h^{sh,+}(\kappa,d)\right)^2 \geqslant \frac{\sqrt{2}}{4} + C_0\,\kappa^{1-\varepsilon} + C_0' \exp(-\alpha_0\kappa d)\ .$$

Notons que cette technique de sous-solutions a permis à P. Del Castillo dans [**Ca1**] de montrer l'existence de solutions de $(GL)_d^s$ ne correspondant pas à un minimum local.

3.6. Estimation du champ de surchauffe $h^{sh,+}(\kappa, d)$. —

Des Propositions 3.7 et 3.6, nous déduisons immédiatement une estimation précise du champ de surchauffe.

Théorème 3.8. — *Étant donné* $\alpha_0 \in]0,\sqrt{2}[$, *il existe des constantes* $\kappa_0 > 0$, $L_0 > 0$, $C_0 \geqslant 0$ *et* $C_0' \geqslant 0$ *telles que pour tout* (κ, d) *vérifiant* $0 < \kappa \leqslant \kappa_0$ *et* $\kappa d \geqslant L_0$,

$$\left|\kappa\,\left(h^{sh,+}(\kappa,d)\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right| \leqslant C_0\,\kappa^{1/2} + C_0' \exp(-\alpha_0\kappa d)\ .$$

Conclusion

L'étude présentée ici donne une bonne justification de la formule énoncée par P. G. De Gennes sur le champ de surchauffe de films supraconducteurs dans un régime où κ est petit et κd grand. Elle montre aussi que, dans ce même régime, le problème $(GL)_d^s$ est assez bien approché par le modèle du demi-espace, en dehors d'un domaine où $f(0)$ est petit. Il serait cependant intéressant de montrer que l'écart entre les deux champs de surchauffe $h^{sh}(\kappa,\infty)$ et $h^{sh,+}(\kappa,d)$ est de l'ordre de $\mathcal{O}(\exp(-\alpha_0\kappa d))$, afin de mieux comparer les deux modèles lorsque d est grand, au sens « κd grand ».

Remerciements

La première auteure aimerait remercier Anne-Marie Charbonnel et Colette Anné pour l'organisation de la journée de recherche « Femmes en Physique mathématique" à Nantes en novembre 2001 et de lui avoir ainsi donné l'occasion d'exposer ses derniers travaux.

Références

[AfDa] A. Aftalion, E. N. Dancer, On the symmetry and uniqueness of solutions of the Ginzburg-Landau equations for small domains (2000). *Com. Contemp. Math.* **3**, 1–14 (2001).

[AfTr] A. Aftalion, W. C. Troy, On the solutions of the one-dimensional Ginzburg-Landau equations for superconductivity. *Physica D* **132**, 214–232 (1999).

[Ag] S. Agmon, Lecture on Exponential Decay of Solutions of Second Order Elliptic Equations. *Math. Notes*, T. 29, Princeton University Press (1982).

[Bo] C. Bolley, Modélisation du champ de retard à la condensation d'un supraconducteur par un problème de bifurcation. *Math. Model. Num. Anal.*, **26** n° 2, 235–287 (1992).

[BoCa] C. Bolley, P. Del Castillo, Existence and uniqueness for the half-space Ginzburg-Landau model. *Nonlin. Anal.* **47**, n° 1, 135–146 (2001).

[BoFoHe] C. Bolley, F. Foucher, B. Helffer, Superheating field for the Ginzburg-Landau equations in the case of a large bounded interval. *J. Math. Phys.* **41** n° 11, 7263–7289 (2000).

[BoHe1] C. Bolley, B. Helffer, An application of semi-classical analysis to the asymptotic study of the supercooling field of a superconducting material. *Ann. Inst. Henri Poincaré (Physique Théorique)* **58** n° 2, 169–233 (1993).

[BoHe2] C. Bolley, B. Helffer, Rigorous results for the Ginzburg-Landau equations associated to a superconducting film in the weak κ-limit. *Reviews in Math. Physics* **8** n° 1, 43–83 (1996).

[BoHe3] C. Bolley, B. Helffer, Proof of the De Gennes formula for the superheating field in the weak κ limit. *Ann. Inst. Henri Poincaré (Analyse non linéaire)* **14** n° 5, 597–613 (1997).

[BoHe4] C. Bolley, B. Helffer, The Ginzburg-Landau equations in a semi-infinite superconducting film in the large κ limit. *Eur. J. Appl. Math.* **8**, 347–367 (1997).

[BoHe5] C. Bolley, B. Helffer, Stability of bifurcating solutions for the Ginzburg-Landau equations. *Rev. in Math. Physics* **10** n° 5, 579–626 (1998).

[BoHe6] C. Bolley, B. Helffer : A priori estimates for Ginzburg-Landau solutions. Institut Scientifique de Cargèse (1999). Submitted in *Nonlinear PDE's in Physics*, H. Berestycki and Y. Pomeau eds., NATO Science ASI Series. Elsevier Publ. Co., Dordrecht. Rapport de recherche de l'Université de Nantes (2002).

[BoHe7] C. Bolley, B. Helffer, Global superheating field for superconductors in a large bounded interval. *Physica D* **172** n° 1–4, 162–189 (2002).

[Ca1] P. Del Castillo, Etude de champs critiques en théorie de Ginzburg–Landau, Thèse de Doctorat de l'Université de Paris-Sud, Orsay, 2000.

[Ca2] P. Del Castillo, Two terms in the lower bound for the superheating field in a semi-infinite film in the weak-κ limit. *Europ. J. Appl. Math.* **13** n° 5, 517–544 (2002).

[Ch] S. J. Chapman, Superheating field of type II superconductors. *Siam J. Appl. Math.* **55** n^{o} 5, 1233–1258 (1995).

[DBD] A. J. Dolgert, S. J. Di Bartolo, A. T. Dorsey, Superheating fields of superconductors : asymptotic analysis and numerical results. *Phys. Rev.* B **53** n^{o} 9, 5650-5660 (1996). Erratum : Superheating fields of superconductors : asymptotic analysis and numerical results. *Phys. Rev.* B **56** n^{o} 5, 2883 (1997).

[Ge] P. G. de Gennes, Superconductivity, selected topics in solid state physics and theoretical Physics. *Proc. of 8-th Latin American School of Physics*, Caracas (1966).

[Gi2] V. L. Ginzburg, On the destruction and the onset of superconductivity in a magnetic field, Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. **34**, 113-125 (1958).Transl. *Soviet Physics JETP* **7**, 78–87 (1958).

[GiLa] V. L. Ginzburg, L. D. Landau, On the theory of superconductivity. *Zh. Eksperim. i Teor. Fiz.* **20**, 1064-1082 (1950). English translation *Men of Physics*, L. D. Landau, D. Ter Haar ed., Pergamon Press, Oxford, 1965.

[JaSaTh] D. Saint James, G. Sarma and E. J. Thomas, Type II Superconductivity. Pergamon Press, Oxford, 1969,.

[Pa] H. Parr, Superconducting superheating field for finite κ. *Z. Physik* B **25**, 359–361 (1976).

Catherine Bolley

UMR 6629 CNRS, École Centrale de Nantes, BP 92101, F-44321 Nantes Cedex 03.

Bernard Helffer

UMR 8628 CNRS, Département de Mathématiques, Université Paris-Sud, F-91405 0rsay.

GROUPES DE SÉRIES ET RENORMALISATION DES CHAMPS QUANTIQUES

Alessandra Frabetti

Résumé. **—** Les champs quantiques traditionnellement se renormalisent de façon perturbative, sur chaque coefficient des séries correspondantes. Les formules de renormalisation « globale » de Dyson suggèrent d'interpréter la renormalisation comme un mélange convenable de produits et compositions des séries invoquées. Cette interprétation est cohérente avec les travaux récents de Connes et Kreimer : ils montrent que la renormalisation des champs quantiques scalaires est gouvernée par une algèbre de Hopf commutative, à voir donc comme algèbre de fonctions sur le groupe de renormalisation.

Pour l'électrodynamique quantique, les propagateurs sont des matrices 4×4 et les facteurs de renormalisation ne sont plus forcément scalaires : ils ne peuvent plus être des caractères de l'algèbre de Connes et Kreimer. En effet, aucun principe de dualité n'est valable pour des caractères non commutatifs, mais avec Ch. Brouder on montre qu'il existe des algèbres de Hopf ni commutatives ni cocommutatives qui gouvernent la renormalisation de l'électrodynamique quantique. De plus, ces algèbres sont définies sur l'ensemble des arbres binaires planaires, et donnent naturellement lieu à un nouveau groupe de séries formelles développées sur les arbres.

1. Introduction. Le groupe de renormalisation

En théorie quantique des champs, chaque particule est décrite par un champ généralisé, c'est-à-dire une distribution à valeurs dans les opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert, qui vérifie l'équation différentielle d'Euler-Lagrange déduite du Lagrangien associé au champ considéré. Les informations sur la dynamique d'une particule, en connaissant son impulsion p, se trouvent à partir du propagateur de Feynman $D(p)$, qui est la fonction de Green de l'opérateur différentiel généralisé associé au Lagrangien de la théorie, et qui apparaît dans l'équation d'Euler-Lagrange.

Le propagateur de Feynman satisfait lui-même à une nouvelle équation différentielle fonctionnelle, l'équation de Schwinger-Dyson, qui en fait cache un système infini d'équations, et pour laquelle une solution exacte est connue seulement pour les théories de champs « libres », c'est-à-dire quand les particules sont complètement isolées, elles n'interagissent ni avec des particules du même type ni avec d'autres types de particules. Au contraire, pour les théories avec un potentiel d'interaction, qui décrivent l'interaction entre plusieurs particules, le propagateur de Feynman est en général inconnu.

Cependant, on le connaît de façon approximative quand le potentiel d'interaction est une perturbation (petite) de l'énergie cinétique. Cela se passe dans le cas des particules élémentaires qui nous intéresse : le potentiel d'interaction est proportionnel à la « constante de couplage », un paramètre typique de chaque particule, qui a un sens physique et en principe peut être mesuré, et qui en général a une valeur très petite par rapport à celles qu'on veut calculer. Dans les théories ϕ^3 et ϕ^4 des « champs scalaires », qui décrivent des bosons de spin 0 comme le Higgs, la constante de couplage est normalement indiquée avec les symboles g ou λ. En électrodynamique quantique, la théorie qui décrit l'interaction entre photons et électrons, la constante de couplage est la « constante fine de structure » $\alpha = e^2/4\pi \sim 1/137$, qui dépend de la charge e des électrons. Dans le cas perturbatif, en effet, on peut calculer les premiers termes du propagateur développé comme une série formelle

$$D(\alpha_0; p) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^n D_n(p)$$

en les puissances du paramètre α_0 d'interaction (où on utilise l'indice 0 parce qu'il s'avère ne pas être le bon paramètre...), avec coefficients perturbatifs

$$D_n(p) = \sum_{|\Gamma|=n} U(\Gamma; p),$$

normalement décrits à l'aide des graphes de Feynman Γ typiques des champs considérés, $|\Gamma|$ indiquant le nombre de boucles présentes dans le graphe. Une définition précise des diagrammes de Feynman, et de la théorie perturbative, peut être trouvée dans tous les livres de Théorie Quantique des Champs, par exemple [**IZ**] (voir en particulier la section 6-1-1, pp. 265-276), et [**PS**] (en particulier, l'« Invitation » au chapitre 1, et la section 4.4, pp. 90-99).

L'un des problèmes majeurs de la théorie perturbative est que les amplitudes $U(\Gamma; p)$ associées aux diagrammes de Feynman sont, en général, des intégrales divergentes qui doivent être renormalisées, c'est-à-dire ramenées à des valeurs finies $R(\Gamma; p)$ indépendantes de la procédure adoptée. La théorie de la renormalisation, en physique quantique, est traitée dans [**IZ**], ainsi que dans [**C**]. Le « propagateur renormalisé » est la série formelle

$$\overline{D}(\alpha; p) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \overline{D}_n(p),$$

où le nouveau paramètre α représente le paramètre d'interaction effectivement mesuré et les nouveaux coefficients sont les sommes finies

$$\overline{D}_n(p) = \sum_{|\Gamma|=n} R(\Gamma;p).$$

La procédure de renormalisation, c'est-à-dire le passage du propagateur $D(\alpha_0;p)$ au propagateur $\overline{D}(\alpha;p)$, est classiquement décrite de deux façons possibles :

(1) avec la formule globale de Dyson, voir [**D**] : il existe un « facteur de renormalisation » infini $Z(\alpha)$ tel que

$$D(\alpha_0;p) = \overline{D}(\alpha;p)Z(\alpha)\,;$$

(2) avec la formule « forest » ou BPHZ (du nom des auteurs Bogoliubov, Parasiuk, Hepp et Zimmermann) sur chaque diagramme de Feynman, voir [**Z**] : pour tout diagramme de Feynman Γ il existe un « contre-terme » infini $C(\Gamma)$ de telle sorte que si $U(\Gamma;p)$ est une intégrale divergente, alors la combinaison

$$R(\Gamma;p) = \sum_{\gamma_i \subset \Gamma} U(\Gamma/\gamma_1\cdots\gamma_l;p)C(\gamma_1)\cdots C(\gamma_l)$$

est finie. Ici, les γ_i sont les sous-graphes 1PI de Γ tels que $\gamma_i \cap \gamma_j = \varnothing$, et $\Gamma/\gamma_1\cdots\gamma_l$ indique le graphe qu'on obtient en écrasant les γ_i à des points.

Les graphes 1PI (« une particule irréductible ») sont des graphes de Feynman qui ne sont pas la jonction (par une ligne) de sous-graphes de Feynman. Autrement dit, les 1PI sont des graphes tels que si on coupe une quelconque arête interne, on n'obtient pas des graphes de Feynman décrivant la même particule ou la même situation pour les particules considérées. À partir des graphes 1PI, on peut construire tous les graphes de Feynman de la théorie, par simple jonction de deux pattes extérieures.

Évidemment, le facteur $Z(\alpha)$ qui apparaît dans la formule de Dyson est une série en α avec coefficients liés aux contre-termes $C(\Gamma)$ qui apparaissent dans la formule BPHZ. Dans les deux cas, la constante de couplage doit aussi être renormalisée, et sa renormalisation se fait avec un autre facteur de renormalisation $Z'(\alpha)$, en général lié au précédent, tel que $\alpha_0 = \alpha Z'(\alpha)$ soit aussi une série formelle en α.

La formule de Dyson peut alors être écrite comme

$$\overline{D}(\alpha;p) = D(\alpha_0(\alpha);p)Z(\alpha)^{-1},$$

et interprétée comme une simple combinaison de produits et compositions de certaines séries formelles en le paramètre α. Plus précisément, à partir des données initiales (α, D), et de la renormalisation choisie (Z', Z), le propagateur renormalisé est la deuxième composante du couple

$$\big(\alpha_0(\alpha), \overline{D}(\alpha;p)\big) = \big(\alpha_0(\alpha), D(\alpha_0(\alpha);p)Z(\alpha)^{-1}\big) = \big(\alpha, D(\alpha;p)\big) \cdot_{\ltimes} \big(\alpha Z'(\alpha), Z(\alpha)^{-1}\big),$$

qu'on reconnaît être le produit de deux couples de séries selon une loi de produit semidirect : la notation $\ltimes$ indique que la première composante agit à droite sur la deuxième composante, cf. [**R**] et [**Sc**]. De même, deux renormalisations (Z_1', Z_1) et (Z_2', Z_2) se composent selon une loi de produit semidirect : si $\alpha_1(\alpha) = \alpha Z_1'(\alpha)$ et $\alpha_2(\alpha) = \alpha Z_2'(\alpha)$, alors la composition est exactement

$$\big(\alpha_1(\alpha_2(\alpha)), (Z_1(\alpha_2(\alpha))Z_2(\alpha)\big) = \big(\alpha_1(\alpha), Z_1(\alpha)\big) \cdot_{\ltimes} \big(\alpha_2(\alpha), Z_2(\alpha)\big).$$

Pour la théorie ϕ^3, ce point de vue est étudié par F. Girelli, T. Krajewski et P. Martinetti en [**GKM**].

Pour éclaircir cette situation, il convient de simplifier les notations : appelons x les constantes de couplage effectives α, g, et λ. Les propagateurs D, $\overline{D}$ et les facteurs de renormalisation Z, Z' sont des séries formelles en x à coefficients dans $\mathbb{C}$ ou dans une algèbre unitaire $\mathcal{A}$, où le terme d'ordre 0 n'est jamais nul et peut être identifié à 1, et donc ils sont représentés par les éléments du groupe

$$G^{\text{inv}} = \big\{ f(x) = 1 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots, \quad f_n \in \mathcal{A} \big\},$$

des séries inversibles, muni du produit ponctuel $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Par contre, les constantes de couplages α_0, g_0, λ_0 avant renormalisation sont des séries formelles en x à coefficients dans $\mathbb{C}$, où le terme d'ordre 0 est nul et le terme d'ordre 1 peut être identifié à 1, et donc elles sont représentées par les éléments du groupe

$$G^{\text{dif}} = \big\{ \varphi(x) = x + \varphi_1 x^2 + \varphi_2 x^3 + \dots, \quad \varphi_n \in \mathbb{C} \big\}$$

des difféomorphismes formels (tangents à l'identité), muni de la composition $(\phi \circ \psi)(x) = \phi(\psi(x))$. Évidement, le groupe G^{dif} agit à droite sur le groupe G^{inv} par simple composition, $(f \circ \phi)(x) = f(\phi(x))$.

En général, donc, la formule de Dyson montre que le groupe de renormalisation apparaît comme un sous-groupe du produit semi-direct $G^{\text{dif}} \ltimes G^{\text{inv}}$, et la procédure de renormalisation du propagateur est l'action droite de $G^{\text{dif}} \ltimes G^{\text{inv}}$ sur G^{inv} obtenue par restriction du produit de groupe.

Le lien entre les deux points de vue est donc la dualité de Tannaka-Krein, celle entre un groupe et son algèbre de Hopf des fonctions polynomiales. Une « algèbre de Hopf » est en même temps une algèbre et une cogèbre (« coalgebra » en anglais), munie donc aussi d'un coproduit coassociatif, d'une counité et d'un antipode, qui sont induits sur les fonctions par le produit, l'unité et l'inversion sur le groupe. Deux références de base sur les algèbres de Hopf sont les livres de E. Abe [**A**] et de M. Sweedler [**Sw**]. Pour le Théorème de Tannaka-Krein, voir [**Hoc**], théorème 3.5, p. 35, et [**HR**], section 30, p. 157.

Le point de vue du groupe (formule de Dyson) a l'avantage de présenter les résultats dans une forme indépendante du développement perturbatif, mais pour le moment ne permet pas de trouver le couple (Z', Z) qui réalise la renormalisation de chaque propagateur $D(p)$. Par contre, la « bonne » renormalisation se détermine avec des calculs en coordonnées locales (formule BPHZ), c'est-à-dire sur l'algèbre de Hopf des fonctions. De plus, le point de vue de l'algèbre de Hopf a l'avantage de pouvoir se généraliser à un contexte d'algèbres non commutatives, même quand les groupes sont absents.

Le but de cet exposé est de présenter des résultats récents sur le deuxième point de vue et de montrer comment ils amènent naturellement à définir un nouveau groupe de séries indexées par l'ensemble des arbres binaires planaires et non plus par les entiers.

2. Algèbres de Hopf de la renormalisation

La première algèbre de Hopf qui règle une renormalisation, cachée dans la formule BPHZ, a été découverte par D. Kreimer dans [**K**] pour le champ scalaire ϕ^3. Dans cet article, Kreimer utilise une représentation des amplitudes de Feynman basée sur des arbres enracinés. Ensuite, le modèle a été élaboré par A. Connes et D. Kreimer directement sur les graphes de Feynman. La conclusion de leurs résultats, qui nous intéresse, est la suivante : pour la théorie quantique d'un champ scalaire $\phi : \mathbb{M}^D \longrightarrow \mathbb{C}$ avec potentiel ϕ^3 si $D = 6$ ou ϕ^4 si $D = 4$, l'algèbre de Hopf de la renormalisation est commutative.

Théorème 2.1 **([CK1] [CK2]).** — *Pour la théorie de champ quantique ϕ^3, on a les résultats suivants.*

(1) *Il existe une algèbre de Hopf commutative graduée et connexe $\mathcal{H}^{CK} = \mathbb{C}[1PI\,\Gamma]$ engendrée par les diagrammes de Feynman 1PI de la théorie ϕ^3, avec coproduit*

$$\Delta^{CK}\Gamma = \sum_{\gamma_i \subset \Gamma} \Gamma/\gamma_1 \cdots \gamma_l \otimes \gamma_1 \cdots \gamma_l,$$

où la somme porte sur les sous-graphes 1PI de Γ tels que $\gamma_i \cap \gamma_j = \varnothing$.

