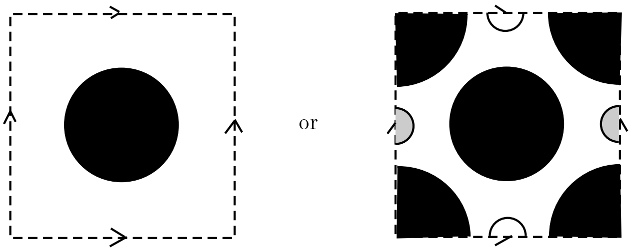
Sur l'ergodicité de billards dispersifs en mesure infinie

Frangoise Pène

1. Introduction

Considérons un fermé Q du plan, $\mathbf{Z}^2$-périodique dont le complémentaire est constitué d'une union dénombrabIe (localement finie) d'ouverts convexes $O_i (i \in \mathcal{J})$ d'adhérences deux à deux disjointes, de bord Γ_i de classe C^{r+1} avec $r \geq 2$ (et de courbure jamais nulle). Sur la figure suivante, sont représentés l'intersection avec le carré unité $[0;1[^2$ de deux tels domaines (pour chacun de ces dessins, le domaine Q correspondant s'obtient par $\mathbf{Z}^2$-périodicité) :



Nous nous intéressons au comportement d'une particule se déplaçant dans Q à vitesse unitaire, constante à l'intérieur de Q et obéissant aux lois de la réflexion à l'instant d'un choc contre ∂Q (selon la loi "angle incident = angle réfléchi"). Il peut être modélisé par le flot $(\mathrm{Y}_t)_t$ sur $M' := T^1 Q$, où $\mathrm{Y}_t(x)$ désigne la configuration à l'instant t d'une particule dont la configuration à l'instant 0 est $x = (q, v)$. Ce flot préserve la mesure de Lebesgue m' sur M'. L'étude de $(M',\ m',\ (\mathrm{Y}_t)_t)$ se ramène à celle du système dynamique $(M,\ \mu,\ T)$ où M, μ et T sont définis ci-dessous. L'ensemble M désigne l'espace des configurations après un choc :

$$M := \{x = (q, \vec{v}) \in M'; q \in \partial Q \text{ et } \langle \vec{n}(q), \vec{v} \rangle \geq 0\},$$

($\vec{n}(q)$ désignant le vecteur unitaire normal à ∂Q en q dirigé vers l'intérieur de Q). Remarquons que les cas où $\{\vec{n}(q)\ , v-) = 0$ correspondent aux cas où la trajectoire est tangente à l'instant du choc. Nous définissons la transformation $T : M \to M$ qui, à une configuration à l'instant après un choc associe la configuration à l'instant après le choc suivant :

$$T(q, \vec{v}) = (q', \vec{v}'), \quad \text{où} \quad q' = q + \tau(q, \vec{v})\vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{v}' = \vec{v} - 2 \langle \vec{v}, \vec{n}(q') \rangle \vec{n}(q')$$

en notant $\tau(q, \vec{v}) = \min\{s > 0 \ :\ q + s\vec{v} \in \partial Q\} \in]0, +\infty[$ ($\tau(q, \vec{v})$ est fini pour des raisons de $\mathbf{Z}^2$-périodicité). Cette transformation préserve la mesure μ donnée par $d\mu(q, \vec{v} = \cos(\varphi)\ \delta_i\ dr\ d\varphi$, où $i \in J$ est tel que q soit sur Γ_i, où r désigne l'abscisse curviligne de q sur Γ_i et et $\varphi \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ est la mesure de l'angle $(\vec{n}(q), \vec{v})$. Nous supposons ici que **l'horizon est fini**, i.e. $\max_M \tau < +\infty$. Parmi les deux dessins de la première figure, remarquons que seul le second correspond à un système billard à horizon fini. Nous établissons le résultat suivant :

Théorème A [6] : *Le système* $(M,\ \mu,\ T)$ *est* **ergodique**, *i.e. tout ensemble mesurable* $A \subseteq M$ *μ-presque partout sous-invariant (c'est-à-dire tel que* $T^{-1}(A) \subseteq A\ \mu - p.p.$*) vérifie* $\mu(A) = 0$ *ou* $\mu(A^c) = 0$, *i.e. pour tout* $A \subseteq M$ *avec* $\mu(A) > 0$, *pour μ-presque tout* $x \in M$, *il existe* $n \in \mathbf{N}$ *tel que* $T^n(x) \in A$.

