Inégalités pour la constante de temps en percolation de premier passage

Régine Marchand

La percolation de premier passage a été introduite en 1965 par Hammersley et Welsh comme modèle pour les matériaux poreux (voir aussi [K84] pour les principaux résultats). Pour représenter le médium poreux, nous considérons le graphe $\mathbf{Z}^2$, que nous munissons de l'ensemble $\mathbf{E}_2$ des arêtes joignant les plus proches voisins pour la norme $\|.\|_1$, définie sur $\mathbf{R}^2$ par $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$. Ces arêtes modélisent les canaux microscopiques du matériau susceptibles de laisser passer un liquide. Chaque arête est alors munie d'un temps de passage aléatoire $t(e)$ représentant le temps nécessaire à la traversée de l'arête.

Nous supposons, pour la suite, que les $(t(e))_{e\in\mathbf{E_2}}$ sont indépendants et identiquement distribués. Notons F leur fonction de répartition commune, sur laquelle nous faisons en outre les hypothèses (H) suivantes : F est de moyenne finie, son support $\operatorname{supp} F$ est inclu dans $\mathbf{R}^+$ et $\inf \operatorname{supp} F = 1$. Remarquons que F n'est pas supposée continue a priori. Le support de F désigne ici l'ensemble des points où F est strictement croissante, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs effectivement prises par le temps de passage t.

Le temps de passage d'un chemin est la somme des temps de passage des arêtes qui le composent et le temps de passage $t(x,y)$ entre deux points x et y de $\mathbf{Z}^2$ est l'infimum des temps de passage de tous les chemins joignant x à y, définition que l'on étend aux points de $\mathbf{R}^2$ en considérant les plus proches voisins. Cette grandeur représente le premier instant où un liquide, injecté en x au temps $t = 0$ atteindra le point y. Nous nous intéressons en particulier à l'ensemble des points atteints à partir de l'origine au temps n : $A(n) = \{z \in \mathbf{R}^2, t(0,z) \leq n\}$.

Ceci nous donne une description microscopique du milieu poreux. Afin d'en déduire des informations macroscopiques, nous recherchons des propriétés asymptotiques pour ce modèle.

Question 1 Quel est, pour x fixé, le comportement de $(t(0,nx))_{n\in\mathbf{N}}$?

Des techniques de théorème ergodique sous-additif permettent de prouver l'existence d'une vitesse directionnelle :

$$\forall x \in \mathbf{R}^2, \lim_{n\to+\infty} \frac{t(0,nx)}{n} = \mu(x) = \inf_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{Et(0,nx)}{n}$$

cette convergence ayant lieu presque sÃ»rement et dans L^1. L'application $x \mapsto \mu(x)$ est une norme sur $\mathbf{R}^2$, on notera A sa boule unité et $\mu = \mu((0,1))$ sera appelée constante de temps du modèle de percolation de premier passage associé à F.

Question 2 Quel est le comportement de $(A(n))_{n\in\mathbf{N}}$?

Si F a de plus un second moment fini, Cox et Durret, dans [CD81], prouvent le théorème de forme asymptotique suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, P\left((1-\varepsilon)A \subset \frac{A(n)}{n} \subset (1+\varepsilon)A \text{ pour } n \text{ suffisamment grand }\right) = 1.$$

L'ensemble A décrit donc le comportement des sites mouillés au temps n, renormalisé par n : on l'appelle forme asymptotique du modèle de percolation de premier passage associé à F. C'est un ensemble compact convexe de $\mathbf{R}^2$, déterministe.

Question 3 Peut-on calculer μ ou A en fonction de F ?

Le calcul de μ, sans parler de celui de A, est un problème ardu, non résolu pour l'instant. Nous sommes donc particulièrement intéressés par les problèmes d'approximation. Ainsi, si $(F_n)_{n\in\mathrm{N}}$ converge faiblement vers F, un résultat de continuité de [CK81] assure que $(\mu_n)_{n\in\mathrm{N}}$ tend vers μ, et, en un certain sens, $(A_n)_{n\in\mathrm{N}}$ tend vers A. Pourrait-on faire mieux et trouver une approximation F, obtenue par troncature par exemple, ayant même constante de temps ou même forme asymptotique que F ? Notre travail vise à répondre à cette question, en étendant un résultat de Van den Berg et Kesten, dans [vdBK93]. Nous l'exposons dans le cadre de la domination stochastique :

Définition : soit F et $\tilde{F}$ deux fonctions de répartition sur $\mathbf{R}$ telles que pour tout réel $t, F(t) < \tilde{F}(t)$; on dit alors que F domine stochastiquement $\tilde{F}$. Si F et $\tilde{F}$ sont de plus distinctes, on dit que la domination est stricte.