(2) *La formule de renormalisation BPHZ est équivalente à la donnée de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}^{CK}$, c'est-à-dire :*

$$R(\Gamma) = \langle U \otimes C, \Delta^{CK}\Gamma \rangle,$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ dénote l'évaluation des fonctions sur les graphes.

(3) *Par le théorème de Tannaka-Krein (ou sa version duale, le théorème de Milnor-Moore), il existe donc un groupe $G^{CK} := \mathrm{Hom}_{Alg}(\mathcal{H}^{CK}, \mathbb{C})$ de caractères de $\mathcal{H}^{CK}$, qui coïncide avec le groupe de renormalisation.*

De plus, l'algèbre de Lie de G^{CK} se décrit explicitement en termes de l'algèbre pré-Lie construite sur les arbres enracinés par Chapoton et Livernet, voir [**CL**].

Pour l'électrodynamique quantique (QED), avec champs vectoriels et spinoriels $A_{\mu\nu}, \psi : \mathbb{M}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$ décrivant respectivement les photons et les électrons, les propagateurs de Feynman $D_{\mu\nu}(p), S(p) \in M_4(\mathbb{C})$ sont des matrices 4x4 complexes. Le produit entre les amplitudes des diagrammes de Feynman n'est plus commutatif, et une partie du théorème précédent ne s'applique pas.

Pour décrire l'algèbre de renormalisation de la QED, avec Ch. Brouder on emploie un nouveau développement perturbatif des propagateurs basé sur les arbres binaires planaires $t \in Y$, qui a l'avantage de fournir une solution récursive pour les coefficients perturbatifs, voir [**B**], [**BF1**]. Les propagateurs du photon et de l'électron avant et après renormalisation sont donc les séries suivantes :

$$D(\alpha_0;p) = \sum_t \alpha_0^{|t|} U^\gamma(t;p)\ ,\ \overline{D}(\alpha;p) = \sum_t \alpha^{|t|} R^\gamma(t;p)$$
$$S(\alpha_0;p) = \sum_t \alpha_0^{|t|} U^e(t;p)\ ,\ \overline{S}(\alpha;p) = \sum_t \alpha^{|t|} R^e(t;p).$$

On peut ainsi trouver pour la QED des résultats analogues à ceux de Connes et Kreimer.

Théorème 2.2 **([BF1] [BF2] [BF3])**. — *Pour le propagateur du photon* $D(p)$ *de l'électrodynamique quantique, développés sur les arbres binaires planaires, on a les résultats suivants.*

(1) *Il existe une algèbre de Hopf commutative graduée et connexe* $\mathcal{H}^\alpha = \mathbb{C}[\overset{t}{\curlyvee}, t \in Y]$ *avec coproduit* $\Delta^\alpha : \mathcal{H}^\alpha \longrightarrow \mathcal{H}^\alpha \otimes \mathcal{H}^\alpha$ *qui « casse » les branches des arbres selon la règle*

$$\Delta^\alpha(\overset{t}{\curlyvee}) = \sum \text{« ce qui reste de } \overset{t}{\curlyvee} \text{ »} \otimes \text{« } \backslash\text{-branches de } t \text{ »}.$$

Le groupe de renormalisation de la charge α *est le groupe* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathcal{H}^\alpha, \mathbb{C})$ *dual de l'algèbre* $\mathcal{H}^\alpha$.

(2) *La formule de renormalisation BPHZ pour le propagateur du photon est équivalente à une coaction* $\Delta^\gamma : \mathcal{H}^\gamma \longrightarrow \mathcal{H}^\alpha \otimes \mathcal{H}^\gamma$ *de* $\mathcal{H}^\alpha$ *sur l'algèbre non commutative* $\mathcal{H}^\gamma = \mathbb{C}\langle t \in Y\rangle/(1 - |\,)$, *où l'arbre-racine* $|$ *est identifié à l'unité* 1, *qui est multiplicative et sur les générateurs vaut* $\Delta^\gamma(t) = \Delta^\alpha(t)$, *c'est-à-dire :*

$$R^\gamma(t) = \langle U^\gamma \otimes C^\gamma, \Delta^\gamma(t)\rangle.$$

(3) *Le groupe de renormalisation du photon s'avère donc être le groupe* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathcal{H}^\alpha, \mathbb{C})$ *des caractères de* $\mathcal{H}^\alpha$, *c'est-à-dire le même groupe qui renormalise la charge.*

(4) *Il existe une version non commutative* $\tilde{\mathcal{H}}^\alpha$ *de l'algèbre de Hopf* $\mathcal{H}^\alpha$, *donnée par l'algèbre libre* $\tilde{\mathcal{H}}^\alpha = \mathbb{C}\langle \overset{t}{\curlyvee}, t \in Y\rangle$ *avec coproduit* $\tilde{\Delta}^\alpha$ *défini comme* Δ^α *sur les générateurs.*

À noter que le résultat du point 3) reproduit le résultat classique de Ward sur la renormalisation de la charge : le facteur de renormalisation $Z'(\alpha)$ de la charge coïncide avec le facteur de renormalisation $Z(\alpha)$ du photon.

Théorème 2.3 **([BF1] [BF2] [BF3] [Fr1])**. — *Pour le propagateur de l'électron* $S(p)$ *de l'électrodynamique quantique, développé sur les arbres binaires planaires, on a les résultats suivants.*

(1) *Il existe une algèbre de Hopf non commutative* $\mathcal{H}^e = \mathbb{C}\langle t \in Y\rangle/(1 - |\,)$, *sur laquelle* $\mathcal{H}^\alpha$ *coagit de telle sorte que le coproduit semidirect selon R. Molnar, cf.* [**M**], *soit une algèbre*

de Hopf non commutative graduée et connexe $\mathcal{H}^{qed} = \mathcal{H}^{\alpha} \ltimes \mathcal{H}^{e}$*, avec coproduit* $\Delta^{qed} = \Delta^{\alpha} \times \Delta^{e}$ *où* $\Delta^{e} : \mathcal{H}^{e} \longrightarrow \mathcal{H}^{e} \otimes \mathcal{H}^{qed}$ *« casse » les branches des arbres selon la règle*

$$\Delta^{e}(t) = \sum \text{« ce qui reste de } t \text{ »} \otimes (\text{« } \backslash\text{-branches de } t \text{ »} \otimes \text{« } /\text{-branches de } t \text{ »}).$$

(2) *La formule de renormalisation BPHZ pour le propagateur de l'électron est équivalente à la coaction* $\Delta^{e} : \mathcal{H}^{e} \longrightarrow \mathcal{H}^{qed} \otimes \mathcal{H}^{e}$ *définie en 1), c'est-à-dire :*

$$R^{e}(t) = \langle U^{e} \otimes (C^{\gamma} \times C^{e}), \Delta^{e}(t)\rangle.$$

(3) *Le groupe de renormalisation de l'électron se trouve à partir de l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathcal{H}^{qed}, M_4(\mathbb{C}))$ *des « caractères à valeurs matriciels » de* $\mathcal{H}^{qed}$.

L'ensemble des caractères d'une algèbre de Hopf, à valeurs dans une algèbre non commutative, n'est pas lui-même un groupe. Cependant, dans le cas qui nous intéresse, pour reconstruire le groupe il suffit de modifier la notion d'algèbre de Hopf en remplaçant le produit tensoriel $\otimes$ par le produit libre $\star$ cité dans [**L1**]. Ceci constitue le sujet d'un travail en cours, cf. [**Fr1**].

Pour ce qui concerne la renormalisation, le développement sur les arbres binaires planaires pose un problème : les coefficients perturbatifs $R^{\gamma}(t)$ et $R^{e}(t)$ des propagateurs renormalisés ne sont pas nécessairement finis, à cause de certaines identités (les Identités de Ward) qui relient les contre-termes de quelques diagrammes de Feynman représentés par le même arbre.

On est donc obligés de considérer ensemble tous les termes à un ordre d'interaction n donné, c'est-à-dire de considérer la somme $t_n := \sum_{|t|=n} t$ respectivement comme élément de $\mathcal{H}^{\alpha}$, de $\mathcal{H}^{\gamma}$ et de $\mathcal{H}^{e}$.

Théorème 2.4 **([BF2])**

(1) *Soient* $\overline{\mathcal{H}^{\alpha}} = \mathbb{C}[t_n, n \in \mathbb{N}]$, $\overline{\mathcal{H}^{\gamma}} = \mathbb{C}\langle t_n, n \in \mathbb{N}\rangle$ *et* $\overline{\mathcal{H}^{e}} = \mathbb{C}\langle t_n, n \in \mathbb{N}\rangle$ *les sous-algèbres de* $\mathcal{H}^{\alpha}$, $\mathcal{H}^{\gamma}$ *et* $\mathcal{H}^{e}$ *engendrées par les éléments* t_n.

Alors $\overline{\mathcal{H}^{qed}} = \overline{\mathcal{H}^{\alpha}} \ltimes \overline{\mathcal{H}^{e}}$ *est une sous-algèbre de Hopf de* $\mathcal{H}^{qed}$*, avec coproduit* $\Delta^{qed} = \Delta^{\alpha} \times \Delta^{e}$ *donné par*

$$\Delta^{\alpha}(t_n) = t_n \otimes 1 + 1 \otimes t_n + \sum_{m=1}^{n-1} t_m \otimes Q^{m}_{n-m}(t_*),$$

$$\Delta^{e}(t_n) = 1 \otimes (1, t_n) + t_n \otimes (1, 1) + \sum_{m=1}^{n-1} t_m \otimes T^{m}_{n-m}(t_*),$$

où

$$\begin{aligned}
Q^{l}_{m}(t_*) &= \sum_{k=1}^{m} \binom{l+1}{k} P^{(k)}_{m}(t_*),\\
P^{(k)}_{m}(t_*) &= \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k=m\\ m_1,\ldots,m_k>0}} t_{m_1}\cdots t_{m_k},\\
T^{l}_{m}(t_*) &= (Q^{l}_{m}(t_*),1) + (1,t_m) + \sum_{k=1}^{m} (Q^{l}_{m-k}(t_*),t_k).
\end{aligned}$$

De plus, $\overline{\mathcal{H}^{\text{qed}}}$ *coagit sur* $\overline{\mathcal{H}^{e}}$ *avec coaction* Δ^{e}*, et* $\overline{\mathcal{H}^{\alpha}}$ *coagit sur* $\overline{\mathcal{H}^{\gamma}}$ *avec coaction* Δ^{γ} *donnée sur les générateurs par* $\Delta^{\gamma}(t_n) = \Delta^{\alpha}(t_n)$.

(2) *La renormalisation de la QED à l'ordre d'interaction est équivalente aux coactions de* $\overline{\mathcal{H}^{\alpha}}$ *et* $\overline{\mathcal{H}^{\text{qed}}}$ *sur* $\overline{\mathcal{H}^{\gamma}}$ *et* $\overline{\mathcal{H}^{e}}$ *respectivement, et les termes*

$$\begin{aligned}
R^{\gamma}(t_n) &= \langle U^{\gamma}\otimes C^{\gamma}, \Delta^{\gamma}(t_n)\rangle,\\
R^{e}(t_n) &= \langle U^{e}\otimes (C^{\gamma}\times C^{e}), \Delta^{e}(t_n)\rangle
\end{aligned}$$

sont finis.

Donc, la renormalisation de la QED se décrit d'un côté par les formules de Dyson qui font intervenir produits et compositions de séries, et de l'autre par une algèbre de Hopf cette fois non commutative. Ces deux approches ne sont pas en contradiction, car les amplitudes de Feynman de la QED, qui jouent le rôle des caractères pour ces algèbres de Hopf, ne sont pas scalaires.

En effet, l'algèbre de Hopf duale du groupe abélien G^{inv} est cocommutative libre, et admet donc naturellement une version non commutative qui reste cocommutative libre et qui représente l'ensemble des fonctions sur G^{inv} à valeurs dans l'algèbre $\mathcal{A}$.

Lemme 2.5

(1) *L'algèbre* $\mathcal{H}^{\text{inv}} = \text{Fun}(G^{\text{inv}}, \mathcal{A})$ *des fonctions polynomiales sur le groupe* G^{inv} *est une algèbre libre,* $\mathcal{H}^{\text{inv}} = \mathbb{C}\langle b_n, n\in\mathbb{N}\rangle$ *: le symbole* b_n *agit sur* $f(x)$ *comme*

$$\langle b_n, f(x)\rangle = f_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n f(0)}{dx^n} \in \mathcal{A}.$$

(2) *L'algèbre non commutative* $\mathcal{H}^{\text{inv}} \cong \mathbb{C}\langle b_n, n\in\mathbb{N}\rangle$ *est une algèbre de Hopf cocommutative avec le coproduit*

$$\Delta^{P} b_n = b_n\otimes 1 + 1\otimes b_n + \sum_{m=1}^{n-1} b_m\otimes b_{n-m},$$

et G^{inv} *peut être reconstruit à partir de l'ensemble* $\text{Hom}_{\text{Alg}}(\mathcal{H}^{\text{inv}}, \mathcal{A})$ *des « caractères de* $\mathcal{H}^{\text{inv}}$ *à valeurs dans* $\mathcal{A}$ *».*

Par contre, l'ensemble des séries à coefficients dans une algèbre non commutative ne forment pas un groupe pour la composition (qui n'est pas une opération associative dans ce cas). Donc, il est tout à fait inattendu que l'algèbre $\overline{\mathcal{H}^\alpha}$ duale du groupe de composition des séries admette une version non commutative.

Théorème 2.6 **([BF2] [BFK])**

(1) *Sur l'algèbre non commutative* $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}} = \mathbb{C}\langle a_n, n \in \mathbb{N}\rangle$, *le coproduit*

$$\Delta^{\mathrm{dif}} a_n = a_n \otimes 1 + 1 \otimes a_n + \sum_{m=1}^{n-1} a_m \otimes Q^m_{n-m}(a_*)$$

est coassociatif. Donc, $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}}$ *est une algèbre de Hopf isomorphe à* $(\widetilde{\overline{\mathcal{H}^\alpha}}) = \overline{(\tilde{\mathcal{H}}^\alpha)}$.

(2) *L'abélianisée* $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}}_{ab} = \mathbb{C}[a_n, n \in \mathbb{N}] \cong \overline{\mathcal{H}^\alpha}$ *est l'algèbre des fonctions polynomiales sur le groupe de composition des séries* G^{dif} *: le symbole* a_n *agit sur* $\varphi(x)$ *comme*

$$\langle a_n, \varphi(x)\rangle = \varphi_n = \frac{1}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}\varphi(0)}{dx^{n+1}}.$$

(3) *L'action naturelle du groupe* G^{dif} *sur le groupe* G^{inv} *donnée par la composition à droite admet une version non commutative donnée par une coaction de* $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}}$ *sur* $\mathcal{H}^{\mathrm{inv}}$. *Le groupe semidirect* $G^{\mathrm{dif}} \ltimes G^{\mathrm{inv}}$ *admet donc une version non commutative, donnée par le coproduit semidirect* $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}} \ltimes \mathcal{H}^{\mathrm{inv}}$ *des algèbres de Hopf respectives.*

Par un théorème de Molnar, cf. [**M**], $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}} \ltimes \mathcal{H}^{\mathrm{inv}}$ est en même temps une algèbre et une cogèbre, mais pas une algèbre de Hopf. Par contre, le coproduit semidirect $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}}_{ab} \ltimes \mathcal{H}^{\mathrm{inv}}$ est une algèbre de Hopf ni commutative ni cocommutative. Puisque les constantes de couplage sont toujours des scalaires, l'algèbre de renormalisation des constantes de couplage est bien $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}}_{ab}$, et donc la renormalisation d'un propagateur à l'ordre d'interaction est toujours décrite par une véritable algèbre de Hopf.

En conclusion, la renormalisation de la QED peut être reconstruite en utilisant les amplitudes de Feynman U^γ, U^e et les contre-termes C^γ, C^e comme « caractères non commutatifs » d'une algèbre de Hopf non commutative.

3. Groupe de séries développées sur les arbres

L'usage de groupes et algèbres de Hopf non commutatives en renormalisation des champs quantiques est résumé dans le tableau 1.

Le troisième cadre de la troisième colonne correspond aux résultats de L. Foissy dans sa thèse [**Fo**]. Il trouve une algèbre de Hopf $\mathcal{H}^D_{P,R}$ non commutative sur les arbres planaires enracinés et décorés, qui généralise la première algèbre de la renormalisation introduite par Kreimer dans [**K**].

Séries développées sur :	**Groupes (= alg. Hopf comm.)**	**Algèbres de Hopf non commutatives**
entiers	$G^{\mathrm{dif}} \ltimes G^{\mathrm{inv}}$	$\mathcal{H}^{\mathrm{dif}}$ $\mathcal{H}^{\mathrm{dif}}_{\mathrm{ab}} \ltimes \mathcal{H}^{\mathrm{inv}}$ [Brouder-Frabetti, QED]
arbres binaires planaires	?	$\widetilde{\mathcal{H}^{\alpha}} \cong \mathcal{H}^{\mathrm{LR}}$ [Loday-Ronco, Holtkamp, Foissy] $\mathcal{H}^{\mathrm{qed}} = \mathcal{H}^{\alpha} \ltimes \mathcal{H}^{e}$ [Brouder-Frabetti, QED]
arbres enracinés (décorés, planaires)	$\mathcal{H}_{\mathrm{R}} = \mathrm{Fun}(G^{\mathrm{R}})$ groupe dont on connaît l'algèbre des polynômes [Kreimer, Φ^3] ou l'algèbre enveloppante [Grossman-Larson, Painate, Hoffman] ou une représentation sur l'espace des actions [Krajewski]	$\mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{P,R}}$ version non comm. de $\mathcal{H}_{\mathrm{R}}$ [Foissy] version opéradique [van der Laan]
graphes de Feynman	$\mathcal{H}^{\mathrm{CK}} = \mathrm{Fun}(G^{\mathrm{CK}})$ groupe dont on connaît l'algèbre des polynômes ou l'algèbre de Lie [Connes-Kreimer, Φ^3]	??

TABLEAU 1

Foissy montre aussi que si l'ensemble D des décorations est trivial, alors $\mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\mathrm{P,R}}$ est isomorphe à l'algèbre de Hopf $\tilde{\mathcal{H}}^{\alpha}$, ce qui généralise au cadre non commutatif la composition des renormalisations de la constante de couplage.

Une construction générale des algèbres de Hopf basées sur des arbres en termes d'opérades se trouve dans la thèse de P. van der Laan [**vdL**].

Dans le deuxième cadre de la troisième colonne, on indique l'isomorphisme entre l'algèbre non commutative de la charge $\overline{\mathcal{H}^\alpha}$ et l'algèbre de Hopf sur les arbres binaires planaires introduite par J.-L. Loday et M. Ronco dans [**LR**]. L'isomorphisme a été prouvé récemment par R. Holtkamp [**Hol**] en utilisant les résultats de Foissy.

Le trou ?? du tableau est une question ouverte : peut-on définir une version non commutative de l'algèbre de Hopf de Connes et Kreimer sur les graphes de Feynman de toute théorie non scalaire ?

Le trou ? correspond à un groupe de séries développées sur les arbres binaires planaires. Pour le définir, il faut donner un sens aux opérations de produit ponctuel et de composition entre symboles du type x^t, pour tout arbre t.

Pour avoir un groupe de séries avec produit ponctuel, on considère l'ensemble

$$G_Y^{\mathrm{inv}} = \{f(x) = x^{|} + \sum_{t \neq |} f(t) x^t, \quad f(t) \in M_4(\mathbb{C})\}.$$

Définition 3.1. — Soient $/, \backslash : Y \times Y \longrightarrow Y$ les opérations *over* et *under* introduites par Loday dans [**L2**], et qui correspondent aux greffes à gauche et à droite,

$$t/s := \begin{smallmatrix} t & & \\ & \diagdown & \\ & & s \end{smallmatrix}, \qquad t\backslash s := \begin{smallmatrix} & & s \\ & \diagup & \\ t & & \end{smallmatrix}.$$

Les greffes sont associatives, ont une unité commune donnée par l'arbre $|$, et satisfont à la relation suivante :

$$(t/s)\backslash r = t/(s\backslash r), \qquad \text{pour } t, s, r \in Y \text{ avec } s \neq | .$$

L'espace vectoriel engendré par les arbres binaires planaires est en effet l'algèbre de type libre sur un générateur, l'arbre $\curlyvee$.