D'autre part, le système $(M,\ \mu,\ T)$ *ne possède pas de fonction propre mesurable non constante, i.e. si* $f : M \to \mathbf{C}$ *est mesurable et si* $\lambda \in \mathbf{C}$ *sont tels que* $foT = \lambda f$, *alors* $\lambda = 1$ *et f est μ-presque partout constante.*

Corollaire : *Le système* $(M',\ m',\ (Y_t)_t)$ *est* **ergodique**, *i.e. pour tout* $A \subseteq M'$ *avec* $m'(A) > 0$, *pour m'-presque tout* $x \in M'$, *il existe* $t \in \mathbf{R}_+$ *tel que* $Y_t(x) \in A$. *De plus, pour tout* $N \in \mathbf{N}^*$, *le système* $(M,\ \mu,\ T^N)$ *est ergodique.*

Remarquons qu'avec ces définitions, l'ergodicité d'un système dynamique (Ω, ν, S) avec $\nu\sigma$-finie, infinie n'est pas équivalente au fait que tout ensemble mesurable $A\nu$-presque partout invariant vérifie $\nu(A) = 0$ ou $\nu(A^c) = 0$. Par exemple, la translation τ par 1 sur $\mathbf{Z}$ n'est pas ergodique (car les ensembles $\{n \in \mathbf{Z} : n \leq n_0\}$ sont sous-invariants) mais vérifie la deuxième propriété. Cependant les deux propriétés sont équivalentes si le système est **récurrent**, i.e. si, pour tout ensemble mesurable $A \subseteq \Omega$ vérifiant $\nu(A) > 0, \nu$-presque tout point de A retourne dans A. Une première étape consistera donc à établir la récurrence du système $(M,\ \mu,\ T)$.

2. Récurrence

Notons $p : \mathbf{R}^2 \to \frac{\mathbf{R}^2}{\mathbf{Z}^2}$ la projection canonique et $\overline{Q} := p(Q)$. Nous définissons, de même que précédemment, les systèmes $(\overline{M}' := T^1\overline{Q}, \overline{m}',\ (\overline{Y}_t)_t)$ et $(\overline{M}\ ,\ \overline{\mu}, \overline{T})$ en considérant la projection canonique $\tilde{p} : M' \to \overline{M}'$. On note $\overline{\nu} := \frac{\overline{\mu}}{\overline{\mu}(\overline{M})}$. Ces systèmes dynamiques (en mesure finie) ont été beaucoup étudi'es depuis l'article fondateur [8] de Sinai. Citons notamment [1,2] qui fournissent des théorèmes centraux limites pour $(\overline{M},\ \overline{\mu}, \overline{T})$ et pour certaines classes de fonctions. On peut représenter le système $(M,\ \mu,\ T)$ comme une extension cylindrique de $(\overline{M},\ \overline{\mu}, \overline{T})$ par $(\mathbf{Z}^2,\ L)$ où L est une fonction $L : \overline{M} \to \mathbf{Z}^2$, i.e. $(M,\ \mu,\ T)$ est isomorphe au système $(M_0,\ \mu_0,\ T_0)$ avec $M_0 := \overline{M} \times \mathbf{Z}^2, \mu_0 = \mu \otimes \lambda$ (où λ est la mesure de Haar sur $\mathbf{Z}^2$) et $T_0(x,\ n) = (\overline{T}(x),\ n + L(x))$. L'idée est ici de choisir un domaine fondamental $\mathcal{D}_0$ de $\tilde{p} : M' \to \overline{M}'$ et de définir l'isomorphisme de systèmes dynamiques $\psi : M_0 \to M$ par $\psi((q, \vec{v}),\ n) = (q + n, \vec{v})$. D'après [9] et [1,2], L vérifie le théorème central limite pour les sous suites de densité positive : pour toute suite de v.a. $k_n : \overline{M} \to \mathbf{N}$ telle que $\frac{k_n}{n}$ converge $\overline{\nu}$-presque sûrement vers une constante $a \in \mathbf{R}_+^*$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=0}^{k_n - 1} L \circ \overline{T}^l$ est asymptotiquement de loi normale. Ainsi, d'après [4] ou [7], le système $(M,\ \mu,\ T)$ est récurrent.

