Une version équivariante du théorème de non-réalisabilitel de Kuhn-Schwartz

Dagmar M. Meyer

(travail en collaboration avec Dorra Bourguiba)

Soit p un nombre premier qui est arbitraire mais fixe. Dans cet exposé nous allons démontrer une version équivariante du théorème suivant qui est dû à Lionel Schwartz après une conjecture de Nick Kuhn :

Théorème 1 ([4]) *Soit X un espace topologique. Si la cohomologie H^*X est finiment engendrée sur l'algèbre de Steenrod, alors elle est de dimension finie en tant que $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel gradué.*

Ici et dans ce qui suit H^*X désigne la cohomologie mod p de X.

Tout d'abord, rappelons la définition de l'algèbre de Steenrod : on considère la $\mathbb{F}_p$-algèbre graduée associative unitaire librement engendrée par les symboles Sq^i quand $p = 2$ et par les symboles P^i et β quand $p > 2$, où $i = 1, 2, \ldots$. Les degrés de ces symboles sont $|\mathrm{Sq}^i| = i$, $|\mathrm{P}^i| = 2i(p-1)$ et $|\beta| = 1$. Pour $i = 0$ on définit également $\mathrm{Sq}^0 := 1$ resp. $\mathrm{P}^0 := 1$. L'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}$ est le quotient de cette algèbre par l'idéal engendré par un certain ensemble de relations dites "relations d'Adem". Elle possède aussi la structure d'une coalgèbre ; en fait, c'est une algèbre de Hopf. La cohomologie mod p d'un espace topologique est un $\mathcal{A}$-module, munie du produit $\cup$ elle est aussi une $\mathcal{A}$-algèbre, et ces deux structures satisfont à certaines conditions d'instabilité. En fait, cet exemple est à l'origine des deux premières définitions ci-dessous :

Définition 1 • *Un A-module M à gauche est dit instable si pour tout $x \in M$, on a* $\mathrm{Sq}^i x = 0$ *quand* $i > |x|$ *(si* $p = 2$*) et* $\beta^e \mathrm{P}^i x = 0$ *quand* $2i + e > |x|, e \in \{0, 1\}$ *(si* $p > 2$*) . On désignera* par *$\mathcal{U}$ la catégorie des $\mathcal{A}$-modules instables avec des applications $\mathcal{A}$-linéaires de degré zéro. Le produit tensoriel sur $\mathbb{F}_p$ de deux $\mathcal{A}$-modules instables, avec la structure de $\mathcal{A}$-module qui provient de la structure de coalgèbre de $\mathcal{A}$, est de nouveau un objet dans $\mathcal{U}$.*

• *Une $\mathcal{A}$-algèbre instable est un module $K \in \mathcal{U}$ qui est à la fois une $\mathcal{A}$-algèbre associative commutative (dans le sens gradué) unitaire telle que* $\mathrm{Sq}^{|x|} x = x^2$ *(si* $p = 2$*) resp.* $\mathrm{P}^{|x|/2} x = x^p$ *quand* $|x|$ *est pair (si* $p > 2$*) . On note $\mathcal{K}$ la catégorie des $\mathcal{A}$-algèbres instables avec des $\mathcal{U}$-morphismes qui respectent la multiplication.*

• *Soit $K \in \mathcal{K}$. Un $K - \mathcal{A}$-module instable est un module $M \in \mathcal{U}$ avec une application $\sigma : K \otimes M \to M$ dans $\mathcal{U}$ qui fait de M un K-module. On désigne par $K - \mathcal{U}$ la catégorie dont les objets sont les $K - \mathcal{A}$-modules instables et dont les morphismes sont les $\mathcal{U}$-morphismes qui sont K-linéaires.*

Notons que si $K = \mathbb{F}_p$, la catégorie $K - \mathcal{U}$ coïncide avec $\mathcal{U}$.

