Une application de l'étude d'équations différentielles linéaires homogènes dépendant de paramètres : systèmes hamiltoniens

Delphine Boucher

Dans cette note, nous montrons en quoi l'étude d'équations différentielles linéaires homogènes dépendant de paramètres aide à trouver des conditions de non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens. Nous suivons pour cela l'exemple du système de Hénon-Heiles ([2]).

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*, (x_1, \ldots, x_{2n}) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$

Un **système hamiltonien** sur un ensemble non vide U de $\mathbb{R}^{2n}$ est un système d'équations différentielles de la forme :

$$(S) \qquad \begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q,p) \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q,p) \\ j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

où $H : U \to \mathbb{R}$ est la fonction '**Hamiltonien**' L'entier n est appelé le **degré de liberté**.

L'hamiltonien H représente, à une constante multiplicative près, l'énergie mécanique de l'objet. C'est une quantité conservée, on dit que c'est une **intégrale première** du système hamiltonien. On considère connaître suffisamment bien un système hamiltonien s'il possède un nombre suffisant (égal au degré de liberté n) de quantités conservees, les intégrales premières, satisfaisant de plus une propriété d'indépendance et d'involution. Dans ce cas, le système hamiltonien sera dit **complètement intégrable** (voir [1]). Jl est difficile de trouver des intégrales premières en involution et la question que l'on se posera est de savoir si le système est complètement intégrable localement, c'est à dire s'il possède n intégrales premières en involution définies autour d'une solution particulière du système. Pour étudier cette question, nous utiliserons un critère galoisien de non intégrabilité dû à Morales et Ramis ([2]).
L'idée est de se placer au voisinage d'une solution particulière X_0 du système hamiltonien (S) et d'étudier les solutions qui sont proches de cette solution particulière. Le comportement de ces solutions est dicté par une équation différentielle linéaire, l'équation variationnelle le long de la solution X_0. On peut alors réduire 1'ordre de cette équation et obtenir l'équation normale variationnelle à laquelle on associe un groupe de Galois différentiel G. Le théorème de Morales-Ramis donne une condition nécessaire portant sur le groupe G pour que le système (S) soit complètement intégrable.
Théorème de Morales-Ramis (version simplifiée) : Soit (S) un système hamiltonien et X_0 une solution particulière. Soit (E) l'équation normale variationnelle de (S) le long de la solution X_0 et soit G son groupe de Galois différentiel. Si le système hamiltonien est integrable le long de X_0, alors la composante connexe de l'identité du groupe de Galois de (E) , notée G^0, est un groupe abélien.
On en déduit le critère suivant : 'G^0 non abelien $\Rightarrow$ (S) non integrable'.

Nous illustrons l'application de ce critère à travers l'exemple de Hénon-Heiles ([2]). Nous montrons en quoi l'étude de l'espace des solutions de l'équation normale variationnelle (équation dépendant de paramètres) permet de fournir des renseignements sur le caractère non abélien de G^0. Considérons l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{3}q_1^3 + \frac{1}{2}(aq_1 - 1)q_2^2,\ a \in \mathbb{C}$$

Le système hamiltonien est

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -q_1^2 - \frac{a}{2}q_2^2 \\ -(aq_1 - 1)\,q_2 \end{pmatrix}$$

Une solution particulière est $X_0(t) =^t (\frac{-6}{t^2}, 0,\ \frac{12}{t^3}, 0)$. Nous en déduisons l'équation variationnelle le long de la solution X_0,

$$\dot{h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{12}{t^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{6a}{t^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} h$$

puis l'équation normale variationnelle

$$L_a(y(t)) = y''(t) - (1 + \frac{6a}{t^2})y(t) = 0.$$

Nous sommes ici en présence d'une équation qui a pour seuls points singuliers zéro et l'infini ; une petite étude annexe permet de montrer que la composante connexe de l'identité dans le groupe G de l'équation est abélienne si, et seulement si, le groupe G est lui même égal au groupe multiplicatif. Ceci est encore équivalent à dire que l'espace des solutions de l'équation normale variationnelle est engendré par deux solutions exponentielles. Nous sommes donc ramenés à chercher des conditions nécessaires et suffisantes sur le paramètre a pour que l'équation normale variationnelle ait deux solutions $z(t)$ dont les dérivées logarithmiques ($\frac{z'(t)}{z(t)}$) soient rationnelles, c'est à dire deux solutions vérifiant

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = P_0(t) + P_\infty(t) + \frac{q'(t)}{q(t)}$$

avec P_0, P_∞ parties exponentielles en zéro et l'infini, et q polynôme.
Dans le cas non paramétré, il existe des algorithmes (Beke, Van Hoeij, ...) pour calculer les solutions exponentielles. Nous allons adapter le calcul de ses solutions à notre cas paramétré. Cette étude se fait en trois étapes.

1. Les parties exponentielles P_0 et P_∞ au voisinage des points singuliers zéro et l'infini sont :
$P_0(t) = \frac{p_0}{t}$ avec $p_0^2 - p_0 - 6a = 0(1)$
$P_\infty(t) = p_\infty$ avec $p_\infty^2 - 1 = 0(2)$

2. L'équation vérifiée par q est :

$$tq''(t) + 2\left(p_\infty t + p_0\right) q'(t) + 2p_0 p_\infty q(t) = 0$$

La relation de récurrence satisfaite par les coefficients de $\sum q_i t^i$ est :

$$2p_\infty(i + p_0)q_i + (i+1)(i+2p_0)q_{i+1} = 0$$

Nécessairement le degré de q est égal à $-p_0$ et sa valuation est nulle. Une condition nécessaire pour que q soit un polynôme est donc :
$-p_0 \in \mathrm{N}(3)$.
La difficulté ici est que le degré dépend du paramètre, donc on ne peut le borner et calculer les coefficients du polynôme. Cependant, comme la relation de récurrence satisfaite par les coefficients de q est une relation de récurrence à deux termes, on peut montrer que cette condition nécessaire (3) est aussi suffisante.

3. D'après (1) et (3), l'équation normale variationnelle a une solution exponentielle si, et seulement si, il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $a = \frac{k^2+k}{6}$. De plus, d'après (2), cette condition sur a est aussi nécessaire et suffisante pour avoir deux solutions exponentielles (linéairement indépendantes). Ces deux solutions sont du type $t^{-deg(q_1)}e^t q_1(t)$ et $t^{-deg(q_2)}e^{-t}q_2(t)$.

En conclusion, si a ne s'écrit pas sous la forme $\frac{k^2+k}{6}$ où k est un entier, alors nous avons une obstruction à l'intégrabilité du système ; sinon, nous ne pouvons rien conclure.

Références

[1] *R. C. Churchill* (*1998*) Galoisian Obstructions to the Integrability of Hamiltonian Systems Prepared for the Kolchin Seminar in Differential Algebra, Department of Mathematics, City College of New York

[2] *Juan J. Morales-Ruiz* (*1998*) Differential Galois Theory and Non-integrability of Hamiltonian Systems,

Delphine Boucher
Laboratoire d'Algorithmique, Calcul formel et optimisation
Faculté des Sciences
123, Avenue Albert Thomas
87060 Limoges Cedex
France
delphine.boucher@unilim.fr
http ://www.unilim.fr/laco/perso/delphine.boucher