On étend les greffes à l'ensemble G_Y^{inv} comme

$$f(x)/g(x) := \sum_{t,s \in Y} f(t)g(s)x^{t/s}, \qquad f(x)\backslash g(x) := \sum_{t,s \in Y} f(t)g(s)x^{t\backslash s},$$

et on pose

$$G_Y^\gamma := (G_Y^{\mathrm{inv}}, /), \qquad G_Y^e := (G_Y^{\mathrm{inv}}, \backslash).$$

Lemme 3.2

(1) *Les deux produits ponctuels* $(f/g)(x) := f(x)/g(x)$ *et* $(f\backslash g)(x) := f(x)\backslash g(x)$ *sont associatifs et rendent* G_Y^γ *et* G_Y^e *des groupes non abéliens, avec unité* $1(x) := x^{|}$.

(2) *Les groupes* G_Y^γ *et* G_Y^e *sont les groupes de « caractères à valeurs dans les matrices » des algèbres* $\mathcal{H}^\gamma$ *et* $\mathcal{H}^e$*, i.e.*

$$G_Y^\gamma = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathcal{H}^\gamma, M_4(\mathbb{C})), \qquad G_Y^e = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathcal{H}^e, M_4(\mathbb{C})).$$

Pour avoir un groupe de séries avec la composition, on considère l'ensemble

$$G^{\mathrm{dif}}_{Y} = \{\varphi(x) = x^{\curlyvee} + \sum_{t \neq |\,,\,\curlyvee} \varphi(t) x^{t}, \quad \varphi(t) \in \mathbb{C}\}.$$

Suivant une idée de J.-L. Loday [**L2**][1], on définit la puissance $\varphi(x)^t$ d'une série par un arbre en utilisant la décomposition de l'arbre t en monôme sur le générateur $\curlyvee$ par rapport aux deux opérations de greffe / et \.

Définition 3.3. — Pour tout arbre t, soit μ_t le monôme qui décrit l'arbre t comme produit de greffes gauches et droites de l'arbre $\curlyvee$ par lui même. Par exemple

$$\overset{\curlyvee}{\curlyvee} = (\curlyvee \backslash \curlyvee)/\curlyvee \qquad \text{donc} \qquad \mu_{\overset{\curlyvee}{\curlyvee}} = (\ \backslash\ )/\ ,$$

$$\overset{\curlyvee\,\curlyvee}{\curlyvee} = (\curlyvee / \curlyvee)\backslash \curlyvee = \curlyvee/(\curlyvee \backslash \curlyvee) \qquad \text{donc} \qquad \mu_{\overset{\curlyvee\,\curlyvee}{\curlyvee}} = (\ /\ )\backslash\ = \ /(\ \backslash\ ).$$

On peut voir le monôme μ_t comme une application $\mu_t : Y \longrightarrow Y$ qui est l'identité pour $t = \curlyvee$, qui vaut $\mu_t(\curlyvee) = t$ sur le générateur $\curlyvee$ et qui calcule le produit défini par t sur les autres arbres $s \in Y$. Par exemple

$$\mu_{\overset{\curlyvee}{\curlyvee}}(s) = (s \backslash s)/s.$$

On étend alors l'application μ_t aux séries formelles comme évaluation du monôme μ_t sur toute série. En particulier, l'évaluation de μ_t sur $\varphi(s)x^s$ donne $\mu_t(\varphi(s)x^s) = \varphi(s)^{|t|} x^{\mu_t(s)}$.

Théorème 3.4 **([Fr1])**

(1) *Soit*

$$G^{\alpha}_{Y} := \{\varphi(x) = x^{\curlyvee} + \sum_{t \neq |\,,\,\curlyvee} \varphi(t) x^{t/\curlyvee}, \quad \varphi(t) \in \mathbb{C}\}$$

le sous-ensemble de G^{dif}_{Y} *des séries* $\varphi(x) = \varphi^{-}(x)/x^{\curlyvee}$*, pour toute séries* $\varphi^{-}(x) \in G^{\mathrm{inv}}_{Y}$*. Le produit de composition* $(\varphi \circ \psi)(x) := \varphi(\psi(x))$ *défini à partir de*

$$\psi(x)^t := \mu_t(\psi(x))$$

est associatif et fait de G^{α}_{Y} *un groupe non abélien.*

(2) *En effet,* G^{α}_{Y} *est le groupe des caractères de* $\mathcal{H}^{\alpha}$*, i.e.* $G^{\alpha}_{Y} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathcal{H}^{\alpha}, \mathbb{C})$*. De même,* $G^{\alpha}_{Y} \ltimes G^{e}_{Y}$ *est le groupe dual de* $\mathcal{H}^{\mathrm{qed}} = \mathcal{H}^{\alpha} \ltimes \mathcal{H}^{e}$*, dans le sens où il peut être reconstruit à partir de l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}}(\mathcal{H}^{\mathrm{qed}}, M_4(\mathbb{C}))$.

[1] Loday applique cette idée à une opération construite à partir des greffes, et non aux greffes elles-mêmes.

L'application $|\ | : Y \longrightarrow \mathbb{N}$ qui compte le nombre $|t|$ de sommets internes de t (l'ordre de t) est surjective, et induit des projections

$$G^{\alpha}_{Y} \longrightarrow G^{\mathrm{dif}}, \qquad G^{\gamma}_{Y} \longrightarrow G^{\mathrm{inv}}, \qquad G^{e}_{Y} \longrightarrow G^{\mathrm{inv}},$$

entre les groupes de séries développées sur les arbres et les groupes de séries développées sur les entiers.

Comme le groupe G^{dif} de composition des séries usuelles est le groupe des difféomorphismes formels de $\mathbb{C}$, il se pose naturellement la question suivante, ouverte à notre connaissance : peut-on interpréter le groupe G^{α}_{Y} comme groupe d'automorphismes formels d'un certain espace ?

Références

[A] E. Abe, *Hopf Algebras*, Cambridge Univ. Press ed. 1977.

[B] Ch. Brouder, *On the trees of quantum fields*, Eur. Phys. J. C **12** (2000), 535-549.

[BF1] Ch. Brouder, A. Frabetti, *Renormalization of QED with planar binary trees*, Eur. Phys. J. C **19** (2001), 715-741.

[BF2] Ch. Brouder, A. Frabetti, *Noncommutative renormalization of massless QED*, `http://arxiv.org/abs/hep-th/0011161`.

[BF3] Ch. Brouder, A. Frabetti, *QED Hopf algebra on planar binary trees*, J. Alg. **267** (2003), 298-322.

[BFK] Ch. Brouder, A. Frabetti, Ch. Krattenthaler, *Noncommutative Hopf algebra of formal diffeomorphisms*, en préparation.

[CL] F. Chapoton, M. Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Int. Math. Res. Notices **8** (2001), 395-408.

[C] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge Univ. Press ed. 1984.

[CK1] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem I : the Hopf algebra structure of graphs and the main theorem*, Comm. Math. Phys. **210** (2000), 249-273.

[CK2] A. Connes, D. Kreimer, *Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem II : the β function, diffeomorphisms and the renormalization group*, Comm. Math. Phys. **216** (2001), 215-241.

[D] F.J. Dyson, *The S matrix in quantum electrodynamics*, Phys. Rev. **75** (1949), 1736–55.

[Fo] L. Foissy, *Les algèbres de Hopf des arbres enracinés décorés I, II*, Bull. Sci. Math. **126** (2002), 193-239, 249-288.

[Fr1] A. Frabetti, *Groups of tree-expanded series*, en préparation.

[Fr1] A. Frabetti, *Free product Hopf algebras and groups of noncommutative valued characters*, en préparation.

[GKM] F. Girelli, T. Krajewski, P. Martinetti, *The Hopf algebra of Connes and Kreimer and wave function renormalization*, Modern Phys. Lett. A **16** (2001), 299-303.

[Hoc] G. Hochschild, *La structure des groupes de Lie*, Dunod ed. 1968.

[HR] E. Hewitt, K.A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis II*, Springer-Verlag 1970.

[Hol] R. Holtkamp, *Comparison of Hopf algebras on trees*, Arch. Math. **80** (2002), 368-383.

[IZ] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill ed. 1980.

[K] D. Kreimer, *On the Hopf algebra structure of perturbative quantum field theory*, Adv. Th. Math. Phys. **2** (1998), 303-334.

[L1] J.-L. Loday, *Künneth-style formula for the homology of Leibniz algebras*, Math. Z. **221** (1996), 41-47.

[L2] J.-L. Loday, *Arithmetree*, J. Alg. **258** (2002), 275-309.

[LR] J.-L. Loday, M. Ronco, *Hopf algebra of the planar binary trees*, Adv. in Math. **139** (1998), 293-309.

[M] R.K. Molnar, *Semi-direct products of Hopf algebras*, J. Alg. **47** (1977), 29-51.

[PS] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *Quantum Field Theory*, Perseus Books Publ. ed. 1995.

[R] J.J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer Verlag ed. 1995.

[Sc] L. Schwartz, *Algèbre*, Dunod, 2 ed. 2003.

[Sw] M.E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Benjamin ed. 1969.

[vdL] P. van der Laan, *Some Hopf algebras of trees*, `http://front.math.ucdavis.edu/math.QA/0106244` ou `http://arxiv.org/abs/math.QA/0106244`.

[Z] W. Zimmermann, *Convergence of Bogoliubov's method of renormalization in momentum space*, Comm. Math. Phys. **15** (1969), 208-234.

Alessandra Frabetti

Institut Girard Desargues, Bât. Braconnier, Université de Lyon 1, 21, avenue Claude Bernard, 69622 Villeurbanne Cedex.

E-mail : `frabetti@igd.univ-lyon1.fr`

RÉSONANCES POUR DES OPÉRATEURS DE SCHRÖDINGER MATRICIELS

Laurence Nedelec

1. Introduction aux opérateurs de Schrödinger stationnaires

Le laplacien noté Δ est l'opérateur qui à une fonction f de plusieurs variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ associe la fonction

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\partial^2}{\partial {x_j}^2} f.$$

Celui-ci apparaît dans plusieurs modèles de physique, dont je vais citer quelques cas.

Soit une onde représentée par une fonction (appelée fonction d'onde) $u(x,t)$ où $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$ (pour fixer les idées le réel $u(x,t)$ représente le déplacement vertical d'une membrane au-dessus du point x du plan horizontal, au temps t). L'équation communément utilisée pour modéliser le déplacement des membranes vibrantes en l'absence d'interaction avec le reste du monde, est

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = h^2 \Delta u(x,t).$$

Le paramètre $h > 0$ dépend lui des caractéristiques physiques de la membrane. (Remarque : il est simple, si $n = 1$, de montrer que les solutions de classe C^2 de cette équation s'écrivent sous la forme $f(x + ht) + g(x - ht)$ où f et g sont deux fonctions C^2.) L'équation des ondes de lumière est aussi $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = h^2 \Delta u(x,t)$, où h est un autre paramètre. L'équation de la diffusion est $\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = h^2 \Delta u(x,t)$, tandis que l'équation décrivant l'évolution d'un système quantique sans interaction est

$$h \frac{\partial}{i \partial t} u(x,t) = h^2 \Delta u(x,t),$$

où h est la constante de Planck. Dès que les ondes interagissent avec un milieu il faut modifier ces équations en y ajoutant par exemple un potentiel électrique ou magnétique. La dernière équation, modifiée par un potentiel électrique, devient l'équation

$$h\frac{\partial}{i\partial t}u(x,t) = h^2\Delta u(x,t) - V(x)u(x,t) \tag{1}$$

où V est une fonction appelée potentiel.

La plupart du temps on résout un problème de Cauchy : rechercher une solution $u(x,t)$ de l'une des équations précédentes et vérifiant la condition initiale $u(x,0) = u_0(x)$, $u_0(x)$ étant une fonction donnée.

Pour résoudre ces problèmes, on décompose en général la fonction $u(x,0)$ sur une base des vecteurs propres de l'opérateur $-h^2\Delta+V$, appelé opérateur de Schrödinger, ce qui permet ensuite de faire une étude simple de l'évolution en temps.

Par exemple si $u_0(x)$ est un vecteur propre de $-h^2\Delta + V$ associé à la valeur propre λ (i.e. $(-h^2\Delta + V)u_0(x) = \lambda u_0(x)$), alors la fonction $u(x,t) = e^{i\lambda t}u_0(x)$ est solution de l'équation d'évolution (1). L'étude du spectre de l'opérateur $-h^2\Delta + V$ est ainsi justifiée.

2. L'opérateur matriciel

Les opérateurs de Schrödinger étudiés ici sont les opérateurs :

$$P_h = \begin{pmatrix} -h^2\Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -h^2\Delta & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & -h^2\Delta \end{pmatrix} + V(x)$$

où h est une petite constante strictement positive, $x \in \mathbb{R}^n$, et $V(x) = (V_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,r\}^2}$ une matrice hermitienne de taille r. On note aussi $P_h = -h^2\Delta \otimes I_r + V(x)$ où I_r est la matrice identité de taille r.

3. Motivation

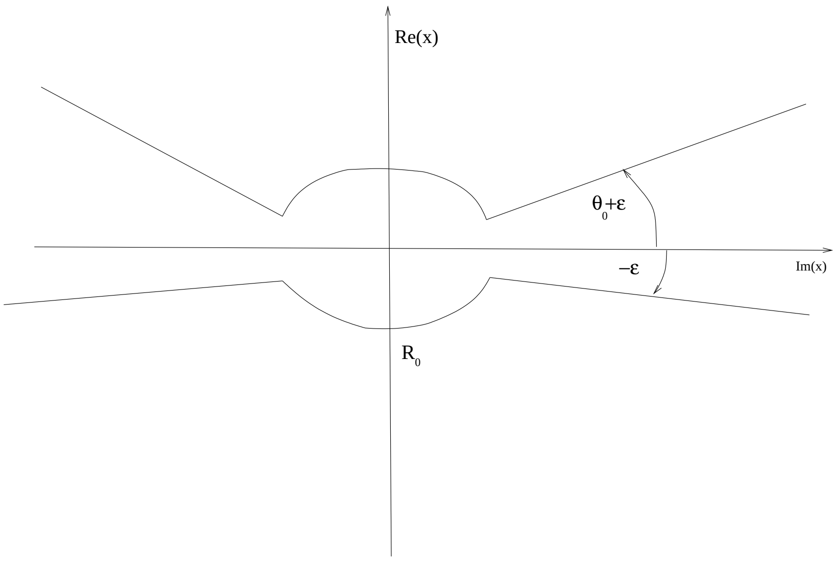
De tels opérateurs se rencontrent dans divers modèles de physique, par exemple l'approximation de Born-Oppenheimer qui modélise l'opérateur $-h^2\Delta_x - \Delta_y + W(x,y)$ avec h petit, ou bien l'approximation d'un opérateur de Schrödinger périodique à deux variables. (En gros, les particules de probabilité de présence $\varphi(y)$ à la position y ne voient pas bouger les particules associées à x car ces dernières sont trop lentes, la vitesse étant liée au paramètre h). La justification de l'approximation a été faite dans diverses situations **[4]** **[1]**. Les matrices V intéressantes à regarder sont celles qui ne sont pas diagonalisables de manière régulière, sinon on se ramène à un problème de dimension un. Les matrices V modèles que l'on rencontre le plus couramment sont

$$V_1(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & -x_1 \end{pmatrix}, \; x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

et

$$V_2(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & -x_1 \end{pmatrix}, \; x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Les résonances sont par définition les pôles d'une extension méromorphe de la résolvante $R(z) = (P_h - z)^{-1}$ définie dans le demi plan $\mathrm{im}(z) > 0$ [**3**], [**9**]. C'est une généralisation naturelle de la notion de valeur propre d'un opérateur. Notons $\mathrm{res}(P_h)$ l'ensemble des résonances de P_h. Pour définir les résonances, on suppose que V se prolonge analytiquement dans un domaine $S \subset \mathbb{C}^n$ de la forme



C'est-à-dire :

$$S = \{\rho w \mid w \in \mathbb{R}^n, \mathrm{dist}(w, \mathbb{S}^{n-1}) < \epsilon, \; \rho \in \mathbb{C}, \; |\rho| > R, \; \arg\rho \in [-\epsilon, \theta_0 + \epsilon[\} \\ \cup \{\rho w \mid w \in \mathbb{S}^{n-1}, \; \rho \in \mathbb{C}, \; |\rho| < R_0\}$$

avec $\theta_0 > 0$.

4. Résultats

Une classification des propriétés des matrices V « non diagonalisables » pouvant générer des résonances a été faite dans [**5**]. On traite ici l'un des cas classifié incluant les matrices V_1 et V_2. Supposons :

(H1) $r = 2$.

Il existe donc des fonctions réelles $(a_j)_{j\in\{1,2,3\}}$ et b telles que

$$V(x) = b(x)I_2 + \begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) + ia_3(x) \\ a_2(x) - ia_3(x) & -a_1(x) \end{pmatrix}$$

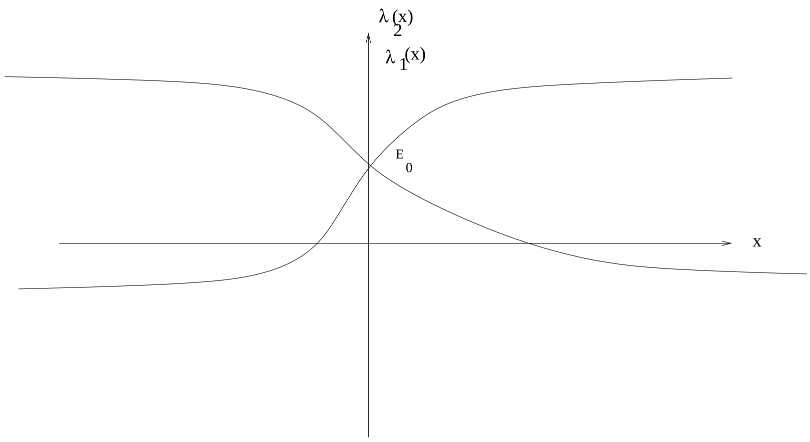
(i.e. $b(x) = \operatorname{tr} V(x)$).

(H2) Il existe une matrice constante V_0 et $n_0 \in \mathbb{R}, n_0 > n$, tels que $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = V_0$ et $\|V(x) - V_0\| \leq C\langle x\rangle^{-n_0}$ où $\langle x\rangle = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$ pour $x \in S$.

(H3) $V(0)$ a une valeur propre double $E_0 \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $V(0) = E_0 I_2$, et E_0 n'est pas une valeur propre de V_0.

(H4) $\nabla a_j(0)$ sont linéairement indépendantes pour $j \in \{1, 2, 3\}$ si $n = 3$ et pour $j \in \{1, 2\}$ si $n = 2$ et $|\nabla_{a_j} b(0)| < 1$ (∇_{a_j} représente le gradient dans les coordonnées a_j) (si $n = 2$ on ajoute l'hypothèse $a_3 = 0$).

L'allure des courbes des valeurs propres de $V(x)$ est donnée dans le graphique suivant :



Notons $P_0 = -h^2\Delta_x \otimes I_r + V_0(x)$. Le résultat suivant permet de localiser les résonances et d'estimer leur nombre au voisinage d'un point.

Théorème 1. — *Sous les hypothèses (H1)*$-\cdots-$*(H4) on a les résultats suivants.*

Soit $n = 3$. *Pour tout voisinage W de* E_0 *il existe* $h_0 > 0$ *et* $C > 0$ *tels que, pour tout* h, $0 < h < h_0$, *alors* $\operatorname{card}\{\operatorname{res}(P_0) \cap W\} \geq Ch^{-1}|\ln h|^{-3/2}$.

Soit $n = 2$. *Pour tout voisinage de* E_0 *il existe* $h_0 > 0$ *et* $C > 0, c > 0$ *tels que, pour tout* h, $0 < h < h_0$, *alors* $ch^{-2} \leq \operatorname{card}\{\operatorname{res}(P_0) \cap W\} \leq Ch^{-2}$.

Le résultat connu pour des potentiels généraux est que le nombre de résonances près d'un point est majoré par $O(h^{-n})$ (formule de Weyl). En dimension un on peut parfois avoir des résultats plus précis [**6**].

5. Plan de la démonstration du théorème 1

– On commence par donner l'expression du développement en puissances de h de la distribution $f \to \mathrm{tr}(f(P_h) - f(P_0))$ en utilisant le calcul pseudo-différentiel [**7**]. On trouve

$$\mathrm{tr}(f(P_h) - f(P_0)) = \begin{cases} C(f)h^{-n} + \text{reste} & \text{si } n = 2, \\ \mathrm{tr}(f(P_h) - f(P_0)) = C(f)h^{-n+2} + \text{reste} & \text{si } n = 3, \end{cases}$$

avec une expression explicite pour $C(f)$.

