

femmes & math



N° 6

Supplément

Septembre 2002

Sommaire

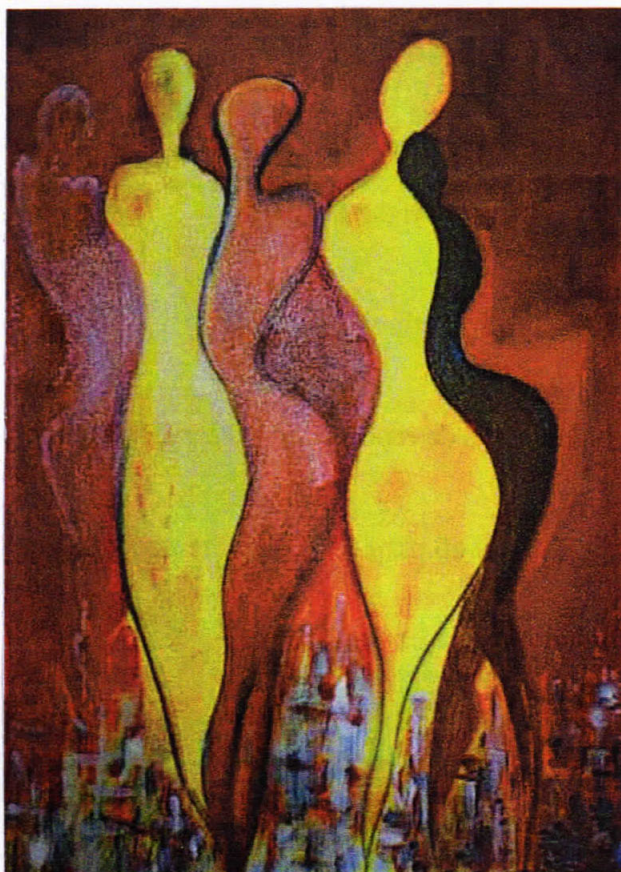
Cinquième forum des jeunes
mathématiciennes (2000)

Editorial

Contributions Mathématiques

Revue de l'Association
femmes et mathématiques

Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05



Simultaneous rotation and
shrinking of the faces of an
icosahedron

Copyright © Michael Trott

[http://library.wolfram.com/
graphics](http://library.wolfram.com/graphics)

On the Catwalk

Catherine Marché

Droits de reproduction réservés

<http://web.ukonline.co.uk/cmarche>

Editorial

Ce supplément au numéro 6 de la revue *femmes et mathématiques* est consacré aux actes du cinquième forum des jeunes mathématiciennes qui s'est tenu à l'IHP, Paris, les 20 et 21 janvier 2000 dans le cadre du programme français du projet WMY2000 (World Mathematical Year 2000), soutenu par l'UNESCO.

Ces journées ont rassemblé une cinquantaine de participantes, le programme est disponible à l'adresse : <http://www.desargues.univ-lyon1.fr/home/fem/agjan00.html>.

Comme chaque année, le forum a comporté une partie scientifique qui permet un tour d'horizon sur des avancées dans des domaines variés des mathématiques et une partie historique/sociologique dont le but est d'initier une réflexion sur la situation actuelle des femmes dans la communauté scientifique.

Dans l'édition 2000, les exposés mathématiques ont été donnés par douze jeunes mathématiciennes (doctorantes ou docteurs ayant soutenu leur thèse depuis moins de quatre ans) et six mathématiciennes confirmées, cela en réponse aux attentes des jeunes mathématiciennes présentes aux éditions précédentes (et nous pensons que cette proportion a satisfait l'auditoire).

Le premier débat a été animé par deux historiennes : Delphine Gardey (Centre de Recherche en Histoire des Sciences et Techniques, Paris) et Michelle Perrot (Professeure émérite de l'université Denis Diderot- Paris VII).

Il suivait l'exposé de Delphine Gardey : *Approche historique sur les relations femmes-sciences-techniques* dont nous n'avons pas de compte-rendu dans ce numéro mais dont nous pouvons cependant retrouver l'essence dans l'ouvrage collectif *L'invention du naturel. Les sciences et la fabrication du féminin et du masculin 19ème-20ème siècle* sous la dir. de Delphine Gardey et Ilana Löwy, Paris, Editions des archives contemporaines, 2000. Nous renvoyons également au compte-rendu d'un exposé que D.G. a fait en novembre 2001 dans le cadre du colloque *Femmes dans les métiers scientifiques et technologiques* au ministère de la recherche et qui est disponible sur http://smyrne.int-evry.fr/femmes_et_sciences/index.htm.

Le second débat, *Parité dans la communauté scientifique* a été introduit par Claudine Hermann (Professeure à l'école Polytechnique, membre de l'E.T.A.N et Présidente de l'association femmes et sciences http://www.int-evry.fr/femmes_et_sciences) qui, à l'appui de quelques statistiques à l'échelon européen, nous a fait part de l'état d'avancement des travaux de la communauté européenne sur la question des femmes et des sciences (voir <http://www.cordis.lu/improving/women/documents.htm>).

Nous tenons à remercier toutes les participantes à ce forum, les conférencières (en particulier Delphine Gardey qui a su s'adresser avec succès à une communauté non spécialiste), les présidentes de séances, mais aussi les nombreuses intervenantes lors des débats, c'est grâce à elles que de nombreux témoignages et nombreuses idées autour de la parité ont pu être échangés. Merci aux auteures de ce numéro (un merci tout spécial à celles qui ont eu à coeur de respecter les délais et le style de la revue) ainsi qu'aux relecteurs/-trices anonymes dont les commentaires ont beaucoup apporté.

