Instabilité des solutions rapidement oscillantes dans le cadre des équations différentielles à retard

Sophie Bismuth

Considérons l'équation

$$\dot{x}(t) = -h(x(t-1)) + f(x(t)) \quad \text{pour} \quad t \geq 0, \quad x_{|[-1,0]} = x_0 \tag{1}$$

où $x_0 \in \mathcal{C}([-1,0])$, h est définie comme suit :

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ impaire, } h(y) = \begin{cases} a \text{ si } 0 < y < c \\ b \text{ si } y \geq c \end{cases} \quad \text{avec } a > b > 0 \text{ et } c > 0 \tag{2}$$

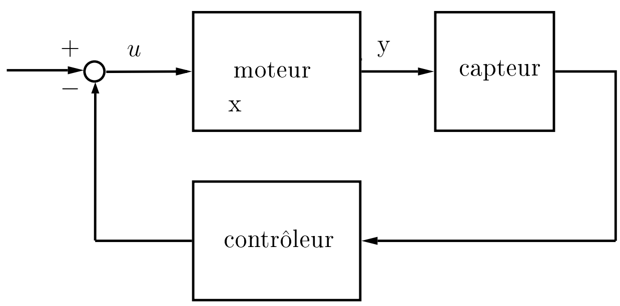
et

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ est une fonction mesurable au sens de Lebesgue,} \\ \text{impaire et telle que ess sup }_{x\in\mathbb{R}}|f(x)| < b \end{array}\right\} \tag{3}$$

La motivation à considérer de tels systèmes provient d'un problème d'automatique qui consiste à réguler la richesse des gaz d'échappement du moteur (vu comme un système à retard du premier ordre) qui peut être mesurée par un capteur tout ou rien : elle n'indique que la position par rapport à la stoechiometrie- le gaz est riche ou pauvre. Les retards interviennent entre admission et echappement des gaz et lors du transport jusqu'au capteur.

On note

u = l'entrée = quantité d'essence
y = la sortie = richesse du gaz (carburant /air)
x = l'état du système à l'instant t



Le capteur délivre la mesure avec retard sgn(carburarit/air − 1) . L'information est instan- tanément transmise au contrôleur, qui fournira les modifications à apporter au mélange carburant /air.

L'équation d'état du système s'écrit sous la forme

$$\dot{x}(t) = -sgnx(t-1) + f(x(t)) \tag{4}$$

L'équation (1) est un cas particulier d'une classe plus générale de systèmes du premier ordre, donnée par

$$\dot{x}(t) = g(x(t),\ x(t-1)) \tag{5}$$

On dit que g satisfait une "condition de feedback négatif" , notée $(\star)$, si $g(x,\ y) < 0$ pour $x > 0$ et $y > 0, g(x,\ y) > 0$ pour $x < 0$ et $y < 0, yg(0,\ y) < 0$ pour $y \neq 0$.
Si g satisfait des conditions de régularité et en particulier la condition de feedback négatif $(\star)$, l'équation (5) a une solution périodique lentement oscillante et cette solution est stable, voir Mallet-Paret and Nussbaum [5] et Mallet-Paret et al [6]. Des résultats plus géneraux sont prouvés dans [4, 5, 6].
Si $g(x,\ y) = f(x)-$ sgn y, où f est C^1 et $\sup|f(x)| < 1$, la condition $(\star)$ est satisfaite. L'équation (5) s'écrit comme (4). Bien que g ne soit pas régulier dans oe cas, une e tude complète de (4) a été faite. On défim·tV $\prime(t)$ le nombre de zéros de x sur l'intervalle $[t'-1,\ t')$ où t' est le premier temps après t tel que $x(t') = 0$. Fridmann et al [3] ont montré que si $V(0)$ est fini, alors $V(t)$ est pair et décroissant. Pour tout $n \in$ N, il existe une umque solution périodique telle que $V(t) \equiv 2n$, voir [3].