– On utilise la formule de trace locale de Sjöstrand [**8**], qui donne le résultat $\mathrm{tr}(f(P_h) - f(P_0)) = \sum_{z_j \in \mathrm{res}\, P_h} f(z_j) + \text{reste}$. Cette formule est une généralisation des deux formules suivantes, mais où l'on perd un reste :

Si P est un opérateur autoadjoint (pas forcément compact)

$$\mathrm{tr}\, P = \sum_{z_j \text{valeur propre } P} z_j .$$

Si P est un opérateur compact (pas forcément autoadjoint)

$$\mathrm{tr}\, P = \sum_{z_j \text{valeur propre } P} z_j$$

(théorème de Lidskii [**2**]).

– On choisit une fonction f dépendant de h si $n = 3$ de la forme $f(z,h) = e^{i\ln(h)(z-E_0)} e^{\ln(h)(z-E_0)^2}$, et indépendante de h si $n = 2$. Les termes de reste dans la formule ci-dessus sont contrôlés par des normes de f. On obtient une estimation de la forme

$$\sum_{z_j \in \mathrm{res}\, P_h} f(z_j) \geq C(h),$$

dont on déduit aisément le théorème, en utilisant le fait que la fonction f choisie vaut 1 en E_0.

Références

[1] J.M. Combes, P. Duclos, R. Seiler. The Born-Oppenheimer approximation. *Rigorous Atomic and Molecular Physics*, 185–212 (1981).

[2] I.C. Gohberg, M.G. Krein. Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non autoadjoints. Dunod, 1972.

[3] B. Helffer, A. Martinez. Comparaison entre les diverses notions de résonances. *Helvetica Physica Acta* **60**, 992– 1003 (1987).

[4] M. Klein, A. Martinez, R. Seiler, X.P. Wang. On the Born-Oppenheimer expansion for polyatomic molecules. *Comm. Math. Phys.* **143**, 607–639 (1992).

[5] L. Nedelec. Resonances for matrix Schrödinger operators. *Duke Mathematical Journal* **106** 2, 209–236 (2001).

[6] T. Ramond, S. Fujiee. Matrice de scattering et résonances associées à une orbite hétérocline. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys.Théor.* **9**, 31–82 (1998).

[7] D. Robert. *Autour de l'approximation semi-classique*. Progress in Mathematics, Birkhäuser, 1983.

[8] J. Sjöstrand. Resonances for bottles and trace formulae. *Math. Nachrichten* **221**, 95–149 (2001).

[9] J. Sjöstrand, M. Zworski. Complex scaling and the distribution of scattering poles. *J. Amer. Math. Soc.*, **4** 4, 729–769, (1991).

Laurence Nedelec

IUFM de Rouen et Institut Galilée, Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications, Université Paris-Nord, 99, Avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse.

E-mail : `nedelec@math.univ-paris13.fr`

A PROPOS D'ANOMALIES EN MATHÉMATIQUE ET EN PHYSIQUE

Sylvie Paycha

Résumé. — Nous montrons comment des anomalies « traciales » du côté des mathématiques peuvent se manifester en théorie des champs. Cette présentation est basée sur un article en collaboration avec A. Cardona et C. Ducourtioux [**4**].

Introduction

Le terme d'anomalie prend des sens différents selon le domaine d'application, mais dans tous les cas il s'agit d'une obstruction au sens large du terme. L'objectif de cet article est de relier les anomalies traciales du côté des mathématiques à certaines anomalies en théorie des champs du côté de la physique.

Par *anomalies traciales*, nous entendons des obstructions provenant de l'utilisation de « traces régularisées » qui étendent la trace ordinaire des matrices à l'algèbre des opérateurs pseudodifférentiels classiques. Elles dépendent d'un opérateur elliptique que l'on appellera le *poids*, et bien qu'elles soient de ce fait non traciales, nous les appellerons par abus de langage « traces pondérées » [**14**], [**5**]. A ces anomalies traciales est reliée l'*anomalie multiplicative* [**9**], [**13**], [**6**] du déterminant ζ qui étend le déterminant des matrices à une classe d'opérateurs pseudodifférentiels classiques ; c'est un « déterminant régularisé » de manière tout à fait analogue aux traces régularisées, qui n'est pas multiplicatif contrairement au déterminant ordinaire.

Bien que porteurs d'anomalies, les traces et déterminants régularisés s'avèrent très utiles pour décrire des systèmes physiques quantifiés. Nous montrerons comment les anomalies « mathématiques » qui découlent de leur utilisation sont liées à certains types d'*anomalies en théorie des champs*. Ces dernières correspondent le plus souvent à une obstruction à maintenir une symétrie lors de la quantification, c'est-à-dire lors du passage d'une théorie classique à une théorie quantique [**1**], [**2**], [**7**], [**12**]. Nous travaillerons ici dans le cadre de la quantification fonctionnelle qui utilise des intégrales de chemins « à la Feynman ».

1. Anomalies traciales

Nous nous proposons de généraliser la trace ordinaire tr : $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ sur l'algèbre $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille (n,n) à coefficients dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) à une algèbre d'opérateurs en dimension infinie. Le passage de la dimension finie à la dimension infinie va se faire par l'introduction d'une variété (que l'on prendra compacte, riemannienne et sans bord) notée M par la suite, ce qui va nous permettre de différentier et de « pseudodifférentier ». Sans nous attarder ici sur la notion assez technique d'opérateur pseudodifférentiel (voir l'appendice), rappelons simplement que ceux-ci généralisent les opérateurs différentiels, et que les inverses d'opérateurs différentiels sont des opérateurs pseudodifférentiels. Nous nous limiterons aux opérateurs pseudodifférentiels classiques, excluant ainsi les logarithmes de beaucoup d'opérateurs différentiels. Par contre sont encore classiques des crochets $[\log Q, A]$ de logarithmes d'opérateurs différentiels $\log Q$ avec des opérateurs différentiels classiques A, et les différentielles de familles de logarithmes d'opérateurs différentiels, $d \log Q$.

Nous nous proposons donc de remplacer l'algèbre $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n)$ par l'algèbre $\mathcal{C}\ell(M, \mathbb{K}^n)$ des opérateurs pseudodifférentiels classiques agissant sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur M à valeurs dans $\mathbb{K}^n$. Lorsque M est réduit à un point, il n'y a plus de « place » pour différentier et $\mathcal{C}\ell(M, \mathbb{K}^n)$ se réduit à $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. Plus généralement, on considérera un fibré vectoriel $E \to M$ basé sur M de rang n sur $\mathbb{K}$ et l'algèbre $\mathcal{C}\ell(M, E)$ des opérateurs pseudodifférentiels classiques opérant sur les sections $\mathcal{C}^\infty$ de E. Le cas où E est un fibré trivial $M \times \mathbb{K}^n$ redonne l'algèbre $\mathcal{C}\ell(M, \mathbb{K}^n)$. L'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels classiques agissant sur les sections d'un fibré E vers les sections d'un fibré F sera noté $\mathcal{C}\ell(M, E; F)$. Se pose alors le problème de remplacer la trace habituelle sur $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ par une forme linéaire adéquate sur $\mathcal{C}\ell(M, E)$.

M. Wodzicki [**20**] a construit une trace sur $\mathcal{C}\ell(M, E)$, appelée depuis *résidu de Wodzicki*, qui est en fait l'unique trace sur cette algèbre à un facteur multiplicatif près si la variété sous-jacente est connexe et de dimension strictement supérieure à 1. La terminologie « résidu » s'explique par la manière dont on peut construire cette trace. Étant donnés un opérateur $A \in \mathcal{C}\ell(M, E)$ et un opérateur différentiel elliptique Q d'ordre strictement positif, que l'on supposera positif et inversible pour simplifier, l'opérateur AQ^{-z} avec z de partie réelle assez grande est « à trace » car d'ordre « assez négatif ». L'application $z \longrightarrow \mathrm{tr}(AQ^{-z})$ s'étend en une fonction méromorphe sur le plan complexe avec un pôle simple en 0. Le résidu de Wodzicki s'obtient à partir de ce résidu en 0 par la formule suivante :

$$\mathrm{res}(A) = \mathrm{ord}\, Q \cdot \mathrm{Res}_{z=0}\, \mathrm{tr}(AQ^{-z}), \tag{1}$$

où $\mathrm{ord}\, Q$ désigne l'ordre de l'opérateur Q. Bien que le membre de droite de (1) dépende apparemment de Q, le résidu $\mathrm{res}(A)$ est indépendant du choix de Q. Ce résidu de Wodzicki, qui est tracial, i.e. tel que $\mathrm{res}\,([A, B]) = 0$ pour tout $A, B \in \mathcal{C}\ell(M, E)$, a de plus une *propriété de localité*. Il peut se représenter par une intégrale, sur la variété sous-jacente M, d'une expression dépendant du symbole de A (le symbole permet de définir l'opérateur par transformée de Fourier, voir l'appendice) :

$$\text{res}(A) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_M d\text{vol}(m) \left(\int_{|\xi|=1} \text{tr}_m \, \sigma_{-n}(m, \xi) d\xi \right), \tag{2}$$

où $\sigma_{-n}(m,\xi), m \in M, \xi \in T_m^* M$, est la composante positivement homogène en ξ de degré $-n$ du symbole $\sigma(m,\xi)$ de A, n étant la dimension de M, l'homogénéité étant à entendre au sens suivant $\sigma_{-n}(m, t\xi) = t^{-n}\sigma_{-n}(m,\xi)$ pour tout $t > 0$. Le résidu de Wodzicki, qui semble donc avoir toutes les qualités requises pour pouvoir jouer, sur l'algèbre $\mathcal{C}\ell(M,E)$, le rôle que jouait la trace ordinaire tr sur l'algèbre $g\ell_n(\mathbb{K})$, a cependant un défaut de taille. Il ne « voit » pas les opérateurs de rang fini qui sont justement ceux qui gardent la mémoire de la dimension finie ; en effet si A est de rang fini, alors res(A) est nul. Pour pallier ce problème, nous allons laisser le résidu de Wodzicki sur le bord du chemin pour l'instant, quitte à le retrouver plus tard au détour d'un autre sentier, quelque peu sinueux.

Changeons radicalement de point vue et plutôt que de prendre le résidu en zéro de la fonction méromorphe $z \mapsto \text{tr}(AQ^{-z})$, retranchons-le pour ne retenir que la partie finie (ce qui correspond à un procédé de régularisation en physique) :

$$\begin{aligned} \text{tr}^Q(A) &= \text{Pf}\left(\text{tr}(AQ^{-z})\right)_{z=0} \\ &= \left(\text{tr}(AQ^{-z}) - \frac{1}{z}\text{Res}_{z=0}(\text{tr}(AQ^{-z})\right)_{z=0}. \end{aligned} \tag{3}$$

La fonctionnelle linéaire sur $\mathcal{C}\ell(M,E)$ ainsi définie, que l'on appelera *trace pondérée* par Q, Q étant appelé le *poids*, semble avoir tous les défauts.

– tr^Q n'est pas traciale. Son cobord (dans la cohomologie de Hochschild) s'écrit :

$$\partial\, \text{tr}^Q(A,B) := \text{tr}^Q([A,B]) = -\frac{1}{\text{ord}\, Q}\ \text{res}(A[B, \log Q]), \tag{4}$$

– tr^Q dépend du choix de Q ; étant donnés deux poids Q_1 et Q_2 d'ordres strictement positifs :

$$\text{tr}^{Q_1}(A) - \text{tr}^{Q_2}(A) = -\,\text{res}\left(A\left(\frac{1}{\text{ord}\, Q_1}\log Q_1 - \frac{1}{\text{ord}\, Q_2}\log Q_2\right)\right). \tag{5}$$

– Par conséquent tr^Q ne commute pas avec la différentiation : étant donnée une famille d'opérateurs différentiels elliptiques Q d'ordre strictement positif, paramétrée par une variété, nous avons la relation :

$$[d, \text{tr}^Q](A) := (d \circ \text{tr}^Q - \text{tr}^Q \circ d)(A) = -\frac{1}{\text{ord}\, Q}\ \text{res}(A\ d\log Q). \tag{6}$$

Les égalités (4)-(6), auxquelles nous nous référerons par le terme générique d'*anomalies traciales*, appellent quelques remarques, tout d'abord sur leur histoire. C'est dans le cadre de la physique et plus particulièrement celui de la quantification géométrique que sont apparus le cocycle de Radul $\partial\, \mathrm{tr}^Q$ et son expression comme résidu de Wodzicki (voir [**10, 18**]) dans le cas particulier où $Q = |D|$ est le module d'un opérateur de Dirac et M de dimension 1. Melrose et Nistor [**11**] ont généralisé cette formule à une dimension quelconque et à des poids Q plus généraux. Dans [**5**] nous avons fait cette même généralisation sans avoir eu connaissance des résultats de [**11**], et ce sur la base d'une formule de Kontsevich et Vishik [**9**],

$$\mathrm{Res}_{z=0}\, \mathrm{tr}(A(z)) = -\frac{1}{a'(0)}\, \mathrm{res}(A(0)),$$

reliant plus généralement le résidu complexe en 0 de fonctions du type $z \to \mathrm{tr}(A(z))$, où $A(z)$ est une famille holomorphe d'opérateurs pseudodifférentiels classiques, au résidu de Wodzicki res $(A(0))$, $a(z)$ désignant l'ordre de $A(z)$ et a' la dérivée de a. C'est aussi sur la base de cette même formule de Kontsevich et Vishik que nous avons pu établir dans [**5**] les formules (5) et (6). Voici maintenant quelques remarques utiles pour comprendre les formules (4) à (6).

– Les résidus de Wodzicki des membres de droite de (4), (5) et (6) sont bien définis puisque nous avons observé que les crochets du type $[A, \log Q]$, les différences et les différentielles dlog Q sont classiques malgré le fait que log Q lui-même ne le soit pas.

– Ces formules donnent des expressions « locales » des anomalies traciales au sens de la propriété de localité du résidu explicitée dans (2).

Ayant laissé de côté le résidu de Wodzicki, nous le voyons donc réapparaître comme obstruction à la tracialité de tr^Q et à la possibilité d'échanger différentiation d et trace pondérée tr^Q. Il semble donc n'y avoir aucun argument en faveur des traces pondérées (terminologie abusive puisqu'elles ne sont pas traciales, mais qui s'avère bien pratique). Elles présentent cependant l'énorme avantage de conserver la mémoire de la dimension finie, au sens où elles coïncident avec la trace ordinaire des opérateurs de rang fini,

$$\mathrm{rg}(A) < \infty \implies \mathrm{tr}^Q(A) = \mathrm{tr}(A).$$

Rendons-leur justice en observant qu'elles ont de plus une propriété de covariance qui s'avérera bien utile par la suite :

$$\mathrm{tr}^{C^{-1}QC}(C^{-1}AC) = \mathrm{tr}^Q(A),$$

A étant un pseudo-différentiel classique quelconque, C un pseudo-différentiel inversible.

2. Les déterminants ζ : anomalies là encore

Après les traces, c'est maintenant aux déterminants d'entrer en scène. Ils sont très intimement liés aux traces par la formule

$$\det Q = \exp \circ \,\mathrm{tr} \circ \log Q, \tag{7}$$

qui vaut pour toute matrice $Q \in GL_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées de taille (n,n) inversibles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Il est donc naturel de chercher quel type de déterminant peut s'obtenir de manière analogue à partir de traces pondérées. Pour cela, il est utile de généraliser la notion de trace pondérée aux logarithmes d'opérateurs elliptiques classiques. Suivons la démarche adoptée dans [**6**] et commençons par définir $\mathrm{tr}^Q(\log Q)$ où Q est supposé elliptique admissible, ce qui correspond à une condition d'existence d'une coupure spectrale (il s'agit d'une condition technique qui permet de s'assurer que les logarithmes et les puissances complexes de tels opérateurs ont bien un sens). Un opérateur autoadjoint est admissible, et a fortiori un opérateur autoadjoint positif l'est aussi. La fonction $z \to \mathrm{tr}(\log Q Q^{-z}) = -\frac{d}{dz}\,\mathrm{tr}(Q^{-z}) = -\frac{d}{dz}\zeta_Q(z)$, où on a posé $\zeta_Q(z) := \mathrm{tr}(Q^{-z})$, admet une limite en 0 ce qui permet de définir la trace pondérée $\mathrm{tr}^Q(\log Q) := \lim_{z\to 0} \mathrm{tr}(\log Q Q^{-z})$. Compte tenu du fait que la différence (pondérée par les ordres) de deux logarithmes est un opérateur classique, on peut poser, pour un opérateur elliptique A admissible d'ordre strictement positif,

$$\mathrm{tr}^Q(\log A) := \frac{\mathrm{ord}\,A}{\mathrm{ord}\,Q}\,\mathrm{tr}^Q(\log Q) + \mathrm{tr}^Q\Big(\log A - \frac{\mathrm{ord}\,A}{\mathrm{ord}\,Q}\log Q\Big).$$

La formule d'anomalie (5) s'étend aux logarithmes de la façon suivante [**13**], [**6**] :

$$\begin{aligned}(8)\quad & \mathrm{tr}^{Q_1}(\log A) - \mathrm{tr}^{Q_2}(\log A)\\ &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{res}\left[\left(\log A - \frac{\mathrm{ord}\,A}{\mathrm{ord}\,Q_1}\log Q_1\right)\left(\frac{\log Q_1}{\mathrm{ord}\,Q_1} - \frac{\log Q_2}{\mathrm{ord}\,Q_2}\right)\right]\\ &\qquad - \frac{1}{2}\,\mathrm{res}\left[\left(\log A - \frac{\mathrm{ord}\,A}{\mathrm{ord}\,Q_2}\log Q_2\right)\left(\frac{\log Q_1}{\mathrm{ord}\,Q_1} - \frac{\log Q_2}{\mathrm{ord}\,Q_2}\right)\right]\end{aligned}$$

et donne donc à nouveau lieu à un terme de résidu.

Le *déterminant* ζ se définit alors tout naturellement en remplaçant dans (7) tr par tr^Q :

$$\det{}_\zeta Q := \exp \circ \,\mathrm{tr}^Q \circ \log(Q) = \exp\left(-\zeta_Q'(0)\right). \tag{9}$$

La dépendance en Q de la trace pondérée tr^Q dans le membre de droite de (9) est source de multiples difficultés. Elle donne en particulier lieu à *l'anomalie multiplicative* traduisant le fait que $\det_\zeta(AB) \neq \det_\zeta A \det_\zeta B$, anomalie qui fait l'objet de l'article de Kontsevich et Vishik [**9**] mentionné plus haut, ainsi que de [**13**], [**6**]. Si A et B sont deux opérateurs elliptiques qui commutent et qui sont suffisamment proches (dans un sens spectral que nous éludons ici) d'opérateurs positifs et de plus d'ordres strictement positifs, alors l'anomalie multiplicative

$$F_\zeta(A,B) := \frac{\det_\zeta(AB)}{\det_\zeta(A)\det_\zeta(B)}$$

s'écrit à l'aide de la formule d'anomalie traciale (8) :

$$\begin{aligned} \log F_\zeta(A,B) &= \left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}^{AB}(\log A) - \operatorname{tr}^{A}(\log A)\right) + \left(\frac{1}{2}\operatorname{tr}^{AB}(\log B) - \operatorname{tr}^{B}(\log B)\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{ord} A \cdot \operatorname{ord} B}{\operatorname{ord} A + \operatorname{ord} B} \cdot \operatorname{res}\left(\frac{\log A}{\operatorname{ord} A} - \frac{\log B}{\operatorname{ord} B}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

En particulier, si $A = B$ on obtient $F_\zeta(A,B) = 1$. Cette anomalie multiplicative, s'exprimant comme les précédentes en fonction du résidu de Wodzicki, hérite de la propriété de localité du résidu de Wodzicki.

Ce sont les variations logarithmiques de déterminants qui sont les plus utiles pour les applications physiques. Revenant momentanément à la dimension finie, en dérivant la relation (7) appliquée à une famille différentiable $\{Q_t, t \in [0,1]\}$, on obtient

$$\frac{d}{dt} \log \det Q_t = \operatorname{tr}(Q_t^{-1} \dot{Q}_t),$$

formule que l'on établit en utilisant la cyclicité de la trace tr. Ici et dans ce qui suit, on pose $\dot{Q}_t := \frac{d}{dt} Q_t$. De même en dérivant la relation (9) on obtient :

$$\frac{d}{dt} \log \det_\zeta Q_t = \operatorname{tr}^{Q_t}(Q_t^{-1} \dot{Q}_t),$$

et ce malgré la non cyclicité des traces pondérées. C'est le fait que le poids Q_t commute avec toutes les puissances de Q_t, ce qui combiné avec la propriété de covariance de la trace pondérée permet de conclure.