Enfin... toutes nos excuses pour la parution tardive de ce numéro

Stefanella Boatto, Catherine Bonnet, Marie-Françoise Roy

Instabilité des solutions rapidement oscillantes dans le cadre des équations différentielles à retard

Sophie Bismuth

Considérons l'équation

$$\dot{x}(t) = -h(x(t-1)) + f(x(t)) \quad \text{pour } t \geq 0, \quad x_{|[-1,0]} = x_0 \quad (1)$$

où $x_0 \in \mathcal{C}([-1, 0])$, h est définie comme suit :

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ impaire, } h(y) = \begin{cases} a \text{ si } 0 < y < c \\ b \text{ si } y \geq c \end{cases} \quad \text{avec } a > b > 0 \text{ et } c > 0 \quad (2)$$

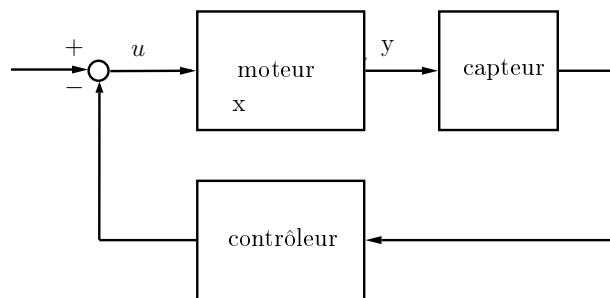
et

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ est une fonction mesurable au sens de Lebesgue,} \\ \text{impaire et telle que } \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < b \end{array} \right\} \quad (3)$$

La motivation à considérer de tels systèmes provient d'un problème d'automatique qui consiste à réguler la richesse des gaz d'échappement du moteur (vu comme un système à retard du premier ordre) qui peut être mesurée par un capteur tout ou rien : elle n'indique que la position par rapport à la stoechiométrie- le gaz est riche ou pauvre. Les retards interviennent entre admission et échappement des gaz et lors du transport jusqu'au capteur.

On note

u = l'entrée = quantité d'essence
 y = la sortie = richesse du gaz (carburant /air)
 x = l'état du système à l'instant t



Le capteur délivre la mesure avec retard $\text{sgn}(\text{carburant/air} - 1)$. L'information est instantanément transmise au contrôleur, qui fournira les modifications à apporter au mélange carburant /air.

L'équation d'état du système s'écrit sous la forme

$$\dot{x}(t) = -\text{sgn}x(t-1) + f(x(t)) \quad (4)$$

L'équation (1) est un cas particulier d'une classe plus générale de systèmes du premier ordre, donnée par

$$\dot{x}(t) = g(x(t), x(t-1)) \quad (5)$$

On dit que g satisfait une "condition de feedback négatif", notée (\star) , si $g(x, y) < 0$ pour $x > 0$ et $y > 0$, $g(x, y) > 0$ pour $x < 0$ et $y < 0$, $yg(0, y) < 0$ pour $y \neq 0$.

Si g satisfait des conditions de régularité et en particulier la condition de feedback négatif (\star) , l'équation (5) a une solution périodique lentement oscillante et cette solution est stable, voir Mallet-Paret and Nussbaum [5] et Mallet-Paret et al [6]. Des résultats plus généraux sont prouvés dans [4, 5, 6].

Si $g(x, y) = f(x) - \text{sgn } y$, où f est C^1 et $\sup |f(x)| < 1$, la condition (\star) est satisfaite. L'équation (5) s'écrit comme (4). Bien que g ne soit pas régulier dans ce cas, une étude complète de (4) a été faite. On définit $V(t)$ le nombre de zéros de x sur l'intervalle $[t-1, t)$ où t est le premier temps après t tel que $x(t) = 0$. Fridmann et al [3] ont montré que si $V(0)$ est fini, alors $V(t)$ est pair et décroissant. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique solution périodique telle que $V(t) \equiv 2n$, voir [3].

L'équation (1,2,3) est encore un cas particulier de (5) où g satisfait la condition de feedback négative (\star) . Dans cet article, on présente les nouveaux résultats obtenus dans [2], dans le cadre de l'équation (1), qui généralisent ceux établis dans [3, 1]. On donne tout d'abord quelques définitions :

Définition. Fonction rapidement oscillante : Une fonction continue x définie sur $[t_0, +\infty[$ est appelée rapidement oscillante (par rapport au retard 1) s'il existe $t, t' > t_0$ tels que $t \neq t', |t - t'| < 1$ et $x(t) = x(t') = 0$.

Définition. Fonction périodique à 2 phases : Une fonction continue périodique x , de période $T > 0$, définie sur $[t_0, +\infty[$ est appelée périodique à 2 phases s'il existe $t \geq t_0$ tel que $x_{1(t, t+T)}$ change de signe exactement une fois.

Définition. Fonction périodique symétrique : Une fonction continue périodique x , de période $T > 0$, définie sur $[t_0, +\infty[$ est dite symétrique si $x(t + \frac{T}{2}) = -x(t)$ pour $t \geq t_0$.

Nussbaum a prouvé l'existence de solutions périodiques rapidement oscillantes de l'équation (1,2,3), voir [7].

