

Une formulation mixte en rotation potentiel vecteur convergente pour le problème de Stokes stationnaire tridimensionnel

Bilan des principaux résultats de these

Muriel Duloué

Depuis les années 70, le problème de Navier-Stokes stationnaire fait l'objet de nombreuses études mathématiques. Ce problème issu de la Mécanique des Fluides régit l'écoulement d'un fluide visqueux, newtonien, homogène et incompressible soumis à des forces extérieures. Lorsque le mouvement du fluide est suffisamment lent, ces équations se simplifient et portent le nom de système de Stokes.

Cette thèse est dédiée à l'étude de ces problèmes physiques formulés à partir de deux nouvelles inconnues non usuelles, la rotation et le potentiel vecteur, lesquelles sont directement liées à la vitesse du fluide considéré.

L'originalité des résultats théoriques obtenus porte sur trois points précis.

i) Tout d'abord, on travaille sur un ouvert borné simplement connexe de \mathbb{R}^3 à frontière connexe polyédrique auquel, *a priori*, le caractère convexe n'est pas imposé.

ii) Ensuite, on présente une formulation mixte en rotation potentiel vecteur (équivalente à celle en vitesse-pression) qui repose sur une décomposition de la rotation en une partie régulière et une partie harmonique. On développe une méthode conforme d'approximation basée sur les éléments de plus bas degré de Nédélec, laquelle se révèle inconditionnellement convergente. La partie régulière est traitée classiquement tandis qu'une perturbation de type stabilisation est introduite dans la formulation discrète standard de la partie harmonique. On obtient des résultats numériques plus précis que ceux donnés par les méthodes classiques. On présente les estimations *a priori* et *a posteriori*.

iii) Enfin, les propriétés de convergence mises à jour permettent de maîtriser le terme convectif non-linéaire des équations de Navier-Stokes en vertu de la théorie d'approximation de branches de solutions non singulières de Brezzi, Rappaz et Raviart.

Ce travail est une extension à la dimension trois des résultats bidimensionnels de Mohamed Amara et Christine Bernardi. A cette présentation réductrice, il faut néanmoins préciser que le problème de Stokes tridimensionnel formulé en rotation potentiel vecteur s'écrit sous une forme totalement différente de celui en dimension deux (ce dernier est un problème scalaire). Ainsi, le cadre fonctionnel associé au problème tridimensionnel n'est pas classique et a dû faire l'objet d'une étude précise.

Références

- [1] *R.A. Adams*, Sobolev Spaces, Academic Press (1975).
- [2] *M. Amara, C. Bernardi, M. Benyounes*, Error indicators for the Navier-Stokes equations in stream function and vorticity formulation, *Numerische Mathematik* **80** (1998), 181-206.

- [3] *M. Amara, F. Dabaghi*, An optimal C^0 finite element algorithm for the 2D biharmonic problem, Internal Report INRIA **3068** (1996).
- [4] *C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, V. Girault*, Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains, *Mathematical Methods in Applied Sciences*, vol. *21*, n° 9 (1998), 823-864.
- [5] *A. Bendali, J.-M. Dominguez, S. Gallic*, A variational approach for the vector potential formulation of the Stokes and Navier-Stokes problems in three-dimensional domains, *J. Math. Anal. Appl.* **107** (1985), 537-560.
- [6] *C. Bernardi, V. Girault, Y. Maday*, Mixed spectral element approximation of the Navier-Stokes equations in the stream-function and vorticity formulation, *IMA J. Numer. Anal.* **12** (1992), 565-608.
- [7] *F. Dubois*, Discrete vector potential representation of a divergence - free vector field in three-dimensional domains : numerical analysis of a model problem, *SIAM J. Numer. Anal.* **27** (1990), 1103-1141.
- [8] *M. Duloué*, Analyse Numérique des Problèmes d'Écoulement de Fluides, Ph. D. Thesis, Université de Pau et des Pays de l'Adour France, (janvier 2000).
- [9] *V. Girault, P.-A. Raviart*, Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms, Springer-Verlag (1986).
- [10] *J.-C. Nédélec*, A new family of mixed finite elements in \mathbb{R}^3 , *Numerische Mathematik* **50** (1986), 57-81.
- [11] *J.-C. Nédélec*, Elements finis mixtes incompressibles pour l'équation de Stokes dans \mathbb{R}^3 , *Numerische Mathematik* **39** (1982), 97-112.
- [12] *J. Peetre*, Another approach to elliptic boundary problems, *Pure Appl. Math. Sci.* **14** (1961), 711-731.
- [13] *V. Ruas*, On formulations of vorticity systems for a viscous incompressible flow with numerical applications, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* **74**- 1 (1994), 43-55.
- [14] *R. Temam*, Theory and Numerical Analysis of the Navier-Stokes equations, North-Holland (1977).

Duloué Muriel
 Université de Pau et des Pays de l'Adour
 Bâtiment I.P.R.A.
 Avenue de l'Université
 64000 Pau
 France
 Muriel.Duloue@wanadoo.fr
[http ://perso.wanadoo.fr/muriel.duloue](http://perso.wanadoo.fr/muriel.duloue)