3. Les déterminants ζ au service de la quantification fonctionnelle

En dimension finie, les déterminants apparaissent naturellement dans le calcul d'intégrales gaussiennes :

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle} dx = (\det Q)^{-1/2},$$

où Q est une matrice symétrique définie positive, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$. Par analogie, on calcule les intégrales gaussiennes de chemins qui apparaissent dans la quantification fonctionnelle (bosonique, le cas fermionique faisant appel à des intégrales de Berezin), en substituant au déterminant ordinaire le déterminant ζ :

$$\int_{\text{configurations } \varphi} e^{-\frac{1}{2}\langle Q\varphi, \varphi\rangle} \mathcal{D}^Q[\varphi] = (\det_\zeta Q)^{-1/2}, \tag{11}$$

Q étant un opérateur elliptique admissible, inversible et d'ordre strictement positif, et $\mathcal{A}(\varphi) := \langle Q\varphi, \varphi\rangle$ correspondant à l'action classique décrivant le système physique dont on veut étudier le comportement quantique. Ces intégrales sur un espace de configurations (typiquement de dimension infinie) d'un système physique sont à comprendre comme des objets formels définis par le membre de droite. Les « mesures de volume » formelles $\mathcal{D}^Q[\varphi]$ –qui sont surtout là pour indiquer qu'on va calquer les procédés de calcul de ces intégrales sur ceux d'intégrales en dimension finie– dépendent a priori du choix de Q et il faudra tenir compte de cette dépendance dans ces calculs. De même que le poids Q avait servi à pondérer des traces de manière à extraire une partie finie d'expressions a priori divergentes, il sert ici à « extraire une partie finie » de ces intégrales de chemin formelles a priori mal définies.

Regardons comment cette dépendance en Q peut influer. A titre comparatif, opérons tout d'abord un changement de variable $\widetilde{x} = Cx$ dans une intégrale gaussienne en dimension finie et appelons J le jacobien de la transformation :

$$
\begin{aligned}
(\det Q)^{-1/2} &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle Q\widetilde{x}, \widetilde{x}\rangle} d\widetilde{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\langle QCx, Cx\rangle} J dx \\
&= J \cdot \det(C^* QC)^{-1/2}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Ceci s'écrit encore

$$
J := \frac{(\det(C^* QC))^{1/2}}{(\det Q)^{1/2}} = \sqrt{\det(C^* C)} = |\det C|.
$$

Par analogie, quitte à remplacer les déterminants ordinaires par des déterminants ζ, on pourrait penser que le module du déterminant jacobien d'une transformation $\widetilde{\varphi} = C\varphi$ dans (11) s'écrit comme quotient de déterminants ζ. Or le même type d'obstacle, source de l'anomalie multiplicative, est ici aussi source de problèmes.

Soit C un opérateur elliptique inversible d'ordre positif (pouvant être nul), C^* son adjoint formel (par rapport à une structure L^2 sur l'espace des sections sur lequel il agit), alors Q ayant été supposé positif (ou « suffisamment proche » d'un positif), C^*QC est un opérateur elliptique positif (ou « suffisamment proche » d'un positif) et d'ordre strictement positif de sorte qu'on peut définir son déterminant ζ sans problème. Un calcul analogue à celui qui précède donnerait le déterminant jacobien,

$$
J_Q := \frac{\det_\zeta(C^* QC)^{1/2}}{(\det_\zeta Q)^{1/2}}.
$$

Or il ne coïncide pas en général avec

$$
\widetilde{J} := \sqrt{\det_\zeta(C^* C)},
$$

ce dernier déterminant n'étant d'ailleurs défini que si C est un opérateur elliptique d'ordre strictement positif, ce qui n'est pas toujours le cas dans les applications, où il peut être d'ordre nul. Ce phénomène résulte de l'anomalie multiplicative (10) par les égalités

$$
J_Q^2 = \frac{\det_\zeta(C^* QC)}{\det_\zeta Q} = \frac{\det_\zeta(QC^* C)}{\det_\zeta Q} = F_\zeta(Q, C^* C)\det_\zeta(C^* C) = F_\zeta(Q, C^* C) \cdot \widetilde{J}^2.
$$

La deuxième égalité s'obtient en vérifiant que la famille $Q_t := Q^t C^* Q^{1-t} C$, $t \in [0,1]$, d'opérateurs elliptiques d'ordre constant qui interpole C^*QC et QC^*C a un déterminant constant, puisque $\frac{d}{dt}\log\det_\zeta Q_t = 0$. La troisième égalité résulte de la définition de l'anomalie multiplicative.

Dans les applications physiques, le déterminant jacobien est souvent défini par J_Q si C est un opérateur de multiplication (par exemple en théorie de jauge), par $\widetilde{J}$ si C est un opérateur elliptique d'ordre strictement positif (par exemple dans le procédé de Faddeev-Popov appliqué aux cordes). Plus précisément, il s'agit là du module d'un déterminant jacobien dont on souhaite étudier aussi les variations de la « phase » si tant est qu'elle puisse être définie.

4. Anomalies traciales et géométrie

Il est utile, pour situer le problème, de revenir avant tout au contexte matriciel $gl_n(\mathbb{C})$ de la section 1 en prenant ici $\mathbb{K} := \mathbb{C}$. Soit $A_t, t \in [0,1]$, un chemin continu tracé dans $GL_n(\mathbb{C})$ reliant $A_0 = \mathrm{Id}$ à $A_1 = A$. Le déterminant s'écrit

$$\det A = \exp\int_0^1 \mathrm{tr}(A_t^{-1}\dot{A}_t)dt,$$

et ceci indépendamment du chemin choisi dans $GL_n(\mathbb{C})$. Ici $\dot{A}_t := \frac{d}{dt}A_t$. Plus généralement, étant données une variété X et une famille de matrices $\{A_x \in GL_n(\mathbb{C}), x \in X\}$, l'expression $\mathrm{tr}(A^{-1}dA)$ définit une 1-forme sur X. Définir la fonction $x \to \det A_x$ revient à résoudre l'équation différentielle en $s \in \Omega^0(X, \mathbb{C}^*)$

$$s^{-1}ds = \mathrm{tr}(A^{-1}dA). \tag{13}$$

La condition d'intégrabilité

$$0 = d\,\mathrm{tr}(A^{-1}dA) = -\,\mathrm{tr}(A^{-1}dAA^{-1}dA)$$

est trivialement vérifiée grâce à la cyclicité de la trace. En effet, étant donnés deux vecteurs U, V tangents à X en un point x,

$$d\,\mathrm{tr}(A^{-1}dA)(U,V) = -\partial\,\mathrm{tr}(A^{-1}dA(U), A^{-1}dA(V)) = 0,$$

où, comme précédemment, $\partial\,\mathrm{tr}$ désigne le cobord de tr.

Dans ce qui suit on interprétera, dans un cadre plus général, $\mathrm{tr}(A^{-1}dA)$ comme une connexion sur un fibré déterminant, sa différentielle extérieure étant sa courbure, et le transport parallèle $\exp\int_c \mathrm{tr}(A^{-1}dA)$ le long d'un lacet c de X comme l'holonomie de la connexion. Remplaçons le groupe des matrices $GL_n(\mathbb{C})$ par l'ensemble $\mathrm{Ell}^*_{\mathrm{ord}>0}(M, E; F)$ des opérateurs pseudodifférentiels elliptiques inversibles classiques agissant des sections $\Gamma(M, E)$ d'un fibré E vers les sections $\Gamma(M, F)$ d'un fibré F, tous deux des fibrés hermitiens de même rang basés sur une variété riemannienne compacte sans bord M. Substituons à l'équation (13) une équation dans laquelle la trace ordinaire a été remplacée par une trace pondérée,

$$s^{-1}ds = \mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA), \tag{14}$$

où $\{A_x \in \mathrm{Ell}^*(M, E; F), x \in X\}$ désigne une famille d'opérateurs elliptiques inversibles, admissibles (avec coupure spectrale commune, une condition technique pour donner un sens aux divers déterminants et traces régularisés dont on aura besoin) et d'ordre constant strictement positif. La condition d'intégrabilité qui s'écrit

$$0 = d\,\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA) = -\,\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dAA^{-1}dA) + [d, \mathrm{tr}^Q](A^{-1}dA)$$

n'est plus trivialement vérifiée, le terme $d\,\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA)$ s'interprétant comme une anomalie traciale. Étant donnés deux de vecteurs U, V tangents à la variété X en un point x :

(15)

$$d\,\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA)(U, V) = -\partial\,\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA(U), A^{-1}dA(V)) + [d, \mathrm{tr}^Q](A^{-1}dA)(U, V),$$

combinaison des anomalies traciales (4) et (6). Si l'équation (14) admet une solution, c'est maintenant d'une solution vectorielle s qu'il s'agit et plus forcément d'une fonction complexe. Celle-ci s'interprète comme section d'un fibré déterminant à la Quillen [**16**] associé à la famille $\{A_x, x \in X\}$; il s'agit d'un fibré en droites de base X que l'on notera $\mathcal{L}_A$. La fonction « module du déterminant des opérateurs A » s'interprète comme une *métrique* sur $\mathcal{L}_A$, introduite par Quillen [**16**],

$$\|\,\mathrm{Det}\,A\|_Q := \sqrt{\det_\zeta(A^*A)} := \det_\zeta |A|.$$

La 1-forme $\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA)$ s'interprète, lorsque $Q := A^*A$, comme une *connexion* sur $\mathcal{L}_A$, introduite par Bismut et Freed [**3**]. Elle est compatible avec la métrique de Quillen puisque sa partie réelle coïncide avec la variation logarithmique de la métrique

$$\text{(16)}\qquad \begin{aligned} \mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA) &= \mathrm{Re}\left(\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA)\right) + i\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA)\right) \\ &= \tfrac{1}{2}d\log\det_\zeta Q + i\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA)\right). \end{aligned}$$

L'obstruction $d\,\mathrm{tr}^Q(A^{-1}dA)$ s'interprète alors comme la *courbure* de la connexion de Bismut-Freed que ceux-ci appellent *anomalie géométrique locale* [**3**]. Elle se réduit dans le cas présent à une anomalie traciale et on a le schéma suivant :

$$\begin{aligned} \text{anomalie géométrique locale} &\longleftrightarrow \text{courbure sur le fibré déterminant} \\ &\longleftrightarrow \text{anomalie traciale} \end{aligned}$$

A cette anomalie locale, s'ajoute une seconde obstruction, une *anomalie géométrique globale* [**19**] mesurée par l'holonomie de la connexion [**3**]. Elle est donnée par le transport parallèle
$\exp\int_c \mathrm{tr}^{A^*A}(A^{-1}dA)$ le long de lacets c de X. Dans le cas où ces deux anomalies géométriques s'annulent, on peut construire une section canonique plate globale du fibré déterminant, dont on se sert alors comme section de référence. A partir d'une section s du fibré déterminant, on obtient alors une « fonction déterminant » comme quotient de cette section par la section de référence.

5. Anomalies en théorie des champs et anomalies traciales

Dans une théorie des champs classique, les trajectoires sont obtenues en minimisant l'action classique donnée par une fonctionnelle sur l'espace des configurations. Celle-ci peut, dans certains cas, être invariante par l'action d'un groupe de transformations agissant sur l'espace des configurations. Le procédé de quantification qui, du point de vue de la quantification fonctionnelle (initiée par Richard Feynman), revient à prendre une « moyenne » sur l'espace des configurations à l'aide de mesures de volume formelles en utilisant des intégrales de chemin du type (11), se fait souvent au prix d'une rupture de cette invariance. On quantifie ce phénomène en introduisant la notion d'*anomalie*, définie (ici encore grossièrement, nous y reviendrons plus tard dans un contexte plus géométrique) comme *« variation logarithmique de déterminants jacobiens de transformations qui laissent invariante l'action classique »* (nous omettrons ici le signe $-$ habituel).

Arrêtons nous tout d'abord au cas (bosonique) d'une action classique $\mathcal{A}$ donnée par la fonctionnelle quadratique $\varphi \to \mathcal{A}(\varphi) := \langle A\varphi, \varphi\rangle$, $A \in C\ell(M, E)$ étant un opérateur différentiel elliptique inversible autoadjoint. Alors le déterminant ζ (étendu aux opérateurs autoadjoints non positifs) permet de définir la fonction de partition correspondante, en posant comme en (11),

$$Z \text{ « := » } \int_{\text{configurations } \varphi} e^{-\frac{1}{2}\langle A\varphi,\varphi\rangle}\mathcal{D}^A[\varphi] := (\operatorname{det}_{\zeta} A)^{-1/2}.$$

Avec les notations de la section 3, une famille de transformations $C_x, x \in X$, sur l'espace des configurations, indexée par une variété X (on supposera les transformations C_x elliptiques), induit une famille de jacobiens $\{J_x, x \in X\}$, et la 1-forme sur X donnée par une variation logarithmique,

$$J_x^{-1}\, dJ_x := \det{}_{\zeta}(A_x)^{-1}\, d\left(\det{}_{\zeta}(A_x)\right),$$

où on a posé $A_x := C_x^* Q C_x$ (ou $A_x := C_x^* C_x$ selon les cas), peut s'interpréter comme une anomalie. Lorsque $A_x := C_x^* A C_x$, Q_x est vue comme une déformation de Q, et l'anomalie peut s'écrire comme (l'opposé de la) variation dW de l'*action effective* $W(x)$ définie par

$$e^{-W(x)} := \int_{\text{configurations } \varphi} e^{-\frac{1}{2}\langle A_x\varphi,\varphi\rangle}\mathcal{D}^A[\varphi] = (\operatorname{det}_{\zeta} A_x)^{-1/2}.$$

Dans le cas fermionique, l'action est donnée par $\mathcal{A}(\psi, \overline{\psi}) = \langle B\psi, \overline{\psi}\rangle$, où $\psi \in \Gamma(M, E)$ et $\overline{\psi} \in \Gamma(M, F)$ sont des sections des fibrés E et F respectivement, et où $B \in C\ell(M, E; F)$ est un opérateur elliptique. L'intégration gaussienne bosonique définissant la fonction de partition est alors remplacée par une intégration gaussienne fermionique, du type Berezin,

$$e^{-W(x)} := \int_{\text{configurations } \psi, \overline{\psi}} e^{-\langle B_x\psi,\overline{\psi}\rangle}\mathcal{D}^B[\psi]\mathcal{D}^B[\overline{\psi}] = \text{« } \operatorname{det}_{\zeta} B_x \text{ »}.$$

Dans ce cas, la définition du déterminant « $\det_\zeta B_x$ » pose problème puisque B_x envoie les sections de E sur les sections de F ; on l'interprète, comme dans la section 4, comme une section d'un fibré déterminant. L'opérateur $B_x^* B_x \in \mathcal{C}\ell(M, E)$ étant autoadjoint positif, s'il est elliptique d'ordre strictement positif, on peut définir son déterminant ζ de sorte que le module du déterminant de B_x peut être défini par $|\det_\zeta B_x| := \sqrt{\det_\zeta(B_x^* B_x)}$. C'est la « phase » $\frac{\text{« } \det_\zeta B_x \text{ »}}{|\det_\zeta B_x|}$ du déterminant de B qui pose problème et c'est en général des variations logarithmiques de la phase que surgissent des anomalies en théorie des champs, qui sont de type *chiral* dans ce cadre fermionique.

Ces anomalies géométriques constituent autant d'obstacles à construire une théorie quantique invariante par un certain groupe de symétries sous l'action duquel l'action classique $\langle B_x \psi, \overline{\psi} \rangle$ serait invariante. Typiquement, le groupe de symétries agit sur $\langle B_x \psi, \overline{\psi} \rangle$ par une action sur la famille d'opérateurs B_x induite par une action sur X. Cependant, la fonction de partition correspondante donnée par « $\det_\zeta(B_x)$ » n'a a priori aucune raison de rester invariante par l'action du groupe. Sa variation logarithmique dans la direction de l'algèbre de Lie du groupe de symétries ne s'annule pas en général, ni même sa « deuxième variation logarithmique » ; autrement dit, ni la connexion sur le fibré déterminant $\mathcal{L}$ associé à la famille $\{B_x, x \in X\}$, ni même la courbure de cette dernière ne s'annulent dans les directions tangentes à l'action du groupe [**8**].

C'est encore par une anomalie traciale que peut se mesurer l'obstruction correspondante concernant la courbure. En effet, $\mathcal{G}$ étant un groupe de Lie (typiquement un groupe de jauge de dimension infinie) agissant sur la variété X, x étant un point de X, désignons par

$$\begin{aligned} \theta_x : \mathcal{G} &\longrightarrow X \\ g &\longmapsto x \cdot g \end{aligned} \tag{17}$$

l'application induite par cette action, qui envoie un élément du groupe dans l'orbite de x sous l'action de ce groupe. La 1-forme $\mathrm{tr}^Q(A^{-1} dA)$ sur X, correspondant à la connexion de Bismut-Freed, induit une 1-forme $\theta^* \left(\mathrm{tr}^Q(A^{-1} dA)\right)$ sur $\mathcal{G}$ par tiré en arrière sous l'action de θ. D'après (15), sa différentielle extérieure s'interprète comme une anomalie traciale : pour tous u et v éléments de l'algèbre de Lie de $\mathcal{G}$,

$$\theta^* \left(\mathrm{tr}^Q(A^{-1} dA)\right)(u, v) = -\partial\, \mathrm{tr}^Q(A^{-1} dA(U), A^{-1} dA(V)) + [d, \mathrm{tr}^Q](A^{-1} dA)(U, V),$$

où on a posé $U = d\theta(u)$ et $V = d\theta(v)$. Cette anomalie traciale constitue l'une des obstructions au fait que la connexion de Bismut-Freed puisse induire une connexion sur le fibré déterminant quotient : $\mathcal{L}/\mathcal{G} \to X/\mathcal{G}$. Elle peut aussi s'interpréter comme une obstruction aux relations de compatibilité de Wess-Zumino (Wess-Zumino consistency relations) dans l'approche BRS (Becchi-Rouet-Stora) des anomalies de jauge.

Cette discussion peut se résumer par le schéma de correspondances suivant :

(tiré en arrière sur le groupe de jauge de l') anomalie géométrique locale

$\longleftrightarrow$ obstructions aux relations de compatiblité de Wess-Zumino

$\longleftrightarrow$ (tiré en arrière sur le groupe de jauge de la) courbure sur le fibré déterminant

$\longleftrightarrow$ anomalie traciale.

Dans ce qui précède, la variété M et les fibrés E et F basés sur M sont fixes, ce qui correspond typiquement au cadre géométrique des *anomalies de jauge*. Le cas des *anomalies gravitationnelles* nécessitant non plus une variété et un fibré vectoriel fixes mais une famille de variétés $\{M_x, x \in X\}$ et une famille de fibrés vectoriels $\{E_x, x \in X\}$ et $\{F_x, x \in X\}$ basés sur les M_x étant plus compliqué, nous n'en dirons ici que quelques mots, en laissant de côté la description précise (voir [**3**]) du cadre géométrique correspondant. Quitte à remplacer dans les expressions précédentes, la différentielle extérieure d par une dérivation covariante ∇ qui tient compte de la géométrie de la fibration en variétés sous-jacente, la connexion de Bismut-Freed s'écrit $\mathrm{tr}^Q(A^{-1}[\nabla, A])$ où l'on a posé $[\nabla, A] := \nabla A - A\nabla$. Quant à l'*anomalie chirale (géométrique) locale*, qui correspond à la courbure sur le fibré déterminant $\mathcal{L}_A$ associé à la famille $\{A_x, x \in X\}$ agissant sur les sections des fibrés $E_x \to M_x$ et à valeurs dans les sections des fibrés $F_x \to M_x$, en posant $Q_x = A_x^* A_x$ où A_x^* est l'adjoint (formel) de A_x, elle s'écrit [**15**] :

$$\begin{aligned} d\,\mathrm{tr}^Q(A^{-1}[\nabla, A]) &= \frac{1}{2} d\,\mathrm{str}^Q(Q^{-1}[\nabla^2, Q]) \\ &= -\,\mathrm{str}^Q(\nabla^2) + \frac{1}{2}\left[\nabla, \mathrm{str}^Q\right](Q^{-1}[\nabla, Q]) \\ &\qquad - \frac{1}{2}\,\mathrm{str}^Q(Q^{-1}[\nabla, Q]Q^{-1}[\nabla, Q]) \\ &= -\,\mathrm{str}^Q(\nabla^2) + \text{ anomalie traciale.} \end{aligned} \tag{18}$$

Si le terme $\mathrm{str}^Q(\nabla^2)$ est local, l'anomalie traciale étant elle aussi locale comme résidu de Wodzicki, on peut s'attendre à une expression locale de la courbure. Dans le cas d'une famille d'opérateurs de Dirac sur des variétés spin, Bismut et Freed [**3**] ont exprimé cette courbure comme (limite du) terme de second degré du caractère de Chern d'une famille de superconnexions [**17**] construites à partir de ∇ et de la famille d'opérateurs. Le théorème d'indice des familles donne alors une expression locale explicite de cette courbure en fonction de la géométrie sous-jacente ; cette anomalie géométrique locale correspond à une anomalie qui sous-tend la quantification des cordes [**8**]. Ici la géométrie sous-jacente se mêle donc (sous la forme du terme $\mathrm{str}^Q(\nabla^2)$) à l'anomalie traciale pour donner une anomalie chirale.