Soit x une solution of (1) correspondant à une solution initiale x_0 avec un nombre fini de zéros. On définit l'ensemble Z de points où x s'annule et change de signe, et le cardinal V du nombre de zéros avec changement de signe :

$$Z = \{t \geq -1 : x(t) = 0 \text{ et } \forall \epsilon > 0 \exists t' \in (t, t + \epsilon], t'' \in [t - \epsilon, t) / x(t') x(t'') < 0\},$$

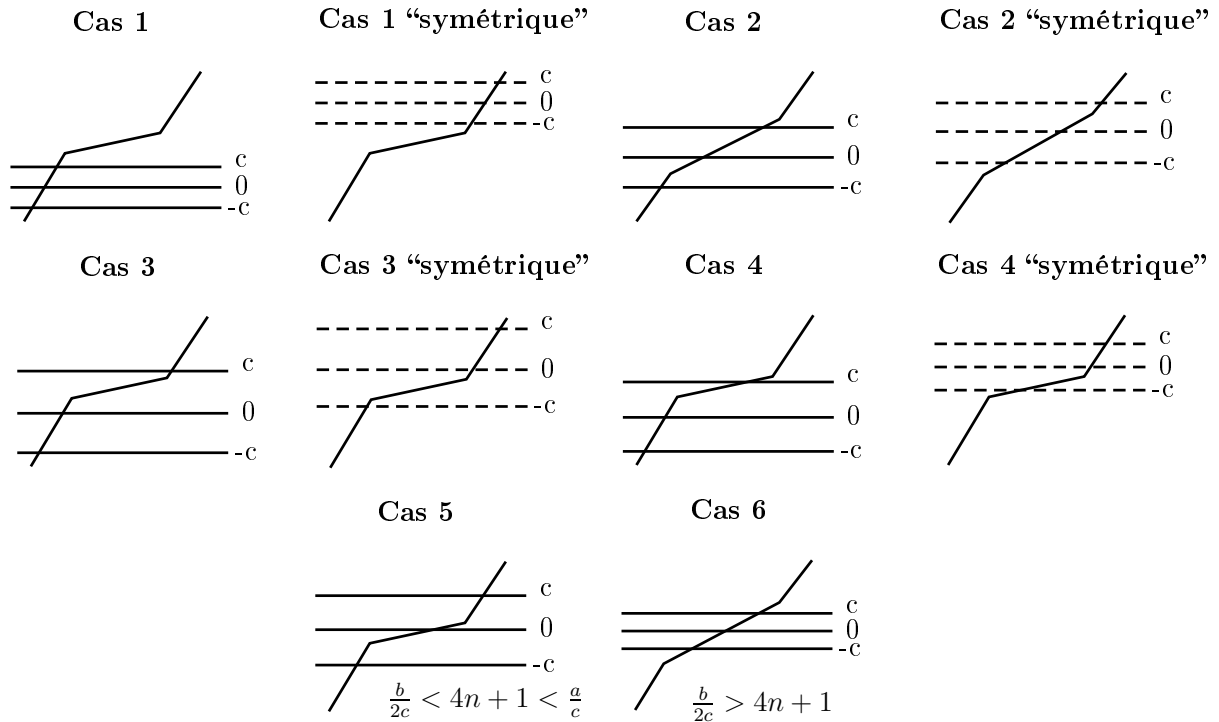
$$V(t) = \text{card}(Z \cap [t-1, t)), \quad \text{où } t' = \inf\{s \geq t, s \in Z\}$$

On note $V(t) = \infty$ si $Z \cap [t-1, t)$ est infini.

Théorème. On considère l'équation

$$\dot{x}(t) = -h(x(t-1)) \quad t \geq 0, \quad x|_{[-1,0]} = x_0, \quad (6)$$

où h est définie par (2), et $x_0 \in C([-1, 0])$ a un nombre fini de zéros. Pour tout x_0 avec un nombre fini de zéros, il existe une unique fonction $x \in \mathcal{C}([-1, +\infty[)$ absolument continue sur $[0, +\infty)$, satisfaisant l'équation (6) presque partout. Pour une telle solution, $V(t)$ est décroissant et pair. Pour toute solution périodique de (6), $V(t)$ est constant. Les solutions périodiques à 2 phases symétriques rapidement oscillantes, $x(t)$ telles que $\|x\|_\infty > c$ sont caractérisées par les cas 2, 3, 4, 5 et 6, définis ci-dessous ($V(t) \equiv 2n$). Ces solutions périodiques sont toutes instables.



La preuve est écrite dans [2].

Théorème. On considère l'équation

$$\dot{x}(t) = -h(x(t-1)) + f(x(t)) \quad \text{pour } t \geq 0, \quad x|_{[-1,0]} = x_0 \quad (7)$$

où h est définie par (2), f satisfait (3) et $x_0 \in C([-1, 0])$ a un nombre fini de zéros. Pour toute solution de (7), $V(t)$ est non croissant et pair. Pour toute solution périodique de (7), $V(t)$ est constant. Les solutions périodiques à 2 phases symétriques rapidement oscillantes, $x(t)$ telles que $\|x\|_\infty > c$ sont caractérisées qualitativement par les cas 2, 3, 4, 5 et 6 définis au-dessus excepté que les segments de droite sont remplacés par des courbes. Ces solutions périodiques sont toutes instables.

La preuve est écrite dans [2].

Références

- [1] Akian M., Bliman P.-A. et Sorine KI. : P.I. Control of nonlinear oscillations for a system with delay, *INRIA, Rapport de recherche*, n. 3422, 1998.
- [2] Akian M. et Bismuth S. : Instability of rapidly-oscillating periodic solutions for discontinuous differential delay equations, *J. Diff. and Int. Equations*, 15 (1), p. 53-90, 2002.
- [3] Fridman L., Fridman E. et Shustin E. : Steady modes and sliding modes in the relay control systems with time delay, *Proc. of the 35th conference on decision and control* p. 4601-4606, Kobe, Japan, 1996.
- [4] Mallet-Paret J. : Morse decomposition for delay-differential equations, *J. Diff. Equations*, 72, p. 270-315, 1988.
- [5] Mallet-Paret J. et Nussbaum R.D. : Boundary layer phenomena for differential-delay equations with state dependent time lags : II, *J. für die Reine und Angewandte Math.*, 477, p. 129-197, 1996.
- [6] Mallet-Paret J., Nussbaum R.D. et Paraskevopoulos P. : Periodic solutions for functional differential equations with multiple state dependent time lags, *Topological Meth. in Nonlinear Anal.*, 3, p. 101-162, 1994.
- [7] Nussbaum R.D. : “Personal communication” , 1999.