L'équation (1,2,3) est encore un cas particulier de (5) où g satisfait la condition de feedback négative $(\star)$. Dans cet article, on présente les nouveaux résultats obtenus dans [2], dans le cadre de l'équation (1), qui généralisent ceux établis dans [3, 1]. On donne tout d'abord quelques définitions :

Définition. Fonction rapidement oscillante : Une fonction continue x définie sur $[t_0, +\infty[$est appelée rapidement oscillante (par rapport au retard 1) s'il existe $t, t' > t_0$ tels que $t \neq t', |t-t'| < 1$ et $x(t) = x(t') = 0$.

Définition. Fonction périodique à 2 phases : Une fonction continue périodique x, de période $T > 0$, définie sur $[t_0, +\infty[$ est appelée périodique à 2 phases s'il existe $t \geq t_0$ tel que $x_{1_{(t,t+T)}}$ change de signe exactement une fois.

Définition. Fonction périodique symetrique : Une fonction continue périodique x, de période $T > 0$, définie sur $[t_0, +\infty[$ est dite symétrique si $x(t+\frac{T}{2}) = -x(t)$ pour $t \geq t_0$.

Nussbaum a prouvé l'existence de solutions périodiques rapidement oscillantes de l'équation (1,2,3), voir [7].

Soit x une solution of (1) correspondant à une solution initiale x_0 avec un nombre fini de zéros. On définit l'ensemble Z de points où x s'annule et change de signe, et le cardinal V du nombre de zéros avec changement de signe :

$$Z = \{t \geq -1 : x(t) = 0 \text{ et } \forall \epsilon > 0\ \exists\ t' \in (t, t+\epsilon], t'' \in [t-\epsilon, t) / x(t')\, x(t'') < 0\},$$

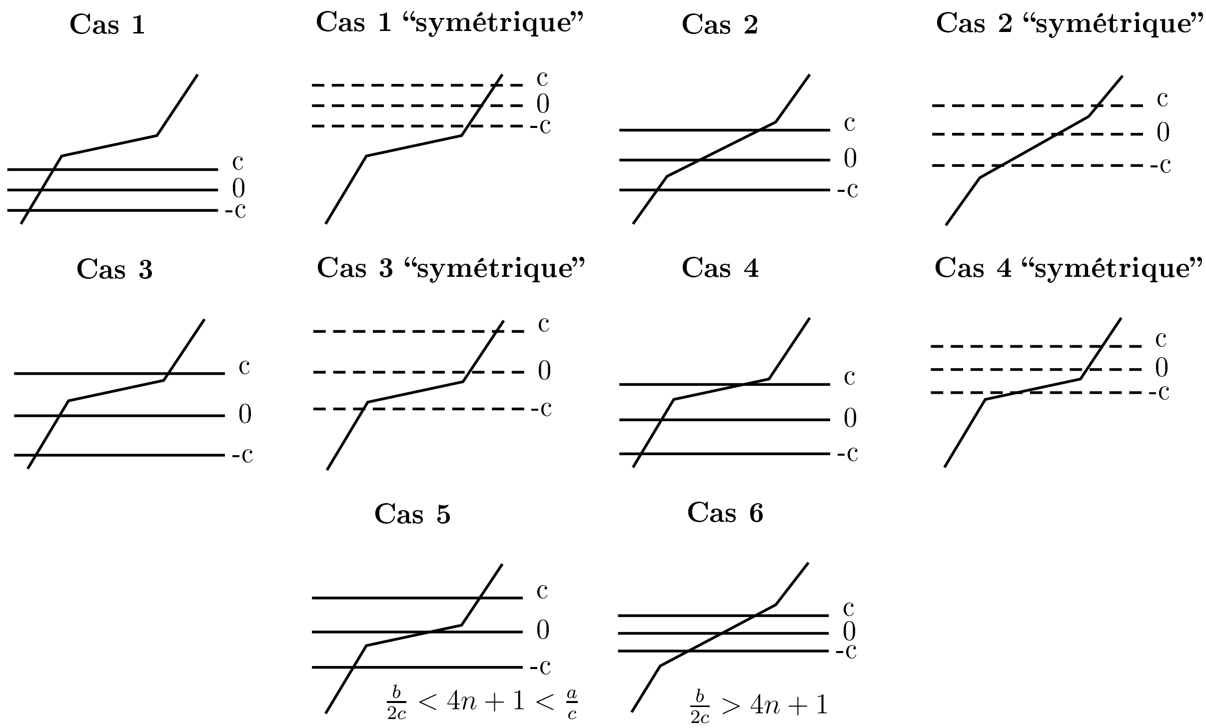
$$V(t) = \operatorname{card}(Z \cap [t'-1, t')), \quad \text{où} \quad t' = \inf\{s \geq t, s \in Z\}$$

