Théorème de Brownawell-Waldschmidt en caractéristique finie

Sophie Dion

Introduction :

On rappelle qu'un nombre complexe est dit algébrique sur $\mathbb{Q}$, s'il annule au moins un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Dans le cas contraire, on dira qu'il est transcendant. Plus généralement, on dira que n nombres complexes sont algébriquement dépendants sur $\mathbb{Q}$, s'ils annulent au moins un polynôme non nul en n variables à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Dans le cas contraire, on dira qu'ils sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Depuis longtemps, on s'attache à montrer des résultats de transcendance. Ainsi, en 1873, Hermite montrait la transcendance de e ; en 1882, Lindemann prouvait celle de π.A la même période, on obtenait le théorème de Lindemann-Weierstrass :

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, algébriques sur $\mathbb{Q}$, et linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors, $e^{a_1}, \ldots, e^{a_n}$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Plus récemment, en 1996, Y. Nesterenko a prouvé que π et e^{π} sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$. En revanche, on ne sait toujours rien concernant l'indépendance algébrique de e et π. Notre intérêt porte ici, sur le théorème suivant, prouvé indépendamment par W.D. Brownawell [1] et M. Waldschmidt [5] en 1971 :

Théorème 1 -*Soient x_1 et x_2 (respectivement y_1 et y_2) des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ tels que $e^{xy_2}1$ et $e^{x_2y_2}$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$, alors deux au moins des nombres*

$$x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ e^{x_1y_1},\ e^{x_2y_1}$$

sont algébriquement indépendants.

Nous donnons un théorème analogue, dans un corps de caractéristique finie que nous allons définir.

Définition du cadre :

Soit p un nombre premier et q une puissance de p. On note $A = \Gamma_q[T], k = \Gamma_q(T)$ son corps des fractions, et $k_\infty = \Gamma_q((1/T))$ le complété de k pour la valuation $1/T$-adique que l'on prolonge à une clôture algébrique $\overline{k}$ (resp. $\overline{k}_\infty$) de k (resp. de k_∞). On note encore $C = (\overline{k}_\infty)_\infty$ le complété de $\overline{k}_\infty$. On sait alors que C est algébriquement clos. La valuation précedente se prolonge à C et la valeur absolue d'un élément de C est définie de la manière suivante :

$$\forall\alpha \in C, |\alpha| = q^{-v(\alpha)} = q^{\deg(\alpha)} \text{ avec } \deg(0) = -\infty.$$

On note $\tau : z \to z^q$ l'endomorphisme de Frobenius défini sur C, et $\overline{k}\{\tau\} = \{\sum_{i=0}^n a_i\tau^i | n \in$ N$, a_i \in k$ Un module de Drinfeld de rang $d \geq 1$ défim sur $\overline{k}$ est un homomorphisme d'anneaux $\varphi : \Gamma_q[T] \to \overline{k}\{\tau\}$ tel que :

$$\varphi(T) = T\tau^0 + \gamma_1\tau + \ldots + \gamma_d\tau^d,$$

où $\gamma_d \neq 0$. Il existe alors une unique fonction exponentielle e caractérisee par :

$$e'(0) = 1 \text{ et } \forall a \in A, e(az) = \varphi(a)(e(z)).$$

Le noyau de cette exponentielle est un A-module libre de rang d, c'est le réseau des périodes noté Λ. On notera R_Λ l'anneau des multiplications de Λ défim par :

$$R_\Lambda = \{\gamma \in C | \gamma\Lambda \subset \Lambda\}.$$

C'est un A-module auquel on peut prolonger φ. On note k_Λ le corps des fractions de R_Λ, c'est une extension de degré au plus d de k. Le tableau suivant donne les analogies entre la caractéristique nulle et la caractéristique finie :

en caractéristique 0	en caractéristique p
$\mathbb{Z}$	$A = \mathbb{F}_q[T]$
$\mathbb{Q}$	$k = \mathbb{F}_q(T)$
$\mathbb{R}$	$k_\infty = \mathbb{F}_q((1/T))$
$\mathbb{C}$	$\mathcal{C} = (\overline{k}_\infty)_\infty$
exp	e

Enoncé :
Théorème 2 -*Soient* $x_1, \ldots, x_\mu \in C, k_\Lambda$*-lineairement indépendants, soient de même* $y_1, \ldots, y_\nu C, k$*-lineairement indépendants. On suppose que pour* $i = 1, \ldots, \mu, e(x_i y_\nu)$ *est algébrique sur* k*.*

Si $\nu\mu \geq \nu + d\mu$ *alors deux au moins des nombres* $x_i, y_j, e(x_i y_j)$ *(pour* $i = 1, \ldots, \mu$ *et* $j = 1, \ldots, \nu$*) sont algébriquement indépendants sur* k*.*

plan de preuve - On montre que l'on peut supposer que, pour tout a dans A, les coefficients $\varphi_i(a)$ de $\varphi(a) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(a)\tau^i$ sont dans $A[\alpha]$, et que, pour $i = 1, \ldots, \mu$, on a $\Delta e(x_i y_\nu) \in A[\alpha]$, où $\alpha \in C$ est algébrique sur k, entier sur A, et Δ appartient à $A[\alpha]$. On suppose le théorème 2 faux. On peut supposer comme précédemment, sans se restreindre, que les nombres $x_i, y_j, e(x_i y_j)$ pour $i = 1, \ldots, \mu$ et $j = 1, \ldots, \nu - 1$ sont dans $L = k[\alpha](\theta_1)[\theta_2]$, où $\theta_1 \in C$ est transcendant sur $k[\alpha]$ et $\theta_2 \in C$ est algébrique sur $k[\alpha](\theta_1)$, entier sur $A[\alpha,\ \theta_1]$.
La preuve se fait alors en quatre étapes. Dans la smte, les $C_i > 0$ seront des constantes ne dépendant pas de t, et m, g_0, g_1, g_2, s sont des fonctions de N dans $\mathbb{R}^+$, que nous n'expliciterons pas ici.