Sophie Bismuth
Pôle universitaire Léonard de Vinci
92916 Paris la Défense Cedex
Sophie.Bismuth@devinci.fr

Une application de l'étude d'équations différentielles linéaires homogènes dépendant de paramètres : systèmes hamiltoniens

Delphine Boucher

Dans cette note, nous montrons en quoi l'étude d'équations différentielles linéaires homogènes dépendant de paramètres aide à trouver des conditions de non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens. Nous suivons pour cela l'exemple du système de Hénon-Heiles ([2]).

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_{2n}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{2n}$

Un **système hamiltonien** sur un ensemble non vide U de \mathbb{R}^{2n} est un système d'équations différentielles de la forme :

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q, p) \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q, p) \\ j = 1, \dots, n \end{cases}$$

où $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction '**Hamiltonien**'. L'entier n est appelé le **degré de liberté**.

L'hamiltonien H représente, à une constante multiplicative près, l'énergie mécanique de l'objet. C'est une quantité conservée, on dit que c'est une **intégrale première** du système hamiltonien. On considère connaître suffisamment bien un système hamiltonien s'il possède un nombre suffisant (égal au degré de liberté n) de quantités conservées, les intégrales premières, satisfaisant de plus une propriété d'indépendance et d'involution. Dans ce cas, le système hamiltonien sera dit **complètement intégrable** (voir [1]). Il est difficile de trouver des intégrales premières en involution et la question que l'on se posera est de savoir si le système est complètement intégrable localement, c'est à dire s'il possède n intégrales premières en involution définies autour d'une solution particulière du système. Pour étudier cette question, nous utiliserons un critère galoisien de non intégrabilité dû à Morales et Ramis ([2]).

L'idée est de se placer au voisinage d'une solution particulière X_0 du système hamiltonien (S) et d'étudier les solutions qui sont proches de cette solution particulière. Le comportement de ces solutions est dicté par une équation différentielle linéaire, l'équation variationnelle le long de la solution X_0 . On peut alors réduire l'ordre de cette équation et obtenir l'équation normale variationnelle à laquelle on associe un groupe de Galois différentiel G . Le théorème de Morales-Ramis donne une condition nécessaire portant sur le groupe G pour que le système (S) soit complètement intégrable.

Théorème de Morales-Ramis (version simplifiée) : Soit (S) un système hamiltonien et X_0 une solution particulière. Soit (E) l'équation normale variationnelle de (S) le long de la solution X_0 et soit G son groupe de Galois différentiel. Si le système hamiltonien est intégrable le long de X_0 , alors la composante connexe de l'identité du groupe de Galois de (E) , notée G^0 , est un groupe abélien.

On en déduit le critère suivant : ' G^0 non abélien $\Rightarrow (S)$ non intégrable'.

Nous illustrons l'application de ce critère à travers l'exemple de Hénon-Heiles ([2]). Nous montrons en quoi l'étude de l'espace des solutions de l'équation normale variationnelle (équation dépendant de paramètres) permet de fournir des renseignements sur le caractère non abélien de G^0 . Considérons l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{3}q_1^3 + \frac{1}{2}(aq_1 - 1)q_2^2, \quad a \in \mathbb{C}$$

Le système hamiltonien est

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -q_1^2 - \frac{a}{2}q_2^2 \\ -(aq_1 - 1)q_2 \end{pmatrix}$$

Une solution particulière est $X_0(t) = {}^t \left(\frac{-6}{t^2}, 0, \frac{12}{t^3}, 0 \right)$. Nous en déduisons l'équation variationnelle le long de la solution X_0 ,

$$\dot{h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{12}{t^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{6a}{t^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} h$$

puis l'équation normale variationnelle

$$L_a(y(t)) = y''(t) - \left(1 + \frac{6a}{t^2}\right)y(t) = 0.$$

Nous sommes ici en présence d'une équation qui a pour seuls points singuliers zéro et l'infini ; une petite étude annexe permet de montrer que la composante connexe de l'identité dans le groupe G de l'équation est abélienne si, et seulement si, le groupe G est lui même égal au groupe multiplicatif. Ceci est encore équivalent à dire que l'espace des solutions de l'équation normale variationnelle est engendré par deux solutions exponentielles. Nous sommes donc ramenés à chercher des conditions nécessaires et suffisantes sur le paramètre a pour que l'équation normale variationnelle ait deux solutions $z(t)$ dont les dérivées logarithmiques $\left(\frac{z'(t)}{z(t)}\right)$ soient rationnelles, c'est à dire deux solutions vérifiant

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = P_0(t) + P_\infty(t) + \frac{q'(t)}{q(t)}$$

avec P_0, P_∞ parties exponentielles en zéro et l'infini, et q polynôme.

Dans le cas non paramétré, il existe des algorithmes (Beke, Van Hoeij, ...) pour calculer les solutions exponentielles. Nous allons adapter le calcul de ses solutions à notre cas paramétré. Cette étude se fait en trois étapes.