6. Conclusion

Les anomalies en théorie des champs sont donc intimement liées,

– d'une part, à la géométrie des familles d'opérateurs elliptiques (typiquement des opérateurs de Dirac) et plus précisément à la géométrie des fibrés déterminants associés à de telles familles d'opérateurs ;

– d'autre part, aux « anomalies traciales » inhérentes au fait que l'on traite la dimension infinie comme un prolongement de la dimension finie, tant au niveau des traces qu'au niveau des déterminants et donc des intégrales de chemins. Traiter les anomalies de jauge chirales de ce point de vue (ce qui est quelque peu inhabituel) permet d'éclaircir les liens entre les anomalies chirales et les anomalies traciales [**4**], liens qui sont moins directement visibles dans le cas des anomalies gravitationnelles, comme nous avons tenté de l'expliquer dans le présent article.

Il ressort de cette analyse qu'une manière de contourner un certain nombre d'anomalies en théorie des champs serait d'éviter l'utilisation de traces régularisées sources d'anomalies traciales. On pourrait substituer au déterminant ζ un déterminant exotique, introduit par Wodzicki $\det_{\mathrm{res}} := \exp \circ \mathrm{res} \circ \log$, pour donner un sens à certaines intégrales de chemins du type (11). Cependant, puisque le résidu s'annule sur les opérateurs de rang fini, remplacer les traces régularisées par le résidu de Wodzicki se ferait au prix de perdre de vue la dimension finie et ne retiendrait de la théorie que des divergences, celles-la même que l'on s'évertue à éliminer en théorie des champs !

Appendice : Opérateurs pseudodifférentiels

Un outil important utilisé dans cette approche est la notion d'opérateur pseudodifférentiel. Pour définir cette classe d'opérateurs, il est utile de passer par leur transformée de Fourier, ce qui conduit à la notion de symbole. Regardons tout d'abord le cas d'un opérateur différentiel familier, le laplacien sur $\mathbb{R}^n$, défini par

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Étant donnée une fonction de Schwartz (ou encore $\mathcal{C}^\infty$ à support compact) sur $\mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{F}u(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}u(x)dx$ sa transformée de Fourier. Un calcul simple montre que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{F}(\Delta u)(\xi) = \Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\Big) \cdot \mathcal{F}(u)(\xi).$$

La fonction $\sigma_\Delta(\xi) = \|\xi\|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ est appelé le *symbole de* Δ. Les opérateurs différentiels ont des symboles donnés par des fonctions polynomiales. En élargissant cette classe de symboles de manière à y inclure, entre autres, des fractions rationnelles, on peut construire une classe plus large d'opérateurs appelée opérateurs pseudodifférentiels.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'ensemble $S^\alpha(U)$ des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$

$$\begin{aligned} U \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \xi) &\longmapsto \sigma(x, \xi), \end{aligned}$$

à support compact en x et vérifiant la propriété suivante : étant donnés deux multiindices $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^d$ et $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathbb{N}^n$, il existe une constante $C_{\gamma,\delta}$ telle que

$$|D_x^\gamma D_\xi^\delta \sigma(x, \xi)| \leq C_{\gamma,\delta}(1 + \|\xi\|)^{\alpha - |\delta|} \quad \forall x \in U, \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

où, comme précédemment, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Remarquons que cette condition impose aux dérivées $D_\xi^\delta \sigma(x, \xi)$ un certain type de comportement asymptotique quand $\|\xi\| \to \infty$. Elle est en particulier vérifiée lorsque σ est un symbole polynomial. Un élément de $S^\alpha(U)$ est appelé *symbole d'ordre* α. Un symbole d'ordre α est dit *classique* s'il existe $\sigma_{\alpha-j} \in S^{\alpha-j}(U)$, $j \in \mathbb{N}$, qui sont positivement homogènes, i.e.

$$\sigma_{\alpha-j}(x, t\xi) = t^{\alpha-j}\sigma_{\alpha-j}(x, \xi) \quad \forall t > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

et tels que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sigma(x, \xi) - \sum_{j=0}^{N} \sigma_{\alpha-j}(x, \xi) \in S^{\alpha-N-1}(U).$$

A un symbole $\sigma \in S^\alpha(U)$, on associe un opérateur *pseudodifférentiel*

$$\begin{aligned} A : C_c^\infty(U) &\longrightarrow \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \\ u &\longmapsto (x \to Au(x)), \end{aligned}$$

défini par $Au(x) = \mathcal{F}^{-1}(\sigma(x, \cdot)\mathcal{F}(u))$. Ici, $\mathcal{C}_c^\infty(U)$ désigne l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U. L'ordre de l'opérateur est donné par l'ordre de son symbole et l'opérateur est dit *classique* lorsque le symbole correspondant est classique.

Reprenons l'exemple précédent avec $U = \mathbb{R}^n$. Le laplacien $\Delta := -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ est un opérateur différentiel (et donc pseudodifférentiel) d'ordre 2 et de symbole σ_Δ. On peut, à partir de l'opérateur Δ, construire d'autres opérateurs, par exemple $(\Delta + 1)^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, qui est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre $-2k$ et de symbole $\sigma_{(\Delta+1)^{-k}} = 1/(1 + \|\xi\|^2)^k$.

La notion d'opérateur pseudodifférentiel se généralise à des variétés compactes sans bord en utilisant une partition de l'unité. En autorisant les symboles à valeurs matricielles, on peut aussi définir des opérateurs pseudodifférentiels agissant sur des sections de fibrés vectoriels basés sur une variété compacte sans bord.

Remerciements

Je remercie beaucoup Alexander Cardona et Catherine Ducourtioux, dont les commentaires à la lecture d'une première version de ce texte m'ont été fort utiles. Un grand merci aussi à Daniel Bennequin, dont les critiques m'ont permis d'éclaircir certains points et d'améliorer la présentation de certains aspects de cet article. Je suis par ailleurs très reconnaissante à Yvette Perrin d'avoir fait une relecture critique du manuscrit et suggéré certaines améliorations. Marie-Paule Bressoulaly m'a apporté une aide précieuse en tapant une première version de ce texte et je l'en remercie chaleureusement.

Références

[1] R. Baadhio, *Quantum Topology and Global Anomalies*, Adv. Ser. in Math. Phys. **23**, World Scientific, 1996.

[2] R. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, Oxford University Press, 1996.

[3] J.M. Bismut, D. Freed, *The analysis of elliptic families I and II*, Comm. Math. Phys. **106**, 159-176, et Comm. Math. Phys. **107**, 103-163 (1986).

[4] A. Cardona, C. Ducourtioux, S. Paycha, *From tracial anomalies to anomalies in quantum field theory*, à paraître dans Communications in Mathematical Physics.

[5] A. Cardona, C. Ducourtioux, J. P. Magnot, S. Paycha, *Weighted traces on algebras of pseudodifferential operators and geometry of loop groups*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. and Relat. Top. **5**, 503-540 (2002).

[6] C. Ducourtioux, *Weighted traces on pseudo-differential operators and associated determinants*, Thèse de Doctorat de l'Université Blaise Pascal, 2001.

[7] P. Deligne, P. Etinghof, D. Freed, L. Jeffrey, D. Kazhdan, J. Morgan, D. Morrison, E. Witten, *Quantum Fields and Strings : A Course for Mathematicians*, American Mathematical Society, 1999.

[8] D. Freed, *Determinants, torsion, and strings*, Comm. Math. Phys. **107**, 487-525 (1987).

[9] M. Kontsevich, S. Vishik, *Geometry of determinants of elliptic operators*, Func. Anal. on the Eve of the XXI Century, Vol. I, Progress in Mathematics **131**, 173-197 (1994).

[10] J. Mickelsson, *Wodzicki residue and anomalies on current algebras* in *Integrable Models and Strings*, A. Alekseer ed., Lecture Notes in Physics **436**, Springer, 1994.

[11] R. Melrose and V. Nistor, *Homology of pseudo-differential operators I. Manifolds with boundary*, Preprint funct.an 96 06 005, juin 99.

[12] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics, 1990.

[13] K. Okikiolu, *The multiplicative anomaly for determinants of elliptic operators*, Duke Math. Journ. **79**, 723-750 (1995) ; K. Okikiolu, *The Campbell-Hausdorff theorem for elliptic operators and a related trace formula*, Duke Math. Journ. **79**, 687-722 (1995).

[14] S. Paycha, *Renormalized traces as a looking glass into infinite dimensional geometry*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. and Relat. Top. **4**, 221-266 (2001).

[15] S. Paycha, S. Rosenberg, *Curvature on determinant bundles and first Chern forms*, Journ. Geom. Phys. **45**, 393-429 (2003).

[16] D. Quillen, *Determinants of Cauchy-Riemann operators over a Riemann surface,* Funktsional Anal. i Prilozhen. **19**, 37-41 (1985).

[17] D. Quillen, *Superconnections and the Chern character*, Topology **24**, 89-95 (1985).

[18] A.O. Radul, *Lie algebras of differential operators, their central extensions and W-algebras,* Funct. Anal. Appl. **25**, 25-39 (1992).

[19] E. Witten, *Global gravitational anomalies*, Comm. Math. Phys. **100**, 197-229 (1985).

[20] M. Wodzicki,*Non commutative residue*, in Lecture Notes in Math. **1283**, Springer Verlag, 1987.

Sylvie Paycha

Département de Mathématiques Appliquées, Complexe universitaire des Cézeaux,
Université Blaise Pascal, 63177 Aubière cedex, France.

E-mail : `Sylvie.Paycha@math.univ-bpclermont.fr`

à propos de femmes

ACCUEIL À LA MAIRIE DE NANTES

Danielle Largillière

Vendredi 9 novembre 2001

Mesdames, Messieurs, Cher(e)s ami(e)s,

C'est un plaisir pour moi de vous accueillir ici à Nantes et à l'Hôtel de Ville au nom de Monsieur Jean-Marc AYRAULT, Député-Maire de Nantes, en compagnie de Madame GUIBERT Conseillère Municipale, déléguée aux Droits des Femmes.

Nous sommes fier(e)s que l'Association nationale « Femmes et Mathématiques » (présidée actuellement par Madame Christine CHARRETTON) créée en 1987 et qui, une fois par an, tient une de ses Assemblées générales en région, se réunisse cette fois à Nantes à l'initiative de Madame Anne-Marie CHARBONNEL, Maître de Conférences à l'Université de Nantes et de Madame Colette ANNÉ chargée de recherches à l'UMR 6629 du C.N.R.S..

Nous sommes fier(e)s que cette association qui compte environ 150 membres : mathématiciennes, chercheuses, professeurs de mathématiques dans l'enseignement secondaire et dans les classes préparatoires, que cette association qui fait partie d'un réseau européen et mondial vienne à la fois débattre autour d'exposés mathématiques de haut niveau, tenir son Assemblée Générale et appuyer la Table Ronde de demain sur le thème « Femmes dans les écoles d'ingénieurs ». Il y a encore bien des préjugés, des stéréotypes à vaincre, puisqu'elles n'y sont que 17%.

Vous œuvrez pour la promotion des femmes dans les milieux scientifiques et techniques, vous encouragez la présence des jeunes filles dans les études scientifiques et techniques, vous êtes un lieu de rencontres, un lieu d'échanges, un « lieu ressources » sur le thème « Femmes et Mathématiques ». Certaines d'entre vous et moi, nous nous connaissons depuis longtemps puisque, Déléguée Régionale aux Droits des Femmes entre 1991 et 1994, j'ai organisé ici plusieurs fois, à l'échelle de la Région des Pays de la Loire, une visite des lieux de formations supérieures scientifiques et techniques : IUT, Universités et Grandes Ecoles pour des jeunes filles de l'enseignement public et privé dans les 5 départements. Et puis, le Prix de la Vocation Scientifique et Technique organisé aussi chaque année par la Délégation Régionale aux Droits des Femmes.

A l'époque, je ne connaissais pas beaucoup de femmes scientifiques, je connaissais Emilie, marquise du Châtelet, la tendre amie de Voltaire, certes, mais aussi mathématicienne et physicienne qui traduisit les « Principes mathématiques » de Newton.

Je connaissais Sophie Germain et Emily Noether inventrice de l'algèbre moderne, mais grâce à vous et à Madame Colette ANNÉ qui m'a transmis un article exhaustif de la « Gazette des mathématiciens », ma culture s'est considérablement élargie.

Nantes s'intéresse tout particulièrement à la promotion des femmes dans tous les aspects de la vie sociale, comme en témoigne l'existence depuis près de 10 ans, d'un lieu unique en France, l'Espace Simone de Beauvoir, qui regroupe 34 associations et œuvre pour l'égalité, l'autonomie et la dignité des femmes.

Dans ces lieux, je ne vous rappellerai pas que cet édifice a accueilli Benjamin Franklin venu demander l'appui matériel des édiles nantais en faveur de la Révolution américaine, je ne vous rappellerai pas l'Edit de Nantes et la décisive « bataille de Nantes » pendant la Révolution.

Je vous parlerai de quelques nantaises parmi d'autres :

– Anne de Bretagne qui a légué son cœur à la capitale de son Duché,

– Yvonne Pouzin-Malègue, née à Nantes à la fin du 19è siècle qui fut l'une des premières Internes des Hôpitaux de Paris et la première femme phtisiologue des Hôpitaux de Nantes,

Je vous parlerai des femmes corsaires, d'Elisa Mercœur, une poétesse prodige disparue en pleine jeunesse, je vous parlerai d'Isabelle Utile pâtissière et habile commerçante qui avec son mari Romain Lefèvre, tous deux émigrés de Champagne, vinrent s'installer à Nantes et y firent naître la grande marque LU, de Josette Bocq et Madeleine Hervé résistantes.

J'évoquerai aussi Floresca Leconte une saint-simonienne parisienne, amie d'Elisa Lemonnier qui vint s'établir à Nantes à l'occasion de son mariage sur le tard avec un médecin ophtalmologue célèbre à Nantes, en même temps homme politique, le Docteur Ange Guépin. Ils créèrent à Nantes vers 1870 avec d'autres progressistes l'enseignement professionnel laïque pour les jeunes filles et l'Ecole Guépin servit de terreau à la création de l'enseignement secondaire.

J'allais oublier Lola, l'héroïne de l'œuvre cinématographique de Jacques Demy, qui n'a jamais cessé de faire rêver !

Pour finir, en même temps que je vous salue et vous souhaite bon travail, je voudrais rendre hommage à la belle notion mathématique de « parité » qui a changé un grand nombre de conseils municipaux dans la France entière avec la loi du 6 juin 2000. Pour les femmes, ce n'est pas encore l'égalité en termes de responsabilités mais la parité c'est déjà une petite révolution.

Danielle Largillière
Mairie de Nantes.

HUGUETTE DELAVAULT
1924–2003

Danièle Gondard-Cozette

Portrait d'Huguette en 2000

Huguette Delavault est décédée, le 2 avril 2003, à l'âge de 79 ans. Sa disparition laisse un vide immense dans tous les organismes, associations et réseaux qui ont, ces dernières années, œuvré pour la parité et en particulier pour développer et améliorer la place et le rôle des femmes en sciences et en technologie.

Sa disparition a aussi profondément touché toutes celles et tous ceux qui ont travaillé avec elle, que ce soit dans le passé ou très récemment.

Je ne connaissais Huguette que depuis ce jour de mars 1991 où l'association *femmes et mathématiques* m'avait envoyée représenter l'association à la journée sur « La formation du personnel de l'enseignement secondaire à l'égalité des chances entre filles et garçons ». J'ai commencé à travailler avec elle quatre ans plus tard, lorsqu'elle souhaita me confier la commission des bourses de l'Association française des femmes diplômées des universités (Affdu). Quand en décembre 2001, j'appris qu'elle était gravement malade, je compris combien je m'étais attachée à Huguette lors de ces années de travail pour l'Affdu ; je lui rendis souvent visite et nous sommes devenues amies.

Je garde un souvenir ému de nos entretiens chez elle, dans cet appartement plein de livres et de disques et décoré des nombreux et beaux tableaux réalisés par son grand-oncle Monsieur Furcy de Lavault. Nous parlions bien sûr de l'Affdu et elle me conseillait utilement sur ce que je devais faire ou ne pas faire. Mais nous parlions aussi de sa vie, de la mienne, de nos anciens collègues qui furent parfois les mêmes ; ces conversations étaient gaies, et lorsque je la quittais, la maladie était oubliée.

En fait, j'avais déjà rencontré Huguette Delavault deux fois avant de la connaître. Elle fut en effet membre du jury du concours d'entrée à l'École normale supérieure de Fontenay-aux-Roses de 1960 à 1966 et présida ce jury de 1975 à 1980 ; en 1966, j'eus un oral de mathématiques avec Huguette et j'échouais sur la petite question simple qu'elle me posa en fin d'oral ! En 1969, je me retrouvais en face d'elle à l'oral de l'agrégation - Huguette fut membre du jury de 1967 à 1970 - et aiguillonnée par l'échec précédent je fis un exposé brillant sur la notion d'idéal ... Huguette a donc influé sur le cours de ma vie de mathématicienne et pas seulement sur mon engagement associatif.

Nombreux sont celles et ceux dont l'existence a ainsi été marquée par leur rencontre avec Huguette Delavault, et certains sont venus en témoigner le 3 juin 2003 à Reid Hall, rue de Chevreuse à Paris, siège de l'Affdu. Un hommage solennel a alors été rendu à Huguette par ses camarades de promotion, par ses collègues, par ses amies et amis, par toutes celles et par tous ceux qui l'ont connue durant sa vie exemplaire, dans laquelle les activités scientifiques, pédagogiques et associatives ainsi que la défense des intérêts des femmes ont tenu une si large place.

Toutes les interventions lors de cet hommage ont mis en évidence l'extraordinaire capacité à mobiliser des équipes et des énergies d'Huguette. Elles ont aussi rappelé ses qualités d'exigence et de rigueur intellectuelle, sa générosité et sa sensibilité dissimulées par une grande réserve. Elles ont enfin fait l'éloge de son courage et de sa ténacité. Les textes des interventions et messages délivrés lors de cet hommage figureront dans le numéro 205 de la revue Diplômées éditée par l'Affdu.

Huguette Delavault est née à Andilly (Charente-Maritime) en 1924, elle était le troisième et dernier enfant, et la seule fille, d'un couple d'instituteurs. Elle fut d'abord élève de l'école normale d'institutrices de La Rochelle de 1940 à 1943, puis de l'École normale supérieure de Fontenay-aux-Roses de 1946 à 1949. Elle obtint l'agrégation de mathématiques en 1952, après une interruption d'études pour raisons de santé ; elle avait en effet contracté la tuberculose, maladie qui lui avait déjà ravi sa mère et l'un de ses frères.

Elle a soutenu son doctorat d'État ès sciences mathématiques à l'Université de Paris, le 30 novembre 1957, devant un jury composé de Messieurs Villat et Pérès et de Madame Dubreil-Jacotin. Le sujet de sa thèse était *« Application de la transformation de Laplace et de la transformation de Hankel à la détermination de solutions de l'équation de la chaleur et des équations de Maxwell en coordonnées cylindriques »*. Cette thèse a été publiée intégralement [3] et a fait l'objet d'un article [4].

N'étant pas spécialiste du sujet, je ne retiendrai de cette thèse que deux choses : la dédicace faite à son directeur de thèse Henri Villat *« qui à l'École Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses, comme au CNRS, m'a éclairée et aidée de toute sa science, qui, pas à pas, a guidé mon travail avec une constante sollicitude, qui, peut-être même, a orienté ma vie en m'apprenant que la vraie culture ne consiste pas seulement à résoudre un problème de mathématiques, si difficile soit-il, mais encore à aimer la musique et la poésie, et tout ce qui honore l'esprit et le cœur de l'homme, »* où l'on devine déjà la générosité et l'ouverture d'esprit si caractéristiques d'Huguette ; et le fait que son domaine de recherche, la physique mathématique, lui a certainement donné, dès le début, son aptitude à travailler en relation avec des chercheurs d'autres disciplines, des physiciens à cette époque, des sociologues et des historiens ou des juristes plus tard.