3. Théorème du zig-zag

Dans cette partie, nous allons discuter des propriétés hyperboliques du système $(M,\ \mu,\ T)$. L'étude de ce système présente des difficultés, notamment en raison de la présence de singularités (points de discontinuité). Notons $R_0 := T^1(\partial Q)$ l'ensemble des vecteurs de M tangents à ∂Q. L'ensemble des points de discontinuité de T est $T^{-1}(R_0)$. Notons, pour tout $l \in \mathbf{N} \cup \infty, R_{0,l} := \bigcup_{i=0}^{l} T^i(R_0)$ et $R_{-l,0} := \bigcup_{i=0}^{l} T^{-i}(R_0)$. On montre que, pour tout entier $k \geq 1, T^k$ définit un C^r-difféomorphisme de $M \backslash R_{-k,0}$ sur $M \backslash R_{0,k}$.

Définition : *On appelle* **fibre contractante** (*resp.* **dilatante**) *toute courbe* $\gamma \subseteq M\backslash R_{-\infty,0}$ (*resp.* $\gamma \subseteq M\backslash R_{0,+\infty}$) C^1*-difféomorphe à* $]\,0,1[$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty} l(T^n(\gamma)) = 0$ (*resp.* $\lim_{n\to+\infty} l(T^{-n}(\gamma)) = 0$) *où* $dl = \sqrt{dr^2 + d\varphi^2}$.

La construction de fibres contractantes et dilatantes en presque tout point a été réalisée dans [8,5]. Un outil essentiel pour établir l'ergodicité de $(M,\ \mu,\ T)$ est le résultat suivant. Notons $M^{(i)} := \{x = (q, \vec{v}) \in M,\ q \in \Gamma_i\}$.

Théorème du zig-zag : *Pour tout* $i \in \mathcal{J}$ *et tout ensemble mesurable* $D \subseteq M$ *avec* $\mu(D) = 0$, *il existe un ensemble mesurable* $A_i(D) \subseteq M^{(i)}$ *de* μ*-mesure totale dans* $M^{(i)}$ *tel que* $A_i(D) \cap D = \emptyset$ *et tel que, pour tous* $x, y \in A_i(D)$, *il existe un entier* $k \geq 2$, *une suite de fibres contractantes* $(\gamma_1^s, \ldots, \gamma_k^s)$ *et une suite de fibres dilatantes* $(\gamma_1^u, \ldots, \gamma_k^u)$ *tels que* $x \in \gamma_1^s, y \in \gamma_u^k$ *et tels que, pour tout* $j = 1, \ldots, k$ *et tout* $j' = 1, k-1$, *les intersections* $\gamma_j^s \cap \gamma_j^u$ *et* $\gamma_{j'}^u, \cap \gamma_{j'+1}^s$ *sont non vides et contenues dans* $A_i(D)$.

Ce résultat prouvé dams [8,3] a permis d'établir l'ergodicité de $(\overline{M},\ \overline{\mu},\ \overline{T})$ en reprenant l'argument utilisé par Hopf pour l'étude du flot géodésique. Nous allons nous inspirer de cette preuve afin d'établir le theorème A.