1. Les parties exponentielles P_0 et P_∞ au voisinage des points singuliers zéro et l'infini sont :

$$P_0(t) = \frac{p_0}{t} \text{ avec } p_0^2 - p_0 - 6a = 0(1)$$

$$P_\infty(t) = p_\infty \text{ avec } p_\infty^2 - 1 = 0(2)$$

2. L'équation vérifiée par q est :

$$tq''(t) + 2(p_\infty t + p_0)q'(t) + 2p_0p_\infty q(t) = 0$$

La relation de récurrence satisfaite par les coefficients de $\sum q_i t^i$ est :

$$2p_\infty(i + p_0)q_i + (i + 1)(i + 2p_0)q_{i+1} = 0$$

Nécessairement le degré de q est égal à $-p_0$ et sa valuation est nulle. Une condition nécessaire pour que q soit un polynôme est donc :

$$-p_0 \in \mathbb{N}(3) .$$

La difficulté ici est que le degré dépend du paramètre, donc on ne peut le borner et calculer les coefficients du polynôme. Cependant, comme la relation de récurrence satisfaite par les coefficients de q est une relation de récurrence à deux termes, on peut montrer que cette condition nécessaire (3) est aussi suffisante.

3. D'après (1) et (3), l'équation normale variationnelle a une solution exponentielle si, et seulement si, il existe k dans \mathbb{Z} tel que $a = \frac{k^2+k}{6}$. De plus, d'après (2), cette condition sur a est aussi nécessaire et suffisante pour avoir deux solutions exponentielles (linéairement indépendantes). Ces deux solutions sont du type $t^{-deg(q_1)}e^t q_1(t)$ et $t^{-deg(q_2)}e^{-t} q_2(t)$.

En conclusion, si a ne s'écrit pas sous la forme $\frac{k^2+k}{6}$ où k est un entier, alors nous avons une obstruction à l'intégrabilité du système ; sinon, nous ne pouvons rien conclure.

Références

- [1] *R. C. Churchill (1998)* Galoisian Obstructions to the Integrability of Hamiltonian Systems Prepared for the Kolchin Seminar in Differential Algebra, Department of Mathematics, City College of New York
- [2] *Juan J. Morales-Ruiz (1998)* Differential Galois Theory and Non-integrability of Hamiltonian Systems,

Delphine Boucher

Laboratoire d'Algorithmique, Calcul formel et optimisation

Faculté des Sciences

123, Avenue Albert Thomas

87060 Limoges Cedex

France

delphine.boucher@unilim.fr

<http://www.unilim.fr/laco/perso/delphine.boucher>

Une équation de Schrödinger non linéaire stochastique

Anne de Bouard et Arnaud Debussche

L'équation de Schrödinger non linéaire est l'un des modèles de base pour décrire la propagation d'ondes non linéaires dans les milieux dispersifs. Elle intervient dans de nombreux domaines de la physique, tels que les ondes hydrodynamiques, l'optique non linéaire ou la physique des plasmas. Dans certaines circonstances, le caractère aléatoire du milieu doit être pris en compte, avec en général des échelles de temps caractéristiques négligeables devant les échelles de temps des phénomènes déterministes. Il est donc bien souvent naturel que la dépendance en temps des termes aléatoires intervenant dans l'équation soit de la forme "bruit blanc", tandis que ces termes aléatoires peuvent être corrélés en espace, ou non. De plus, un tel terme aléatoire peut intervenir dans l'équation sous la forme d'un bruit additif (une force extérieure) ou d'un bruit multiplicatif (c'est le cas par exemple d'un potentiel aléatoire).

Dans une première partie de l'exposé, on étudie le caractère bien posé dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ d'une équation de Schrödinger non linéaire avec un potentiel aléatoire. Lorsque ce potentiel ne dépend que de la variable temporelle, il peut facilement être éliminé par une transformation de jauge, et n'a pas d'effet sur la dynamique du système, dans le sens où le bruit n'affecte que la phase des solutions. Dans certaines situations cependant, le bruit dépend à la fois des variables spatiale et temporelle. Un tel modèle a par exemple été proposé par Bang et al. [1], pour modéliser la propagation d'une excitation dans certains agrégats moléculaires en présence de fluctuations thermiques. Dans ce cas, le potentiel peut être un bruit blanc en temps et l'équation s'écrit alors sous la forme

$$i \frac{dz}{dt} - (\Delta z + |z|^{2\sigma} z) = \dot{\eta} z, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

où z est une fonction à valeurs complexes de $t \in \mathbb{R}^+$ et de $x \in \mathbb{R}^n$ et où $\sigma = 1$. De plus, $\dot{\eta}$ est un processus gaussien à valeurs réelles dont la fonction de corrélation est donnée par

$$E(\dot{\eta}(x, t)\dot{\eta}(y, s)) = c(x, y)\delta(t - s).$$

Le cas particulier $c(x, y) = \delta(x - y)$ correspond au bruit blanc espace-temps, mais ce cas est particulièrement difficile à traiter mathématiquement, et on considère en réalité des fonctions de corrélation spatiale plus régulières.

Le produit apparaissant dans le membre de droite de (1) doit également être interprété correctement. Deux types de produits sont classiquement utilisés pour les processus stochastiques. Le produit d'Ito est probablement le plus courant en mathématiques car il permet l'utilisation de puissants outils probabilistes. Le produit de Stratonovitch est souvent plus naturel en physique, et intervient par exemple dans les équations obtenues comme limites d'équations aléatoires avec des longueurs de corrélations finies. Ce dernier produit permet également l'utilisation des règles de calcul classiques de différentiation

de fonctions composées. Une équation de Stratonovitch est toujours équivalente à une équation d'Ito dans laquelle on a ajouté un terme correctif. Le produit intervenant dans l'équation (1) est un produit de Stratonovitch, le seul qui permette la conservation de la norme L^2 (en espace) de la solution (cette conservation de la norme L^2 est motivée par des arguments physiques).