Un couplage des deux fonctions de répartition permet dans ce cas de voir que $\tilde{\mu} \leq \mu$ et $A \subset \tilde{A}$. Notre problème se reformule en ces termes : peut-on trouver une fonction de répartition F vérifiant les hypothèses (H) et une fonction de répartition $\tilde{F}$ sur $\mathbf{R}^+$, de moyenne finie, strictement dominée par F et telle que $\tilde{\mu} = \mu$? Notons $\vec{p_c}$ le seuil de percolation critique en percolation orientée sur les arêtes de $\mathbf{Z}^2$ (voir [D84]).

Théorème 1 (de comparaison) Soit F vérifiant (H) et telle que $F(1) > \vec{p_c}$. Soit F une fonction de répartition sur $\mathbf{R}^+$, de moyenne finie, strictement dominée par F. Alors $\tilde{\mu} < \mu$.

Van den Berg et Kesten, dans [vdBK93], ont prouvé le résultat analogue sous la condition $F(1) < \vec{p_c}$. La suite s'organise de la faÃ§on suivante : dans un premier temps, nous verrons comment l'hypothèse $F(1) < \vec{p_c}$ intervient dans la démonstration de Van den Berg et Kesten ; ceci nous conduira à étudier, dans le cas $F(1) > \vec{p_c}$ l'existence d'un bord plat de la forme asymptotique A. Dans un deuxième temps, nous verrons comment la détermination exacte de ce bord plat permet d'obtenir l'extension du théorème de Van den Berg et Kesten dans ce cas.

Détermination du bord plat de la forme asymptotique :

On suppose que F vérifie les hypothèses (H).

Si $F(1) < \vec{p_c}$, alors avec une grande probabilité, il n'existe pas, si x et y sont suffisamment éloignés, de chemin joignant x à y et comportant exactement $\|y-x\|_1$ arêtes de temps de passage 1. En effet, un tel chemin constituerait un chemin ouvert orienté dans le modèle de percolation orientée sous-critique de paramètre $F(1)$. En utilisant un principe de grandes déviations pour la percolation orientée sous-critique et un procédé de renormalisation, Van den Berg et Kesten montrent l'existence de trois constantes strictement positives δ, A, B telles que pour tous points x et y de $\mathbf{Z}^2$:

$$(R) P\left(t(x,y) \leq (1+\delta)\|y-x\|_1\right) \leq A \exp\left(-B\|y-x\|_1\right).$$

Un couplage de F et $\tilde{F}$ permet alors d'utiliser l'excédent δn de temps le long du chemin de temps de passage t minimal entre 0 et n pour modifier ce chemin de faÃ§on à ce qu'il utilise, avec une grande probabilité, un nombre proportionnel à n d'arêtes telles que $\tilde{t}(e) < t(e) - s$, avec $s > 0$. On en déduit alors que $\tilde{\mu} < \mu$.

Si $F(1) > \vec{p_c}$, le résultat (R) n'est plus vrai : il existe avec une probabilité strictement positive, des chemins infinis orientés ne contenant que des arêtes de temps 1. Le long de ces chemins, on ne peut pas espérer, si inf supp$F = 1$, trouver des arêtes telles que $\tilde{t}(e) < t(e) - s$. La première étape consiste donc à déterminer les directions dans lesquelles de tels chemins existent, c'est-à-dire les x de $\mathbf{R}^2$ tels que $\mu(x) = \|x\|_1$. Le résultat suivant généralise un théorème de Durrett et Liggett dans [DL81] :