4. Preuve du théorème A

Soit une fonction lipschitzienne $g : M \to \mathbf{R}_+^* \mu$-intégrable. Comme $(M,\ \mu,\ T)$ est récurrent, on a $\sum_{k\geq 0} g \circ T^{\pm k} = +\infty$ μ-p.p.. Soit une fonction lipschitzienne $f : M \to \mathbf{R}\mu$-intégrable. On pose $\tilde{f}^{\pm} := \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^{\pm k}}{\sum_{k=0}^{n-1} g \circ T^{\pm k}}$. Notons $B^{\pm}$ les ensembles des points $y \in M$ tels que $\Sigma_{k\geq 0} g \circ T^{\pm k}(y) = +\infty$ et $\tilde{f}^{\pm}(y)$ existe et B l'ensemble des points $y \in B^+ \cap B^-$ tels que $\tilde{f}^+(y) = \tilde{f}^-(y)$; on note alors $\tilde{f}(y)$ leur valeur commune. D'après le théorème de Hopf en mesure infinie, on a $\mu(B^c) = 0$ et $\tilde{f} = \mathbf{E}_{g\mu}[\frac{f}{g}|\mathcal{I}]$ μ-presque partout (en notant $\mathcal{I}$ la tribu des invariants). On remarque que, pour toute fibre contractante γ^s (resp. dilatante γ^u) , si $\gamma^s \cap B^+ \neq \emptyset$ (resp. si $\gamma^u \cap B^- \neq \emptyset$), alors on a $\gamma^s \subseteq B^+$ (resp. $\gamma^u \subseteq B^-$) et $\tilde{f}^+$ (resp. $\tilde{f}^-$ est constante sur γ^s (resp. γ^u), d'après les propriétés de contraction des fibres contractantes et dilatantes et l'invariance de $\tilde{f}^{\pm}$ par $T^{\pm 1}$ Le théorème du Zig-Zag pour $D = B^c$ nous assure alors que $\tilde{f}$ est μ-presque partout constante sur chaque $M^{(i)}$. On conclut que $\tilde{f}$ est μ-presque partout constante, en montrant que pour tous $i, j \in \mathcal{J}$, il existe $l \geq 1$ et $(i_0, \ldots, i_l) \in \mathcal{J}^{l+1}$ (avec $i_0 = i$ et $i_l = j$) tel que $T(M^{(i_k)}) \cap M^{(i_{k+1})} \neq \emptyset$, pour tout $k = 0, \ldots, l-1$. Par densité des fonctions lipschitziennes μ-intégrables dans L^1, on en déduit que, pour tout f dans L^1, $\tilde{f} = \mathbf{E}_{g\mu}[\frac{f}{g}|\mathcal{I}]$ est constante μ-presque partout. Si A est μ-presque partout invariant, on aura μ-presque partout les égalités suivantes : $\mathbf{1}_A = \mathbf{E}_{g\mu}[\mathbf{1}_A|\mathcal{I}] = \widetilde{\mathbf{1}_A g} = C^{te}$. Ainsi, les seuls ensembles mesurable invariants sont les ensembles A vérifiant $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A^c) =$.

On conclut en montrant que, pour tout système dynamique probabilisé $(N,\ \nu,\ S)$ ergodique inversible, le système $(M \times N,\ \mu \otimes \nu,\ T \times S)$ est ergodique.

Références

[1] Bunimovich L., Sinai Ya., Statistical properties of lorentz gaz with periodic configuration of scatterers. Comm. Math. Phys. (1981), 78, 479-497.

[2] Bunimovich L., Chernov N., Sinai Ya., Statistical properties of two-dimensional hyperbolic billiards, Russ. Math. Survey (1991), 46(4), 47-106.

[3] Chernov N., Sinai Y., Ergodic properties of certain systems of two-dimensional discs and three-dimensional balls, Russ. Math Survey (1987), 42(3), 181-207.

[4] Conze J.-P., Sur un critère de récurrence en dimension 2 pour les marches stationnaires, applications, Erg. Th. & Dyn. Sys (1999), 19, 1233-1245.

[5] Gallavotti G., Ornstein D., Billiards and Bernoulli schemes, Comm. Math. Phys. (1974), 38, 83-101.

[6] Pène F., Applications des propriétés stochastiques du billard dispersif, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I (2000), 1103-1106.

[7] Schmidt K., On joint recurrence, C.R. Acad. Sci., Paris, Sér. I (1998), 327, 837-842.

[8] Sinai Y., Dynamical systems with elastic reflections, Russ. Math. Survey (1970), 25(1), 137-189.

[9] Young L-S., Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity, Ann. of Math. (1998), 147, 585-650.

Françoise Pène
UB0
Département de Mathématiques
29285 Brest Cedex
France
fpene@maths.univ-rennes1.fr