On donne maintenant une définition mathématique de η et de l'équation de Ito équivalente à (1). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, et soit $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de mouvements browniens indépendants associés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Etant donnée une base hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $L^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ (l'espace des fonctions de L^2 à valeurs réelles), et étant donné un opérateur linéaire symétrique Φ sur $L^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, le processus

$$W(t, x, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(t, \omega) \Phi e_k(x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad \omega \in \Omega$$

est un processus de Wiener sur $L^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, d'opérateur de covariance $\Phi \Phi^*$. On pose alors

$$\dot{\eta} = \frac{dW}{dt},$$

et l'équation (1) est réécrite sous la forme

$$idz - (\Delta z + f(|z|^2)z) dt = z \circ dW \quad (2)$$

où \circ désigne le produit de Stratonovitch et $f(s) = s^\sigma$. L'équation Ito équivalente est alors donnée par

$$idz - (\Delta z + f(|z|^2)z) dt = z dW - \frac{1}{2} iz F_\Phi dt. \quad (3)$$

La fonction F_Φ dans la correction d'Ito ne dépend que de Φ , et plus précisément,

$$F_\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\Phi e_k(x))^2, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

cette quantité ne dépendant pas de la base $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Par exemple, si l'opérateur Φ est donné par un noyau \mathcal{K} à valeurs réelles, alors

$$F_\Phi(x) = |\mathcal{K}(x, \cdot)|_{L^2(\mathbf{R}^n)}^2.$$

Pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution de (3), associée à la condition initiale $z(0) = z_0$, on utilise un argument de point fixe sur la formulation intégrale de l'équation. Le caractère multiplicatif du bruit considéré empêche de résoudre l'équation trajectoire par trajectoire et nécessite de se placer dans un espace du type $L^p(\Omega, \mathcal{E})$. Un argument de troncature est alors nécessaire à cause du fait que le terme non linéaire n'est pas lipschitzien. Si par exemple Φ est donné par un noyau \mathcal{K} vérifiant

$$\mathcal{K} \in L^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R}) \cap L^{2+\delta}(\mathbf{R}_x^n; L^2(\mathbf{R}_y^n; \mathbf{R})),$$

l'argument de point fixe peut être mené à son terme, sous réserve que $\sigma < \min(\frac{2}{n}, \frac{1}{n-1})$.

On retrouve le fait que cette solution est solution de l'équation originale grâce à une estimation de la solution de l'équation tronquée dans l'espace $L^1(\Omega; L^\gamma(0, T; L^q(\mathbf{R}^n)))$, estimation dont la difficulté est due à la présence de l'intégrale stochastique.

Dans une seconde partie, on étudie l'explosion en temps fini des solutions d'une équation de Schrödinger non linéaire stochastique avec un bruit additif complexe, beaucoup plus corrélé spatialement que le précédent. Cette équation s'écrit

$$idz - (\Delta z + |z|^{2\sigma}z)dt = dW, \quad (4)$$

où comme précédemment, W est un processus de Wiener d'opérateur de covariance $\Phi\Phi^*$, mais qui cette fois est défini à l'aide d'une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{R}^n)$ à valeurs complexes. Le résultat d'existence précédent est toujours valable pour l'équation (4), et si l'on suppose que l'opérateur Φ est plus régulier (par exemple que Φ est Hilbert-Schmidt de $L^2(\mathbf{R}^n)$ à valeurs dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbf{R}^n)$ avec $s = 1 + \frac{n\sigma}{2(\sigma+1)}$), et si $\sigma < \frac{2}{n-2}$, alors on peut montrer l'existence locale de solutions de cette équation, à valeurs presque sûrement dans $\mathcal{C}([0, T]; H^1(\mathbf{R}^n))$, où T est un temps aléatoire. On montre alors que l'énergie E_1 des solutions croît au plus linéairement en temps et on généralise le calcul de viriel déterministe -c'est-à-dire le calcul de l'évolution en temps du moment d'inertie

$$\int_{\mathbf{R}^n} |x|^2 |z(t, x)|^2 dx$$

d'une solution en fonction de l'énergie $E_1(z(0))$. Ceci nous permet d'obtenir l'explosion en temps fini de certaines solutions, lorsque la puissance du terme non linéaire est surcritique, c'est-à-dire lorsque $\sigma > 2/n$, au sens suivant : si

$$\mathbf{E}(E_1(z(0))) < -C < 0,$$

pour une constante C qui ne dépend que du bruit (de l'opérateur de covariance Φ), alors il existe un temps τ^* fini tel que

$$\mathbf{E}(\|z(t)\|_{H^1}^2) \rightarrow \infty, \text{ lorsque } t \rightarrow T^*$$

A l'aide d'un argument de contrôle déterministe et en utilisant l'irréductibilité du semi-groupe de transition associé à l'équation (4), on montre que ce résultat est en fait vrai *pour toute donnée initiale*, et que de plus T^* peut être choisi totalement arbitrairement : ainsi l'espérance de la norme H^1 des solutions n'est jamais finie bien que ces solutions existent trajectoriellement sur un intervalle de temps aléatoire, c'est-à-dire qu'à ω fixé, la solution $z(t, \cdot, \omega)$ existe et appartient à $H^1(\mathbf{R}^n)$ sur $[0, \tau^*(\omega)[$.