On note $V(t) = \infty$ si $Z \cap [t'-1,\ t')$ est infini.

Théorème. On considère l'équation

$$\dot{x}(t) = -h(x(t-1)) \quad t \geq 0, \quad x_{|[-1,0]} = x_0, \tag{6}$$

où h est définie par (2), et $x_0 \in C([-1,0])$ a un nombre fini de zéros. Pour tout x_0 avec un nombre fini de zéros, il existe une unique fonction $x \in \mathcal{C}([-1,\ +\infty[)$ absolument continue sur $[0,\ +\infty)$, satisfaisant l'équation (6) presque partout. Pour une telle solution, $V(t)$ est décroissant et pair. Pour toute solution périodique de (6), $V(t)$ est constant. Les solutions périodiques à 2 phases symétriques rapidement oscillantes, $x(t)$ telles que $\|x\|_\infty > c$ sont caractérisées par les cas 2, 3, 4, 5 et 6, définis ci-dessous $(V(t) \equiv 2n)$. Ces solutions périodiques sont toutes instables.



La preuve est écrite dans [2].

Théorème. On considère l'équation

$$\dot{x}(t) = -h(x(t-1)) + f(x(t)) \quad \text{pour} \quad t \geq 0, \quad x_{|[-1,0]} = x_0 \tag{7}$$

où h est définie par (2), f satisfait (3) et $x_0 \in C([-1,0])$ a un nombre fini de zéros. Pour toute solution de (7), $V(t)$ est non croissant et pair. Pour toute solution périodique de (7), $V(t)$ est constant. Les solutions périodiques à 2 phases symétriques rapidement oscillantes, $x(t)$ telles que $\|x\|_\infty > c$ sont caractérisées qualitativement par les cas 2, 3, 4, 5 et 6 définis au-dessus excepté que les segments de droite sont remplacés par des courbes. Ces solutions périodiques sont toutes instables.

La preuve est écrite dans [2].

Références

[1] Akian M., Bliman P.-A. et Sorine Kl. : P.I. Control of nonlinear oscillations for a system with delay, *INRIA, Rapport de recherche*, n. 3422, 1998.

[2] Akian M. et Bismuth S. : Instability of rapidly-oscillating periodic solutions for discontinuous differential delay equations, *J. Diff. and Int. Equations*, 15 (1), p. 53-90, 2002.

[3] Fridman L., Fridman E. et Shustin E. : Steady modes and sliding modes in the relay control systems with time delay, *Proc. of the 35th conference on decision and control* p. 4601-4606, Kobe, Japan, 1996.

[4] Mallet-Paret J. : Morse decomposition for delay-differential equations, *J. Diff. Equations*, 72, p. 270-315, 1988.

[5] Mallet-Paret J. et Nussbaum R.D. : Boundary layer phenomena for differential-delay equations with state dependent time lags : II, *J. für die Reine und Angewandte Math.*, 477, p. 129-197, 1996.

[6] Mallet-Paret J., Nussbaum R.D. et Paraskevopoulos P. : Periodic solutions for functional differential equations with multiple state dependent time lags, *Topological Meth. in Nonlinear Anal.*, 3, p. 101-162, 1994.

[7] Nussbaum R.D. : “Personal communication” , 1999.

Sophie Bismuth
Pôle universitaire Léonard de Vinci
92916 Paris la Défense Cedex
Sophie.Bismuth@devinci.fr