Théorème 2 (bord plat) Soit F vérifiant (H) et telle que $F(1) = p > \vec{p_c}$ Alors la forme asymptotique A du modèle de percolation de premier passage associée à F est incluse dans $\{x \in \mathbf{R}^2, \|x\|_1 \leq 1\}$ et admet un bord plat entièrement déterminé par la masse affectée à 1 par F :

$$A \cap \left\{x \in \mathbf{R}^2, \|x\|_1 = 1\right\} \cap \left(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+\right) = [M_p, N_p],$$

où M_p est le point de coordonnées $(\beta_p, 1-\beta_p)$, N_p est le point symétrique de M_p par rapport à la première bissectrice, $\beta_p = \frac{1}{2} + \frac{\alpha_p}{\sqrt{2}}$ et α_p est la vitesse asymptotique dans le modèle de percolation orientée de paramètre $p > \vec{p_c}$ sur les arêtes de $\mathbf{Z}^2$ (voir [D84] pour une définition). La preuve de ce résultat repose sur l'étude du modèle de percolation orientée sous-jacent, et utilise un principe de grandes déviations en régime surcritique ainsi qu'un procédé de renormalisation pour obtenir, dans les directions n'appartenant pas au cône de percolation un analogue à (R).

Idée de la preuve du théorème de comparaison :

La convexité de la forme asymptotique A assure que $\frac{1}{\mu} \geq \beta_p$. Cependant, nous aurons besoin d'une inégalité stricte :

Théorème 3 $\frac{1}{\mu} > \beta_p$.

Ce résultat assure que pour joindre 0 à n, le moyen le plus économique en temps n'est pas d'essayer de n'utiliser que des portions orientées ne comportant que des arêtes de temps de passage 1, (et donc des portions dont la pente est dans le cône de percolation du modèle de percolation orientee sous-jacent) mais soit d'utiliser des arêtes de temps supérieur, soit d'utiliser plus d'arêtes que le minimum indispensable. La preuve de ce résultat utilise des techniques de chaÃ®nes de Markov et de temps d'arrêt dans le modèle de percolation orientée.

Le théorème 3 assure, via un résultat de grandes déviations, que de grandes portions du chemin de temps minimal entre 0 et n vont avoir une pente n'appartenant pas au cône de percolation du modèle de percolation orientée sous-jacent. Le long de ces portions, on peut alors construire, comme Van den Berg et Kesten, des raccourcis, ce qu'on ne pourrait pas faire sur une portion comportant le nombre minimal d'arêtes, et uniquement des arêtes de temps de passage 1. On en déduit alors le théorème de comparaison.

Conclusion :

Le théorème 1 peut s'étendre dans chaque direction n'appartenant pas au cône de percolation, ainsi qu'au cadre d'un ordre plus général sur les fonctions de répartition (voir [vdBK93]). Par contre, les théorèmes 2 et 3 utilisent fortement des techniques propres à la dimension 2 ; une extension du théorème de comparaison aux dimensions supérieures nécessiterait l'étude de la percolation orientée en dimension supérieure à 3, et en particulier la mise aux points de résultats de type grandes déviations.

Références

[vdBK93] Van den Berg, J., Kesten, H., Inequalities for the time constant in first-passage percolation, The Annals of Applied Probability, (1993), **vol 3, n1**, 56-80.

[C80] Cox, J. T., The time constant of first-passage percolation on the square lattice, Advances in Applied Probabilities, (1980), **n12**, 864-879.

[CD81] Cox, J. T., Durrett, R., Some limit theorems with necessary and sufficient conditions, The Annals of Probability, (1981), **vol 9, n4**, 583-603.

[CK81] Cox, J. T., Kesten, H., On the continuity of the time constant of first-passage percolation, Journal of Applied Probabilities, (1981), **n18**, 809-819.

[D84] Durrett, R., Oriented percolation in two dimensions, The Annals of Probability, (1984), **vol 12, n4**, 999-1040.

[DL81] Durrett, R., Liggett, T.M., The shape of the limit set in Richardson's growth model, The Annals of Probability, (1981), **vol 9, n2**, 186-193.

[HW65] Hammersley, J.M., Welsh, D.J.A., First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks and generalized renewal theory, Bernoulli, Bayes, Laplace Anniversary volume, J. Neyman and L.M. LeCam eds. Springer-Verlag, (1965), 61-110.

[K84] Kesten, H., Aspects of first passage percolation, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag 1180, Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour XIV, (1984).

[R73] Richardson, D., Random growth in a tesselation, Proc. Camb. Phil. Soc., (1973), **74**, 515.

Régine Marchand
Institut élie Cartan (Mathématiques)
Université Henri Poincaré Nancy 1
B.P. 239, F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex
France
marchand@iecn.u-nancy.fr