Références

- [1] *Bang, O., Christiansen, P. L., If, F. Rasmussen K. O.*, White Noise in the Two-dimensional Nonlinear Schrödinger Equation. Phys. Rev. E49 (1994) 4627-4636.

- [2] *de Bouard A., Debussche A.*, A stochastic nonlinear Schrödinger equation with multiplicative noise. *Comm. Math. Phys.* 205 (1999). 161-181
- [3] *de Bouard A., Debussche A.*, On the effect of a noise on the solutions of the focusing supercritical nonlinear Schrödinger equation. *Probab. Theory Related Fields.* 123, 1, (2002) 76-96.

Anne de Bouard
Laboratoire d'Analyse numérique et EDP
UMR de Mathématiques 8628 du CNRS
Bât. 425, Université Paris-Sud
91405 Orsay Cedex
France
anne.deBouard@math. u-psud.fr

Théorème de Brownawell-Waldschmidt en caractéristique finie

Sophie Dion

Introduction :

On rappelle qu'un nombre complexe est dit algébrique sur \mathbb{Q} , s'il annule au moins un polynôme non nul à coefficients dans \mathbb{Q} . Dans le cas contraire, on dira qu'il est transcendant. Plus généralement, on dira que n nombres complexes sont algébriquement dépendants sur \mathbb{Q} , s'ils annulent au moins un polynôme non nul en n variables à coefficients dans \mathbb{Q} . Dans le cas contraire, on dira qu'ils sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} .

Depuis longtemps, on s'attache à montrer des résultats de transcendance. Ainsi, en 1873, Hermite montrait la transcendance de e ; en 1882, Lindemann prouvait celle de π . A la même période, on obtenait le théorème de Lindemann-Weierstrass :

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, algébriques sur \mathbb{Q} , et linéairement indépendants sur \mathbb{Q} . Alors, e^{a_1}, \dots, e^{a_n} sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} .

Plus récemment, en 1996, Y. Nesterenko a prouvé que π et e^π sont algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} . En revanche, on ne sait toujours rien concernant l'indépendance algébrique de e et π . Notre intérêt porte ici, sur le théorème suivant, prouvé indépendamment par W.D. Brownawell [1] et M. Waldschmidt [5] en 1971 :

Théorème 1 - Soient x_1 et x_2 (respectivement y_1 et y_2) des nombres complexes linéairement indépendants sur \mathbb{Q} tels que $e^{x_1 y_1}$ et $e^{x_2 y_2}$ sont algébriques sur \mathbb{Q} , alors deux au moins des nombres

$$x_1, x_2, y_1, y_2, e^{x_1 y_1}, e^{x_2 y_2}$$

sont algébriquement indépendants.

Nous donnons un théorème analogue, dans un corps de caractéristique finie que nous allons définir.

Définition du cadre :

Soit p un nombre premier et q une puissance de p . On note $A = \Gamma_q[T]$, $k = \Gamma_q(T)$ son corps des fractions, et $k_\infty = \Gamma_q((1/T))$ le complété de k pour la valuation $1/T$ -adique que l'on prolonge à une clôture algébrique \bar{k} (resp. \bar{k}_∞) de k (resp. de k_∞). On note encore $C = (\bar{k}_\infty)_\infty$ le complété de \bar{k}_∞ . On sait alors que C est algébriquement clos. La valuation précédente se prolonge à C et la valeur absolue d'un élément de C est définie de la manière suivante :

$$\forall \alpha \in C, |\alpha| = q^{-v(\alpha)} = q^{\deg(\alpha)} \text{ avec } \deg(0) = -\infty.$$

On note $\tau : z \rightarrow z^q$ l'endomorphisme de Frobenius défini sur C , et $\bar{k}\{\tau\} = \{\sum_{i=0}^n a_i \tau^i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in k\}$ Un module de Drinfeld de rang $d \geq 1$ défini sur \bar{k} est un homomorphisme d'anneaux $\varphi : \Gamma_q[T] \rightarrow \bar{k}\{\tau\}$ tel que :

$$\varphi(T) = T\tau^0 + \gamma_1\tau + \dots + \gamma_d\tau^d,$$

où $\gamma_d \neq 0$. Il existe alors une unique fonction exponentielle e caractérisée par :

$$e'(0) = 1 \text{ et } \forall a \in A, e(az) = \varphi(a)(e(z)).$$

Le noyau de cette exponentielle est un A -module libre de rang d , c'est le réseau des périodes noté Λ . On notera R_Λ l'anneau des multiplications de Λ défini par :

$$R_\Lambda = \{\gamma \in C \mid \gamma\Lambda \subset \Lambda\}.$$

C'est un A -module auquel on peut prolonger φ . On note k_Λ le corps des fractions de R_Λ , c'est une extension de degré au plus d de k . Le tableau suivant donne les analogies entre la caractéristique nulle et la caractéristique finie :

en caractéristique 0	en caractéristique p
\mathbb{Z}	$A = \mathbb{F}_q[T]$
\mathbb{Q}	$k = \mathbb{F}_q(T)$
\mathbb{R}	$k_\infty = \mathbb{F}_q((1/T))$
\mathbb{C}	$C = (\overline{k}_\infty)_\infty$
exp	e

Enoncé :

Théorème 2 - Soient $x_1, \dots, x_\mu \in C, k_\Lambda$ -linéairement indépendants, soient de même $y_1, \dots, y_\nu \in C, k$ -linéairement indépendants. On suppose que pour $i = 1, \dots, \mu, e(x_i y_\nu)$ est algébrique sur k .