- Première étape : Pour chaque $t \in$ N, on construit une fonction entière $F(z) = P_t(z, e(x_1 z), \ldots, e(x_\mu z))$ où $P_t = \sum_\chi p_\chi X_0^{\chi 0} \ldots X_\mu^{\chi_\mu}$ avec $p_\chi \in A[\theta_1]$, et :

$$\deg_{X_0}(P_t) \leq m(t) \text{ et } \quad \text{si } i \neq 0 \quad \deg_{X_i}(P_t) \leq g_0(t)$$
$$\deg_T(p_\chi) \leq C_1 m(t) \log m(t) \text{ et } \quad \deg_{\theta_1}(p_\chi) \leq C_2 m(t)$$

et F s'annule au moins à l'ordre $m(t)$ en les points $a_1 y_1 + \ldots + a_\nu y_\nu$ où $a_i \in A$ tels que $|a_i| < g_1(t)$ si $i = 1, \ldots, \nu - 1$ et $|a_\nu| < g_2(t)$.

- Deuxième étape : Par un lemme de zéro (L. Denis [2]), on montre que si F s'annule à l'ordre M en les $a_1 y_1 + \ldots + a_\nu y_\nu$ introduits précédemment, alors :

$$M \leq C_3 m(t).$$

- Troisième étape : On utilise un lemme de Schwarz ([6] lemme 2.3), pour montrer que, pour un certain $B_0 > 0$:

$$\sup\{\deg(F(z)) \mid \deg z \leq B_0 \log(m(t))\} \leq C_4 s(t).$$

- Quatrième étape : Soit s_0 le plus grand entier tel que F s'annule à l'ordre $s_0 - 1$ en les $a_1 y_1 + \ldots + a_\nu y_\nu$ introduits précédemment. Alors il existe $y = \sum_{i=1}^{\nu} a_i y_i$ tel que le coefficient de Taylor de $F(z+y)$ à l'ordre s_0 soit non nul. Ce coefficient est dans $k[\alpha](\theta_1)[\theta_2]$, on le multiplie par un dénominateur pour obtenir $\mathrm{Y}_t \in A[\alpha,\ \theta_1,\ \theta_2]$. On note $\mathcal{N}$ l'application norme de l'extension finie $k(\theta_1) \to k[\alpha](\theta_1)[\theta_2]$. Ainsi, $\mathcal{N}(\mathrm{Y}_t) = P_t(\theta_1) \in A[\theta_1]$. Grâce à la première étape, on obtient une majoration du degré de P_t, et des degrés (en T) de ses coefficients. La troisième étape nous donne une majoration de $|\mathcal{P}_t(\theta_1)|$. Le polynôme $\mathcal{P}_t$ et le nombre θ_1 vérifient ainsi les hypothèses d'un critère de transcendance (cf [4]), qui affirme alors que pour t assez grand, $\mathcal{P}_t(\theta_1) = 0$, ce qui contredit la transcendance de θ_1.

Cas particulier :

On considère le cas du module de Carlitz, où $d = 1, \varphi_c(T) = T\tau^0 + \tau^1$. Son exponentielle e_c vérifie alors :

$$\forall z \in \mathcal{C},\ e_c(Tz) = Te_c(z) + e_c(z)^q.$$

Le réseau des périodes est $\Lambda = \tilde{\pi} A$. Les théorèmes d'Hermite et de Lindemann sont démontrés en caractéristique finie, c'est-à-dire que $\tilde{\pi}$ et $e_c(1)$ sont transcendants sur k. A. Thiery a prouvé le théorème de Lindemann-Weierstrass pour les modules de Drinfeld. Ici, le théorème 2 a le corollaire suivant :

Corollaire - *Soient x_1, x_2 (resp. y_1, y_2) $\in \mathcal{C}$, A-linéairement indépendants. On suppose que $e_c(x_1 y_2)$ et $e_c(x_2 y_2)$ sont algébriques sur k, alors deux au moins des nombres x_i, y_j, $e_c(x_i y_j)$ (pour $i, j = 1$ ou 2) sont algébriquement indépendants sur k.*

Références

[1] W.D. BROWNAWELL : *The algebraic independence of certain numbers related by the exponential function*, J. Number Theory **6** (1974), 22-31.

[2] L. DENIS : *Lemmes de multiplícités et T-modules*, Michigan Journal of Math **43** (1996),nl, 67-79.

[3] S. DION : *Théorème de Brownawell-Waldschmidt en caractéristique finie*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math, (**6**), (2000), n9, 71-90.

[4] A. THIERY : *Indépendance algébrique de périodes et quasi-périodes de modules de Drinfeld*, The Arithmetic of Functions Fields, Proceedings, Workshop at Ohio State University (1992), 265-284.

[5] M. WALDSCHMIDT : *Solution du huitième problème de Schneider*, J. Number Theory **5** (1973), 191-202.

[6] J. YU : *Transcendence Theory over function fields*, Duke Math. J. **52** (1985), 517-527.

Sophie Dion
Université des sciences et technologies de Lille
UFR de mathématiques
59655 Villeneuve d'Ascq
Sophie.Dion@agat.univ-lille1.fr