L'intérêt des catégories $K - \mathcal{U}$ tient à l'observation suivante : soit G un groupe topologique et X un G-espace. La projection $q_G : EG \times_G X \to EG \times_G \{pt\} \simeq BG$ de la construction de Borel sur l'espace classifiant de G induit une application $q_G^* : H^*BG \to H^*(EG \times_G X) =: H_G^*X$ qui fait de la cohomologie équivariante H_G^*X de X un $H^*BG - \mathcal{A}$-module instable. Voici le théorème que nous allons démontrer :

Théorème 2 ([1]) *Soit G un groupe de Lie compact et X un G-espace. Si la cohomologie équivariante H_G^*X de X est de type fini en tant qu'objet dans $H^*BG - \mathcal{U}$, alors elle est finiment engendrée sur H^*BG.*

Ici, l'expression "H_G^*X est de type fini en tant qu'objet dans $H^*BG - \mathcal{U}$" signifie que l'$\mathcal{A}$-module instable $H_G^*X \otimes_{H^*BG} \mathbb{F}_p$ (où $\mathbb{F}_p$ est un H^*BG-module via l'augmentation) est finiment engendré sur $\mathcal{A}$.

La démonstration de ce théorème se fait dans deux étapes : premièrement on réduit le problème au cas où G est un groupe unitaire, après on procède par un argument de récurrence sur n; le cas $n = 0$ correspondant au Théorème 1.

Pour la réduction on utilise le fait que pour tout groupe de Lie compact il y a un plongement $G \xrightarrow{\rho} U(n)$ pour un certain nombre n. Soit maintenant X un G-espace. Alors $U(n) \times_G X$ est un $U(n)$-espace, et le couple $(\rho,\ j) : (G,\ X) \to (U(n), U(n) \times_G X)$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} EG \times_G X & \xrightarrow{E\rho \times_\rho j} & EU(n) \times_{U(n)} (U(n) \times_G X) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle q_G} & & \Big\downarrow {\scriptstyle q_{U(n)}} \\ BG & \xrightarrow{B\rho} & BU(n) \end{array}$$

Comme $EU(n)$ est un G-espace libre contractible, il peut être utilisé comme modèle pour EG. Avec cette observation il est clair que l'application induite $(j)_{hp}^* : H_{U(n)}^*(U(n) \times_G X) \to H_G^*X$ est un isomorphisme de $H^*BU(n) - \mathcal{A}$-modules instables. On observe également que le module H^*BG est finiment engendré sur $H^*BU(n)$ (cf. [3, Cor. 2.4]), ce qui entraîne qu'il est de type fini en tant qu'objet dans $H^*BU(n) - \mathcal{U}$. Maintenant il n'est pas difficile de voir que pour démontrer le théorème 2 il suffit de considérer le cas $G = U(n)$. Supposons alors que X est un $U(n)$-espace, $n > 0$, tel que $H_{U(n)}^*X$ est de type fini en tant qu'objet dans $H^*BU(n) - \mathcal{U}$, et supposons que le théorème a été démontré pour tout $\hat{n}$ avec $0 \leq \hat{n} < n$. La démonstration que $H_{U(n)}^*X$ est finiment engendré sur $H^*BU(n)$ est conséquence de l'observation suivante :

Proposition 1 *Soit X un $U(n)$-espace. On a une suite exacte courte dans la catégorie $H^*BU(n-1) - \mathcal{U}$ de la forme*

$$0 \to H^*BU(n-1) \otimes_{H^*BU(n)} H_{U(n)}^*X \to H_{U(n-1)}^*X \to \Sigma^{2n-1}\tau\left(n-1; H_{U(n)}^*X\right) \to 0$$

où

$$\tau\left(n-1; H_{U(n)}^*X\right) := \left\{m \in H_{U(n)}^*X | c_n m = 0\right\}$$

est considéré comme objet dans $H^*BU(n-1)-\mathcal{U}$ via l'inclusion canonique $H^*BU(n-1) \to H^*BU(n)$ et $c_n \in H^*BU(n) \cong \Gamma_p[c_1, \ldots, c_n]$ désigne la n-ième classe de Chern universelle.