Les mathématiciennes à l'ENS Fontenay-aux-Roses en 1949 ; Huguette Delavault est la seconde à partir de la droite ; le professeur de mathématiques est Monsieur Perrichet.

Mais il est aussi intéressant de regarder « à la manière d'Huguette sociologue » l'une des premières pages de la thèse. En 1957 la liste des professeurs de la Faculté des Sciences de Paris tenait sur une page toutes disciplines confondues. Il y en avait 131 dont 9 femmes ; parmi les hommes, 99 étaient titulaires de leur chaire, alors que 3 femmes seulement l'étaient. La situation est donc un peu meilleure aujourd'hui, mais des disparités importantes subsistent, notamment en mathématiques, l'évolution vers la parité se fait beaucoup trop lentement.

Huguette Delavault fut d'abord chercheuse au CNRS de 1952 à 1958 ; durant cette période et les quelques années qui suivirent, elle réalisa l'essentiel de son œuvre mathématique dont le dernier travail est un mémoire sur *les transformations intégrales à plusieurs variables et leurs applications.*

Elle fut ensuite enseignante-chercheuse à la faculté des sciences de Rennes de 1958 à 1970. Elle s'y investit énormément dans l'enseignement des mathématiques ; elle rédigea un cours « Techniques Mathématiques de la Physique », d'une grande utilité pour les physiciens, prit la direction de l'IPES (Institut de préparation à l'enseignement secondaire), puis celle du Centre pédagogique régional pour les mathématiques et la physique, ce qui lui donna plus tard l'opportunité d'initier des projets de coopération avec l'Afrique. C'est encore à la faculté des sciences de Rennes qu'elle est nommée professeure des Universités en 1962 et professeurE à titre personnel en 1963.

Chargée dès 1969 d'une mission de coordination des actions de rénovation de l'enseignement des mathématiques en Afrique noire francophone et à Madagascar par le ministère de la Coopération, elle fut plus tard à l'origine d'une convention – entre l'École normale supérieure de Fontenay-aux-Roses et l'Institut de mathématiques et de sciences physique (IMP) de l'Université de Ouagadougou (Haute-Volta / Burkina Faso) – qui permettait des échanges d'étudiants et d'enseignants. A ce titre elle effectua de nombreuses missions en Afrique et organisa maintes formations pour les enseignants africains et les coopérants. Elle gardera un profond attachement pour l'Afrique et suivra le devenir des contrats et projets jusqu'à la fin de sa vie.

Huguette à Nabadji-Civol (Sénégal)

Professeure à l'École nationale supérieure d'électronique et d'électromécanique de Caen jusqu'en 1984, Huguette Delavault fut aussi détachée de 1976 à 1980 comme directrice adjointe de l'École normale supérieure de Fontenay-aux-Roses.

C'est à cette époque que se confirma sa vocation à défendre la cause des femmes, notamment dans le domaine scientifique. Consciente du « plafond de verre qui limite les carrières universitaires des femmes »– elle alla même jusqu'à dire lors d'un colloque à Bruxelles en 1998 *« J'ai été nommée professeur, peut-être parce que c'était une période d'expansion de l'enseignement supérieur et qu'il n'y avait pas assez d'hommes pour le nombre de postes ! »* . Elle vécut le drame du premier concours d'entrée mixte à l'École normale supérieure de Fontenay-aux-Roses en 1981 : en mathématiques une seule femme est admise (sur dix admis), aucune ne l'est à l'École normale supérieure de Saint-Cloud. Ce désastre annoncé ne fut que la répétition de celui du premier concours mixte de l'agrégation de mathématiques en 1976.

Déjà impliquée dans des actions en faveur de la parité hommes-femmes, Huguette s'engagea alors dans la recherche sociologique pour essayer de comprendre les origines du problème et tenter de proposer des solutions pour y remédier.

Huguette Delavault participa activement aux réunions qui aboutirent à la création, en 1987, de l'association *femmes et mathématiques*. Ses activités au sein de notre association ne représentent qu'une partie de son engagement associatif.

Huguette fut en effet d'abord secrétaire et trésorière, de 1973 à 1976, de l'Association des anciennes élèves de l'École normale supérieure de Fontenay-aux-Roses, qu'elle présida ensuite de 1985 à 1988.

Elle adhéra à l'Association française des femmes diplômées des universités (Affdu) en 1977, entra au conseil d'administration en 1983, présida l'Affdu en 1984 et 1985, puis de 1988 à 1994. L'Affdu, association créée en 1920 dont l'objectif principal est la promotion des femmes par l'éducation, est affiliée à la Fédération internationale des femmes diplômées des universités (Fifdu), fédération reconnue comme organisation non gouvernementale (ONG) auprès de l'ONU. L'Affdu fut certainement l'association pour laquelle Huguette travailla le plus, et ce jusqu'à ses derniers jours.

L'intérêt qu'Huguette portait à la fois à la formation, aux femmes et à l'Afrique trouva une pleine réalisation dans le projet « 1000 femmes à former » ; ce programme, créé et géré par elle au nom de l'Affdu, concernait le village de Nabadji-Civol au Sénégal, et visait à former les fillettes et les femmes tant sur le plan général qu'à la gestion agricole. Le projet fut une réussite et se poursuit maintenant de manière autonome ; il y a actuellement dix classes à l'école de Nabaji-Civol, et un collège sera ouvert à la prochaine rentrée.

Huguette représenta l'Affdu dans le réseau d'associations *Demain la parité*, parmi lesquelles figurent en particulier l'Association catholique générale féminine (ACGF), l'Affdu, Elles aussi, l'Union féminine civique et sociale (UFCS), l'Union professionnelle féminine (UPF) et le Conseil européen des fédérations Wizo (CEFW). Ce réseau a été mis en place en 1994 par Françoise

Gaspard et Colette Kreder afin de promouvoir une stratégie commune en matière d'égalité des chances dans la prise de décision.

En 2000, treize ans après avoir participé à la création de l'association *femmes et mathématiques*, elle fut avec Claudine Hermann, Françoise Gaspard, Colette Kreder, Françoise Cyrot-Lackmann, et l'association *femmes et mathématiques,* membre fondatrice de l'association « Femmes et sciences », dont les objectifs sont les suivants : renforcer la position des femmes exerçant des carrières scientifiques et techniques dans les secteurs publics et privés, promouvoir l'image des sciences chez les femmes et l'image des femmes dans les sciences et inciter les jeunes filles à s'engager dans les carrières scientifiques et techniques. Elle a été aussi à l'origine de l'idée du colloque « Femmes dans les métiers scientifiques et techniques » organisé le 17 novembre 2001 pour faire connaître l'association « Femmes et Sciences ». Elle a été la première trésorière de cette association, et elle a porté la partie financière du colloque, tâche extrêmement complexe et lourde car s'inscrivant aussi dans le cadre d'une réunion européenne de travail le 16 novembre, où dix pays étaient représentés. Son rôle dans l'organisation et la réussite de la réunion européenne et du colloque de novembre 2001 a été essentiel.

Depuis 1990, Huguette Delavault a réalisé par ses travaux, publications et conférences, une œuvre importante et novatrice de recherche scientifique en sociologie. Elle a notamment écrit en 2000, en collaboration, deux rapports commandés par Francine Demichel, directrice de l'Enseignement supérieur : l'un sur les femmes dans les filières de l'enseignement supérieur [h], l'autre sur les enseignantes-chercheuses à l'Université [j]. L'année 2002 vit l'achèvement de cette œuvre avec la publication du livre [n] : *Les Enseignantes-chercheuses à l'Université : demain la parité ?*

Huguette fit sa dernière intervention publique les 9 et 10 novembre 2001 au cours du colloque organisé à l'Université de Nantes par l'association *femmes et mathématiques* sur « Des femmes en Physique mathématique », où elle participa à la table ronde sur « Les filles dans les écoles d'ingénieurs ». La dernière des très nombreuses manifestations à l'organisation desquelles Huguette participa fut le colloque Cedaw (Convention sur l'élimination de toutes les formes de discrimination à l'égard des femmes), que l'Affdu organisa le 15 mars 2002 à l'Assemblée nationale et auquel Huguette, malade, ne put assister. Cette importante convention de l'ONU pourrait être un instrument juridique efficace pour défendre la cause des femmes.

Officière des Palmes académiques depuis 1967, Huguette Delavault fut nommée chevalière de la Légion d'honneur en 1995 et promue officière de l'ordre national du Mérite en 2002.

Huguette a été inhumée en Charente-Maritime, sa terre natale ; elle repose, près de sa mère, au cimetière de Longèves.

Une bourse scientifique à la mémoire d'Huguette Delavault a été créée. Elle est destinée à aider des étudiantes de niveau fin de thèse ou post-doctoral à réaliser un projet de recherche impliquant une mobilité de ou vers l'étranger. Les dons sont reçus par l'Affdu, 4 rue de Chevreuse, 75006 Paris.

Travaux de mathématiques.

[1] *Les transformations intégrales à plusieurs variables et leurs applications*, Mémor. Sci. Math., fasc. 148, Paris, Gauthier-Villars, 1961, 95 p.

[2] *Détermination d'une fonction F(t) dont on connaît la transformée de Laplace en une infinité de points. Application*, C. R. Acad. Sci. Paris, 247 (1958), p. 1284-1287.

[3] *Application de la transformation de Laplace et de la transformation de Hankel à la détermination de solutions de l'équation de la chaleur et des équations de Maxwell en coordonnées cylindriques*, préface de H. Villat, Publ. Sci. Tech. Ministère de l'Air, n° 71, Paris, Tech. Ministère de l'Air, 1957, 99 pages.

[4] *Sur la résolution des équations de Maxwell en coordonnées cylindriques au moyen de transformations de Laplace et de transformations finies de Fourier et de Hankel*, C. R. Acad. Sci. Paris, 244 (1957), p. 1146-1149.

[5] *Sur un problème de la théorie de la chaleur et sa solution au moyen des transformations de Fourier et de Laplace*, C. R. Acad. Sci. Paris, 237 (1953), p. 1067-1068.

[6] *Sur un problème de la théorie de la chaleur, et sa solution au moyen des transformations de Hankel*, C. R. Acad. Sci. Paris, 236 (1953), p. 2484-2486.

Travaux de sociologie.

[a] *Les femmes dans les cadres de l'enseignement supérieur et de la recherche*, Diplômées n° 138, septembre 1986.

[b] *Vers la Parité dans les instances de décision. La place des filles dans une filière de formation des cadres. Du lycée aux grandes écoles scientifiques*, exemplaire multigraphié, Paris, Association française des femmes diplômées des universités et Demain la parité, 1997, 60 p. `http://www.int-evry.fr/demain-la-parite/lyceeauxgrandesecoles.pdf`

[c] *Vers la Parité dans les instances de décision. La place des filles dans une filière de formation des cadres. Les grandes écoles scientifiques*, exemplaire multigraphié, Paris, Demain la parité, 1998, 115 p. `http://www.int-evry.fr/demain-la-parite/grandesecoles.htm`

[d] *Vers la Parité dans les instances de décision. La place des filles dans une filière de formation des cadres. Les grandes écoles scientifiques*, mise à jour 1999 des tableaux de données p. 57 à 107, exemplaire multigraphié, Paris, Association française des femmes diplômées des universités et Demain la parité, 1999. `http://www.int-evry.fr/demain-la-parite/grandesecoles.htm`

[e] *Femmes et sciences*, in Ch. III des actes du colloque « Women and Sciences », Bruxelles, 28-29 avril 1998, Annalisa Colosimo et Nicole Dewandre ed., publication de la commission européenne, DG 12, Sciences Recherche et Développement, ISBN 9282857530. `http://www.cordis.lu/tser/src/1an_en.htm` `http://europa.eu.int/comm/research/press/1998/pr294en.html`

[f] *Comment les filles vont à la science ? Le difficile parcours des combattantes*, Revue de l'Office Universitaire de Recherche Socialiste (OURS), n° 9, décembre 1999.

[g] *Sciences, où sont les femmes ?*, Diplômées, n° 191, décembre 1999, p. 221-225.

[h] (avec Laurence Broze et Julianne Unterberger) *Les Femmes dans les filières de l'enseignement supérieur*, rapport à Francine Demichel, directrice de l'Enseignement supérieur au ministère de l'Éducation nationale, de la Recherche et de la Technologie, exemplaire multigraphié, Paris, Demain la parité, 2000, 139 p. `http://`

www.education.gouv.fr/rapport/femsup/defaultb.htm http://www.int-evry.fr/demain-la-parite/pdfexposes/ffespdf.pdf

[i] Auditions au Sénat par la Délégation aux Droits des femmes et à l'égalité des chances entre les hommes et les femmes, représentante de l'Association française des femmes diplômées des universités au réseau « Demain la parité », les 8 et 28 mars 2000. http://www.senat.fr/rap/r99-347/r99-3475.html http://www.senat.fr/commission/femmes/Femmes000404.html

[j] (avec Noria Boukhobza et Claudine Hermann, et la coll. de Françoise Cyrot-Lackmann, *Les Enseignants-chercheurs à l'Université : la place des femmes*, rapport à Francine Demichel, directrice de l'Enseignement supérieur au ministère de l'Éducation nationale, de la Recherche et de la Technologie, exemplaire multigraphié, Paris, Demain la parité, 2000, 95 p. www.education.gouv.fr/rapport/femme/defaultb.htm http://www.ladocumentationfrancaise.fr/brp_pages/actu/recherche.shtml

[k] *Formations scientifiques : où sont les filles ?* Actes du colloque organisé par l'ENPC, l'ESIEE, l'ONISEP, et l'Université de Marne-la-Vallée, 13 décembre 2000. http://www.esiee.fr/groupe/pdf/actes.pdf

[l] (avec Claudine Hermann) *Femmes et sciences*, Comprendre et agir, n° 58, 2e trimestre 2001, Institut Curie, ISNN 0982-2313. http ://www.curie.fr/home/presse/ca.cfm/lang/_fr/id/8.htm

[m] *Les filles dans les écoles d'ingénieurs*, Colloque « Des femmes en Physique mathématique », organisé par l'association *femmes et mathématiques*, Université de Nantes, 10 novembre 2001, copyright : Demain la parité. http://www.int-evry.fr/demain-la-parite/pdfexposes/expograndecoles.pdf

[n] (avec Noria Boukhobza et Claudine Hermann, et la coll. de Corinne Konrad) *Les Enseignantes-chercheuses à l'Université, Demain la parité ?*, préface de Françoise Gaspard, Paris, L'Harmattan, 2002, 193 p.

Autres articles et quelques textes d'interventions.

[I] *La place des femmes en sciences et en technologie*, audition par la commission de la science et de la technologie au Conseil de l'Europe, novembre 1997.

[II] *La place des femmes dans une filière de formation des cadres : les grandes écoles scientifiques en France*, Colloque franco-allemand « La place des femmes dans les sciences en France et en Allemagne », Université des Saarlandes, 5 juin 1998. http://www.uni-saarland.de/z-einr/fz/shared/jbuchinhalt2.html

[III] *Aidez-nous à les aider, projet 1000 femmes à former*, Diplômées 185, 1998, p. 104-111.

[IV] *Vers la parité dans les instances de décision, une expérience française*, Rapport au Congrès international de la FIFDU à Graz, août 1998.

[V] *La place des femmes dans les filières scientifiques conduisant aux postes de prise de décision en France*, IIIème Congrès International du Forum international des femmes de la Méditerranée « Femmes, sciences, biotechnologies : quel avenir pour la Méditerranée », Unesco, Turin (Italie), 29-30-31 janvier 1999. http://www.forummed.org/Document/Atti9901/Indice.html

[VI] Participation à la table ronde *Le savoir est-il masculin ?* Université d'été de l'Assemblée des Femmes, Lisieux, 24-25 août 1999. http://www.assemblee-des-femmes.com/universite/lis99.htm http://www.assemblee-des-femmes.com/universite/Synth99.rtf

[VII] *Toujours plus savantes, mais toujours pas scientifiques ? les paradoxes de l'excellence au féminin*, Conférence-débat, Rennes, 19 octobre 1999, Semaine de la Science, à l'invitation de Nicole Guenneuguès, chargée de mission académique pour l'égalité des chances entre les filles et les garçons dans l'accès à la qualification.

[VIII] (avec H.Cerbelaud et C.Hermann) *La place des femmes dans les filières de formation scientifique (Universités et Ecoles d'Ingénieurs)*, CETSIS-EEA'99, Actes du Colloque sur l'Enseignement des Technologies et des Sciences de l'Information et des Systèmes en Electronique, Electrotechnique et Automatique, Université Montpellier II, 4-5 novembre 99, p. 175-180.

[IX] *Sciences : où sont les femmes ?*, Colloque « Les femmes et l'éducation », organisé par la FEN au Salon de l'éducation, Paris, 27 novembre 1999.

[X] *1000 femmes à former*, Diplômées 191, 1999, p.201-203.

[XI] *Education et formation face à la révolution*, exposé au colloque du CILAF, 3 mars 2000.

[XII] *Rôle de l'orientation dans le choix des filières scientifiques : le cas des filles*, Université d'été « L'évolution des effectifs dans les filières scientifiques », Poitiers 6-7-8 juillet 2000.

[XIII] *Quelques réflexions à propos de l'orientation vers les disciplines scientifiques à l'université et en particulier celle des jeunes filles*, Bulletin de l'Union des Physiciens, 4 novembre 2000.

[XIV] *Ingénieurs diplômés, quelles formations pour quels métiers ?*, Table ronde « Le recrutement », Colloque de la commission des titres d'ingénieurs, La Sorbonne, Paris, 9 novembre 2000. `http://www.commission-cti.fr/pdf/fr/DELAVAULT.pdf`

[XV] *Une épée d'académicienne pour Marianne Bastid-Bruguière*, Diplômées 203, 2002, p. 187-189.

Huguette Delavault a été une contributrice régulière de la revue *Diplômées* (Association française des femmes diplômées des universités) de 1980 à 2003, seuls quelques uns de ces articles ont été cités ici. La revue, trimestrielle, est conservée à la bibliothèque Marguerite Durand et au siège de l'Association (4, rue de Chevreuse, 75006-Paris).

Danièle Gondard-Cozette

Institut de Mathématiques, Université Pierre et Marie Curie, Tour 46 5e étage Boite 247,
4, place Jussieu, 75252 PARIS CEDEX 05.

E-mail : `gondard@math.jussieu.fr`

ÉGALITÉ DES CHANCES FEMMES/HOMMES DANS L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR : L'ÉTAT DES LIEUX EN 2001–2002

Christine Charretton

Au printemps 2001, le MEN sous l'impulsion de Francine Demichel, alors Directrice de l'Enseignement supérieur, a décidé de lancer une enquête pour recueillir des statistiques sexuées pour l'ensemble des universités, statistiques concernant tous les personnels et les étudiants.

Au sein de la mission « Égalité des chances » confiée à Armelle Le Bras-Chopard, s'est déroulé le travail du groupe « État des Lieux » sous la direction de J. Heinen et V. Roullin. Il réunissait une cinquantaine d'enseignantes-chercheuses ou administratives de différentes universités.

Le travail du groupe a été de définir un schéma commun pour le recueil des données dans chaque université de sorte que puisse avoir lieu, à l'échelle nationale, une comparaison transversale des données sexuées recueillies.

Finalement un document de vingt pages a été établi pour chaque université, lui-même divisé en quatre grandes rubriques :

– les étudiants, par cycle, par filières et par discipline, IUT et hors IUT, la part des étudiantes y étant dégagée ;

– les enseignants et enseignants-chercheurs, par grade, secteur disciplinaire et groupe au CNU ;

– les personnels IATOS par corps, fonctions et grade ;

– les responsables et représentants ; présidents et vice-présidents, chargés de mission, trois conseils des universités, commission de spécialistes, responsables de composantes.

Sur chacun des tableaux ou graphiques des données par université d'une certaine population figurent également les statistiques nationales.

On peut consulter ces données pour l'année 2001-2002 sur le site :
`http://www.education.gouv.fr/syst/egalite/statuniv.htm`
avec un menu déroulant. Par exemple pour Lyon : Lyon1, Lyon2, Lyon3.