Pour la demonstration de cette proposition on considère 1'inclusion canonique $\delta : U(n-1) \to U(n)$ et le diagramme "pullback" suivant :

$$\begin{array}{ccc} EU(n-1) \times_{U(n-1)} X & \stackrel{qv_{(n-1)}}{\longrightarrow} & BU(n-1) \\ {\scriptstyle E\delta\times_\delta \mathrm{id}}\Big\downarrow & & {\scriptstyle B\delta}\Big\downarrow \\ EU(n) \times_{U(n)} X & \stackrel{q_{U(n)}}{\longrightarrow} & BU(n) \end{array}$$

Les deux colonnes sont des fibrations sphériques avec fibre S^{2n-1} Nous désignons par $\{E_r^{*,*}[X]\}$ et $\{E_r^{*,*}[*]\}$ les suites spectrales de Leray-Serre (en cohomologie mod p) associées aux fibrations à gauche et à droite respectivement. On observe que $\{E_{r'}^{**}[X]\}$ est un module sur $\{E_r^{*,*}[*]\}$; cette structure est compatible avec l'action de l'algèbre de Steenrod sur ces deux suites spectrales. De plus on sait que $\{E_{r'}^{**}[X]\}$ converge vers son aboutissement $H^*_{U(n-1)}X$ en tant que $H^*BU(n-1) - \mathcal{A}$ module (cf. [1, Appendix A])

Maintenant à partir d'une analyse du terme E_2 de la suite spectrale $\{E_{\mathrm{r}}^{*,*}[X]\}$ on obtient la suite exacte courte désirée. En effet, il s'agit d'une partie de la suite exacte longue de Gysin associée à la fibration sphérique $E\delta\times_\delta$ id. Ce qui est important est le fait que la partie qui nous intéresse est vraiment une suite exacte dans la catégorie $H^*BU(n-1)-\mathcal{U}$. En utilisant la proposition 1 on achève la démonstration du théorème 2 par le raisonnement suivant : par hypothèse $H^*_{U(n)}X$ est de type fini en tant qu'objet dans $H^*BU(n)-\mathcal{U}$ qui est une catégorie localement noetherienne ([2, Sect. 5.2]). L'action de $H^*BU(n)$ sur le sous-objet $\tau(n-1; H^*_{U(n)}X)$ de $H^*_{U(n)}X$ factorise par $B\delta^*$; par conséquent $\tau(n-1; H^*_{U(n)}X)$ est de type fini en tant qu'objet dans $H^*BU(n-1)-\mathcal{U}$. Évidemment $H^*BU(n-1)\otimes_{H^*BU(n)} H^*_{U(n)}X$ est lui aussi de type fini en tant qu'objet dans cette même catégorie. Il en résulte que le terme au milieu de la suite exacte de la proposition 1 a la même propriété.

Maintenant l'hypothèse d'induction dit que $H^*_{U(n-1)}X$ est en fait finiment engendré sur $H^*BU(n-1)$. Puisque la $\mathbb{F}_p$-algèbre $H^*BU(n-1)$ est noethérienne on déduit que le $H^*BU(n-1)$-sous-module $H^*BU(n-1)\otimes_{H^*BU(n\}} H^*_{U(n)}X$ de $H^*_{U(n-1)}X$ est lui aussi finiment engendré sur $H^*BU(n-1)$. Ceci implique que $H^*_{U(n)}X$ est finiment engendré sur $H^*BU(n)$.

Références

[1] *D. Bourguiba, D. M. Meyer*, An equivariant version of the Kuhn-Schwartz non-realizability theorem, à paraître aux Math. Proc. Cambridge Phil. Soc

[2] *D. M. Meyer*, Injective objects in categories of unstable K-modules, *Bonner Mathematische Schriften* **316** (1999).

[3] *D. Quillen*, The spectrum of an equivariant cohomology ring I, *Ann. of Math.* **94** (1971), 549-572

[4] *L. Schwartz*, A propos de la conjecture de non-réalisation due à N. Kuhn, *Invent. Math.* **134** (1998), 211–227

Dagmar M. Meyer
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen
Bunsenstr. 3-5
37073 Göttingen
Allemagne
meyerd@member.ams.org
http ://www.uni-math.gwdg.de/dagmar