On trouvera aussi des statistiques concernant la présence des femmes dans la recherche et dans l'enseignement supérieur aux adresses suivantes :

– Mixité / parité dans la recherche et l'enseignement supérieur : `http://www.recherche.gouv.fr/parite/index.htm`

– Mission pour la place des femmes au CNRS : `http://www.cnrs.fr/mpdf`

Tout ceci permet finalement des analyses assez fines qu'il faut regarder pourtant attentivement. En effet, puisque le schéma est commun, des données sont fournies pour des catégories identiques, mais ces catégories n'ont pas toujours la même pertinence pour des universités différentes. C'est le cas de la catégorie « enseignants en sciences humaines » dans une université scientifique. Malheureusement le caractère de l'université n'est pas annoncé : Sciences, Médecine, Sciences humaines, pluridisciplinaire... Ceci ne facilite donc pas toujours la compréhension de certaines données si on les regarde un peu vite sans bien connaître l'université considérée.

Ces tableaux sont actuellement certainement un excellent outil pour qui veut faire « l'état des lieux en 2001–2002 » afin de faire un travail de prise de conscience du très bas niveau de la parité dans son établissement. A plus long terme, cet outil prendra sens seulement si les tableaux sont réactualisés chaque année pour évidemment mesurer l'évolution de la situation : on attend donc les tableaux pour 2002–2003 !

Christine Charretton
Institut Girard Desargues, Université Claude Bernard, 69622 Villeurbanne Cedex.
E-mail : `charretton@univ-lyon1.fr`

PROGRAMME CADRE POUR LA RECHERCHE ET LA TECHNOLOGIE (PCRDT) ET SON ACTION EN FAVEUR DES FEMMES

Nathalie Chauveau-Guri

Le 6e PCRDT couvre la période 2002-2006, il a pour objectif de valoriser les actions de recherche et de développement technologique, en cofinançant des projets menés en partenariat afin de renforcer et structurer l'Espace européen de la recherche (EER) et mener des actions spécifiques dans le domaine de l'énergie atomique (EURATOM).

Le secteur géographique concerné :

Les pays du monde entier peuvent participer au 6e PCRD. Cependant, les financements sont attribués par catégories de pays : États membres de l'Union européenne, États candidats, pays en développement et pays associés.

Qui peut participer ?

– le 6e PCRD est ouvert à toutes les entités juridiques établies (privées ou publiques, grandes ou petites, universités, instituts de recherche...) ;

– les projets sont menés en partenariats entre entités de pays différents :

- 3 pays pour les projets intégrés et les réseaux d'excellence, dont 2 d'un État membre ou d'un pays candidat
- 2 pour les autres types de projets (sauf bourses), dont 1 d'un État membre et 1 d'un pays candidat ;

– le Concours européen des jeunes scientifiques est ouvert aux jeunes âgés de 15 à 20 ans, via les points de contact nationaux.

Financement communautaire :

Il varie de 25 à 100 % selon les projets et les domaines.

Structure du 6e PCRDT :

Le budget du 6e programme-cadre s'élève à 17,5 milliards d'euros. Le 6e PCRDT se compose de 4 sous-programmes :

– *Intégrer et renforcer l'Espace européen de la recherche*

7 priorités thématiques et 5 activités spécifiques - Budget : 13,345 milliards d'euros

– *Structurer l'Espace européen de la recherche*

4 volets dont 2 visent tout particulièrement à favoriser la participation des femmes dans la recherche - Budget total : 2,605 milliards d'euros.

– *Renforcer les bases de l'Espace européen de la recherche*

2 actions visant à renforcer la coordination et de soutenir un développement cohérent des politiques et des activités de recherche et de stimulation de l'innovation en Europe - Budget : 320 millions d'euros.

– *Euratom : 4 actions*

Pour l'ensemble des quatre volets, la question de l'égalité des sexes est un élément de sélection important pour tous les projets soumis dans le cadre du PCRDT. A la fin de chaque contrat, un rapport sur les actions menées pour promouvoir l'égalité des sexes est demandé en plus du rapport d'activité.

Pour les projets intégrés ou les réseaux d'excellence, les actions visant à promouvoir l'égalité des sexes sont :

– prendre des actions spécifiques pour impliquer plus de femmes dans le projet,

– être en liaison avec les réseaux de femmes scientifiques,

– être en liaison avec les écoles et universités afin de déclencher un intérêt des jeunes filles pour le projet ou le domaine en question,

– embaucher des experts des questions de genre chargés de suivre et d'évaluer la dimension du genre dans le projet,

– organiser des séminaires, conférences ou ateliers pour sensibiliser à la nécessité d'améliorer l'égalité des sexes.

De plus, pour les réseaux d'excellence, la promotion de l'égalité des sexes est un des indicateurs d'intégration.

« Gros plan » sur les 2 volets du sous-programme *Structurer l'Espace européen de la recherche* visant à favoriser la participation des femmes dans la recherche

Volet Ressources humaines et mobilité :

Objectif : développer les ressources humaines (bourses Marie Curie) par la stimulation de la mobilité transnationale à des fins de formation ou de transfert des connaissances afin de contribuer à l'attrait de l'Europe pour les chercheurs des pays tiers.

Budget : 1,580 milliards d'euros.

Une attention est portée à la participation des femmes dans le cadre de toutes les actions et aux mesures appropriées à prendre en faveur d'un plus juste équilibre entre les femmes et les hommes dans la recherche ; aux circonstances personnelles liées à la mobilité, en particulier pour ce qui a trait à la famille, à l'évolution des carrières et aux langues ; au développement des activités de recherche dans les régions moins favorisées de l'Union et des pays associés et à la nécessité d'une coopération accrue et plus efficace entre les disciplines de la recherche et entre les universités et les entreprises, y compris les PME.

Volet Science et société :

Objectif : encourager les relations harmonieuses entre la science et la société, ainsi que contribuer à la réflexion critique concernant les problèmes éthiques, le principe de précaution, les femmes et la science, etc.

Budget : 80 millions d'euros

Ce programme comprend 5 domaines thématiques :

(1) Conseil scientifique, gouvernance et systèmes de référence
(2) L'éthique en science
(3) L'incertitude, le risque et le principe de précaution
(4) Culture scientifique et technologique, les jeunes, l'enseignement et la sensibilisation aux sciences, les carrières
(5) Femmes et sciences

Le volet « Femmes et sciences » comprend de nombreuses actions comme la création d'une plate-forme européenne pour les femmes scientifiques, la surveillance des progrès dans le domaine de l'égalité des sexes (base de données, statistiques, etc.), la mobilisation des femmes scientifiques dans le secteur privé ou encore la promotion de l'égalité des sexes dans les sciences dans une Europe élargie.

Attention : Actuellement et jusqu'au 9 décembre 2003, la Commission européenne lance un appel à propositions intitulé « Plateforme européenne pour les femmes scientifiques » dans le cadre du volet « Science et société ». Appel à propositions en français téléchargeable à cette adresse : `http://www.eurosfaire.prd.fr/sciencesociety/documents/pdf/appel-prop.pdf?cmactive=sub104`

Au niveau national, un réseau de points de contact (PNC) est mis en place pour donner des informations sur le programme-cadre de recherche. Les autorités nationales fournissent une aide aux candidats qui n'ont aucune expérience en matière de demande de soutien financier.

Sites et lectures utiles pour en savoir plus :

– service français d'accès à l'information sur la recherche en Europe - EUROSFAIRE : `http://www.eurosfaire.prd.fr`

– Point national de contact consacré au volet Science et société : `http://www.eurosfaire.prd.fr/sciencesociety/`

– Site de la DG Recherche consacré au 6e PCRDT (en français) : `http://europa.eu.int/comm/research/fp6/index_fr.html`

– Programme de travail pour le volet « Ressources humaines et mobilité » du 6e PCRDT (en français) : `http://www.eurosfaire.prd.fr/mobility/documents/pdf/r_wp_200203_fr.pdf`

– Site web du programme science et société du 6e PCRDT(en français), domaine « Femmes et sciences » : http://europa.eu.int/comm/research/science-society/women-science/women-science_fr.html

– « Femmes et sciences »– Mobiliser les femmes pour enrichir la recherche européenne

Communication de la Commission adoptée le 17 février 1999 (COM (1999)76 final) : http://europa.eu.int/comm/research/science-society/pdf/g_wo_co_fr.pdf

– Document de travail des services de la Commission Femmes et sciences : la dimension du genre, un levier pour réformer la science, 15 mai 2001 (SEC (2001)771) : http://europa.eu.int/comm/research/science-society/pdf/g_wo_sec771_fr_200101.pdf

– Plan d'action de la Commission européenne pour « Produire de l'égalité entre hommes et femmes dans les sciences » : http://europa.eu.int/comm/research/science-society/action-plan/08_action-plan_fr.html

– Présentation du Concours européen des jeunes scientifiques :

http://europa.eu.int/comm/research/science-society/youth-science/youth-science_fr.html

– site Cordis des appels à proposition (site en anglais mais les appels sont téléchargeables en français) : http://europa.eu.int/comm/research/fp6/calls_fr.cfm

– site Cordis, Femmes et Sciences (uniquement en anglais) : http://www.cordis.lu/improving/women/home.htm

– guide du candidat au 6e PCRDT : http://europa.eu.int/comm/research/fp6/pdf/blue_guide_fr.pdf

Nathalie Chauveau-Guri
Assistant Programme Manager, Greater London Entreprise, 28 Park Street, London SE1 9EQ.
E-mail : nathalie.g@gle.co.uk

LE PROJET ADA FAVORISE L'ACCÈS DES FEMMES DANS LES MÉTIERS DES TIC

Isabelle Collet

Le projet ADA

Première « programmeuse » de l'histoire, Ada Lovelace a donné son nom à un grand projet européen. Le projet Ada vise à favoriser l'accès des femmes aux Technologies de l'Information et de la Communication. L'objectif est de fournir aux femmes qui envisagent de s'orienter dans les métiers des TIC et à celles qui travaillent déjà dans ce domaine, des outils, des informations, des réflexions sur ces métiers et sur la place des femmes dans ce secteur.

Le réseau ADA fonctionne comme une plate-forme articulée autour de quatre grands types d'activités : la sensibilisation, l'information, la recherche et le développement, la formation.

Chaque activité alimente les autres, participe au développement du réseau et augmente ainsi les chances d'impulser des dynamiques égalitaires dans une économie nouvelle.

La création d'un site Internet, ada-online.be, qui offre des informations sur les femmes et les nouvelles technologies : il fonctionne comme une plaque tournante, un réseau d'échanges pour celles et ceux qui travaillent sur ce thème.

Des actions de Recherche et Développement : ADA mène des activités d'analyse du marché de l'emploi, rassemble des recherches et des statistiques concernant les femmes et l'informatique, étudie des nouvelles méthodes pédagogiques comme l'e-learning, s'attache à promouvoir la formation des formatrices en informatique.

Des actions de "démystification" des aspects techniques liés à l'utilisation de l'informatique au quotidien, par des aides pratiques destinées aux femmes, notamment des modules de formation « SOS PC ».

ADA travaille à la mise en place de formations pilotes et innovantes à destination des femmes : modules d'orientations conçus pour servir de déclencheur du parcours informatique ; formations qualifiantes ayant pour objectif l'emploi dans des métiers spécifiques liés aux nouvelles technologies comme par exemple, les CyberSoda.

Le CyberSoda

Interface 3 est un centre de formation pour femmes à Bruxelles (`www.interface3.be`). Il accueille des femmes en situation précaire pour les former aux métiers des TIC (Administratrice réseau, Web, programmation...). En juillet 2003, le centre, avec l'appui du projet Ada, a organisé un stage à destination d'adolescentes. Il a duré une semaine et a réuni 14 stagiaires de 10 à 15 ans.

L'objectif premier était de donner à des adolescentes de toute origine sociale l'envie de s'orienter vers les métiers des TIC en leur faisant toucher du doigt la réalité de ces métiers. En effet, nous partons de l'hypothèse que les filles se détournent des TIC car la représentation qu'elles se font de l'informaticien ne correspond pas à l'image qu'elles ont d'elles-mêmes. Il s'agit de leur montrer, à l'âge où elles réfléchissent à leur orientation, que l'informatique est un territoire mixte qui les concerne aussi et surtout dans lequel elles peuvent avoir un avenir professionnel.

Le deuxième objectif du CyberSoda est de permettre à des stagiaires d'Interface de faire leurs premiers pas en tant que formatrices en informatique.

La grande originalité du programme de ce stage est son orientation vers la maîtrise de la technique informatique et non vers l'usage courant de l'ordinateur. En outre, les filles ont interrogé des femmes informaticiennes à propos de leur métier.

Les résultats de cette première session sont très encourageants, tant au niveau des filles que des formatrices. Nous travaillons maintenant à la réalisation d'une mallette pédagogique permettant de transmettre ce dispositif à d'autres structures scolaires ou associatives.

Quelques mots sur Ada Byron (1815–1852)

Ada Lovelace était la fille du poète Byron, qu'elle ne connut cependant jamais, son père ayant quitté sa mère deux mois après sa naissance. Sa mère, Annabella Byron, était une femme intelligente et énergique, rendue amère par les insultes et les coups de son mari ainsi que par le long procès en divorce qui s'en suivit. Il faut bien comprendre qu'à cette époque, il n'était pas simple de divorcer pour une femme, surtout d'un homme aussi célèbre que Lord Byron, qu'elle accusa de turpitude morale.

Annabella s'inquiéta beaucoup pour l'avenir et l'éducation d'Ada : sans nul doute, elle avait hérité de son génie, mais serait-elle comme son père fantasque et immorale ? Annabella s'attacha donc à trouver à sa fille des précepteurs pour lui donner une éducation moralement irréprochable et aussi éloignée que possible de la poésie : Ada apprendrait les mathématiques, la morale, la science et y travaillerait avec méthode.

A 16 ans, Ada tomba amoureuse d'un de ses précepteurs et entendit bien mener ce flirt à sa guise. Elle fut finalement découverte et tenue enfermée à la maison. Le scandale fut évité, le précepteur congédié et Ada dûment sermonnée. Seulement voilà, la preuve était maintenant faite pour sa mère : il était évident qu'Ada avait hérité du caractère aventureux, immoral, indépendant et passionné de son père. Il fallait donc tout faire pour l'empêcher de nouveau de sombrer dans ces noirs penchants.

A force de réprimande, Ada finit par croire qu'elle était effectivement pervertie par l'hérédité de son père et elle promit de se corriger. Ayant fait preuve de tenue, sa mère décida alors de la lancer dans le monde, alors qu'elle avait 17 ans. Mais comment pouvait-elle renier son père comme sa mère le souhaitait, tout en profitant de sa notoriété ? C'est d'ailleurs grâce à sa noble ascendance que les plus grands scientifiques du moment acceptèrent de travailler avec elle ou de l'avoir pour élève, les déficiences scientifiques attribuées à son sexe ne s'appliquant pas dans son cas.

Ada décida d'étudier sérieusement les mathématiques et fit la rencontre de Lady Mary Somerville. Mary Somerville est connu pour sa traduction très remarquée de l'ouvrage de Laplace « Mécanique céleste », travail salué par Laplace lui-même. Elle a gagné de nombreux prix scientifiques pour ses travaux, en particulier dans le domaine de l'astronomie. Quand elle mourut en 1872, elle fut sacrée « Reine des Sciences du XIXe siècle ».

Par contre, son caractère était à l'opposé de celui d'Ada. Elle était modeste et effacée. Malgré ses travaux et ses succès, elle écrivit dans son autobiographie : « *Je suis consciente de n'avoir jamais fait de découverte moi-même, car je n'ai aucune originalité. J'ai de la persévérance et de l'intelligence, mais pas de génie* ». Elle conclut : « *Cette étincelle venue du ciel n'est pas donnée à (mon) sexe, nous sommes terre à terre. Dieu sait si de grands pouvoirs peuvent nous être alloués dans une autre existence, mais le vrai génie scientifique est sans espoir dans celle-ci* ».

En 1833, Ada rencontra Charles Babbage. Mary Somerville fréquentait les soirées scientifiques données par ce mathématicien anglais de renom. Elle y emmena Ada. Le clou de ces soirées était la démonstration de la machine à différences qui exécutaient des calculs. Ada fut fascinée par la machine, la description qu'elle en fit à Babbage, mi-poétique, mi-mathématique enchanta le mathématicien, qui avait par ailleurs du mal à faire admettre que sa machine était autre chose qu'un amusant gadget. Il lui sembla que seule Ada comprenait l'importance de cette machine et plus tard, de sa deuxième version, la machine analytique. C'est là que débuta leur amitié qui se poursuivit par une collaboration.

Entre temps, Ada épousa en 1835 William King, qui fut fait comte de Lovelace trois ans plus tard et duquel elle eut trois enfants.

Babbage n'écrivit pas lui-même sur sa machine, c'est l'italien Luigi F. Menabrea, qui, impressionné par les travaux de Babbage, rédigea le premier article en français en 1842. Ada traduisit l'article. Une fois qu'elle y eut ajouté des notes, l'article avait doublé de volume. Elle appela son mémoire « mon premier enfant », elle qui en avait déjà trois. Mais comme elle le disait par ailleurs, elle n'était pas très intéressée par la maternité.

L'apport réel des travaux d'Ada à la machine analytique est difficile à évaluer. Mais il est certain que grâce à leur amitié, Ada a été finalement la personne la mieux renseignée sur la machine. C'est elle qui en a fait la vulgarisation la plus claire et la mieux documentée.

Le moment de la publication de son mémoire fut un moment difficile pour Ada. Elle craignait que Babbage, qui l'avait aidée dans la rédaction de l'ouvrage et qui écrivit un article d'introduction, ne veuille s'approprier son œuvre.

Elle se fâcha avec lui, puis se réconcilia, lui envoya des lettres délirantes...

Finalement, Ada écrivit à Babbage une lettre de plusieurs pages, où tous ses sentiments se croisèrent et s'emmêlèrent. Elle lui dit qu'elle était sa muse, elle lui parla beaucoup d'immortalité et de vie éternelle. Elle se voyait comme un prophète à ses côtés, lui transmettant la parole de Dieu... La suite, à l'image de ses autres lettres, était un mélange d'autocongratulation (elle parla de son génie, de son extraordinaire compréhension de l'abstraction mathématique) et en même temps, elle continua à demander l'avis de Babbage de manière humble et incertaine, pour ses travaux mathématiques.

Son mémoire fut enfin publié sous ses initiales : A. A. L. afin de dissimuler son identité comme le faisaient d'ordinaire les femmes. Il fut bien accueilli. Néanmoins, elle n'obtint pas la célébrité qu'elle espérait. Son ambition n'était qu'une composante d'un enjeu encore plus terrible : elle voulait qu'on reconnaisse son génie, trouver la justification de ses souffrances et obtenir la Rédemption de son père pour tous ses péchés.

Ce n'est donc pas pour son apport mathématique que Ada est devenue célèbre, mais pour un passage de son mémoire, considéré par elle comme par Babbage comme mineur : le programme qui permettait de calculer sur la machine analytique les nombres de la suite de Bernoulli. C'est le premier programme informatique qui ait été écrit et il utilise les mêmes termes et procédures qu'on utilisera plus tard sur les premiers ordinateurs.

Mais, la machine analytique ne fonctionna jamais. Babbage arriva à cours d'argent et ne parvint pas à la mettre au point. Il s'arrêta sans le savoir très près du but, à une ou deux roues dentées près.

Ada songea ensuite embrasser une carrière musicale de harpiste. Elle s'intéressa aussi à de nouvelles et dangereuses idées : mesmérisme, phrénologie, matérialisme... Plus tard, elle désira écrire un modèle mathématique lui permettant de gagner aux courses, elle espérait ainsi obtenir une vraie indépendance financière mais elle se ruina au point de devoir vendre des bijoux de famille.

Elle mourut en 1852 dans la longue agonie d'un cancer, au même âge que son père et demanda à être enterrée à côté de lui.

Le langage de programmation Ada, mis au point en 1979, a été ainsi baptisé afin de lui rendre un hommage posthume.

Bibliographie sur Ada Lovelace

– Stein Dorothy, Ada, a life and a legacy, Cambridge, MIT Press, 1985.
Il existe une traduction en françaisă : Ada Byron, la comète et le génie, Seghers, 1990, épuisé mais encore disponible dŠoccasion.

– Wooley Benjamin, The Bride of science : romance, reason and Byron's daughter, Mc Graw Hill.

– `http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Lovelace.html`

Isabelle Collet
Université Paris X, département Sciences de l'éducation, 200, avenue de la République, 92001 NANTERRE Cedex.
E-mail : `icollet@u-paris10.fr`

femmes & math
Revue de l'association *femmes et mathématiques*
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75321 Paris Cedex 05
fetm@ihp.jussieu.fr
http://www.femmes-et-maths.fr.fm/

Numéro 7

Coordination du numéro 7 : Colette Guillopé
Directrice de publication : Véronique Chauveau
Imprimerie de l'Université de Rennes I
Numéro ISSN : 1271-3546
Tirage 200 ex
Dépôt légal : décembre 2003
Prix du numéro : 12€