Si $\nu\mu \geq \nu + d\mu$ alors deux au moins des nombres $x_i, y_j, e(x_i y_j)$ (pour $i = 1, \dots, \mu$ et $j = 1, \dots, \nu$) sont algébriquement indépendants sur k .

plan de preuve - On montre que l'on peut supposer que, pour tout a dans A , les coefficients $\varphi_i(a)$ de $\varphi(a) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(a)\tau^i$ sont dans $A[\alpha]$, et que, pour $i = 1, \dots, \mu$, on a $\Delta e(x_i y_\nu) \in A[\alpha]$, où $\alpha \in C$ est algébrique sur k , entier sur A , et Δ appartient à $A[\alpha]$. On suppose le théorème 2 faux. On peut supposer comme précédemment, sans se restreindre, que les nombres $x_i, y_j, e(x_i y_j)$ pour $i = 1, \dots, \mu$ et $j = 1, \dots, \nu - 1$ sont dans $L = k[\alpha](\theta_1)[\theta_2]$, où $\theta_1 \in C$ est transcendant sur $k[\alpha]$ et $\theta_2 \in C$ est algébrique sur $k[\alpha](\theta_1)$, entier sur $A[\alpha, \theta_1]$.

La preuve se fait alors en quatre étapes. Dans la suite, les $C_i > 0$ seront des constantes ne dépendant pas de t , et m, g_0, g_1, g_2, s sont des fonctions de \mathbb{N} dans \mathbb{R}^+ , que nous n'explicitons pas ici.

- Première étape : Pour chaque $t \in \mathbb{N}$, on construit une fonction entière $F(z) = P_t(z, e(x_1 z), \dots, e(x_\mu z))$ où $P_t = \sum_\chi p_\chi X_0^{\chi_0} \dots X_\mu^{\chi_\mu}$ avec $p_\chi \in A[\theta_1]$, et :

$$\begin{aligned} \deg_{X_0}(P_t) &\leq m(t) \quad \text{et} \quad \text{si } i \neq 0 \quad \deg_{X_i}(P_t) \leq g_0(t) \\ \deg_T(p_\chi) &\leq C_1 m(t) \log m(t) \quad \text{et} \quad \deg_{\theta_1}(p_\chi) \leq C_2 m(t) \end{aligned}$$

et F s'annule au moins à l'ordre $m(t)$ en les points $a_1 y_1 + \dots + a_\nu y_\nu$ où $a_i \in A$ tels que $|a_i| < g_1(t)$ si $i = 1, \dots, \nu - 1$ et $|a_\nu| < g_2(t)$.

- Deuxième étape : Par un lemme de zéro (L. Denis [2]), on montre que si F s'annule à l'ordre M en les $a_1 y_1 + \dots + a_\nu y_\nu$ introduits précédemment, alors :

$$M \leq C_3 m(t).$$

- Troisième étape : On utilise un lemme de Schwarz ([6] lemme 2.3), pour montrer que, pour un certain $B_0 > 0$:

$$\sup\{\deg(F(z)) \mid \deg z \leq B_0 \log(m(t))\} \leq C_4 s(t).$$

- Quatrième étape : Soit s_0 le plus grand entier tel que F s'annule à l'ordre $s_0 - 1$ en les $a_1 y_1 + \dots + a_\nu y_\nu$ introduits précédemment. Alors il existe $y = \sum_{i=1}^\nu a_i y_i$ tel que le coefficient de Taylor de $F(z + y)$ à l'ordre s_0 soit non nul. Ce coefficient est dans $k[\alpha](\theta_1)[\theta_2]$, on le multiplie par un dénominateur pour obtenir $Y_t \in A[\alpha, \theta_1, \theta_2]$. On note \mathcal{N} l'application norme de l'extension finie $k(\theta_1) \rightarrow k[\alpha](\theta_1)[\theta_2]$. Ainsi, $\mathcal{N}(Y_t) = P_t(\theta_1) \in A[\theta_1]$. Grâce à la première étape, on obtient une majoration du degré de P_t , et des degrés (en T) de ses coefficients. La troisième étape nous donne une majoration de $|\mathcal{P}_t(\theta_1)|$. Le polynôme \mathcal{P}_t et le nombre θ_1 vérifient ainsi les hypothèses d'un critère de transcendance (cf [4]), qui affirme alors que pour t assez grand, $\mathcal{P}_t(\theta_1) = 0$, ce qui contredit la transcendance de θ_1 .

Cas particulier :

On considère le cas du module de Carlitz, où $d = 1$, $\varphi_c(T) = T\tau^0 + \tau^1$. Son exponentielle e_c vérifie alors :

$$\forall z \in \mathcal{C}, e_c(Tz) = T e_c(z) + e_c(z)^q.$$

Le réseau des périodes est $\Lambda = \tilde{\pi}A$. Les théorèmes d'Hermite et de Lindemann sont démontrés en caractéristique finie, c'est-à-dire que $\tilde{\pi}$ et $e_c(1)$ sont transcendants sur k . A. Thiery a prouvé le théorème de Lindemann-Weierstrass pour les modules de Drinfeld. Ici, le théorème 2 a le corollaire suivant :

Corollaire - Soient x_1, x_2 (resp. y_1, y_2) $\in \mathcal{C}$, A -linéairement indépendants. On suppose que $e_c(x_1 y_2)$ et $e_c(x_2 y_2)$ sont algébriques sur k , alors deux au moins des nombres $x_i, y_j, e_c(x_i y_j)$ (pour $i, j = 1$ ou 2) sont algébriquement indépendants sur k .

Références

- [1] W.D. BROWNAWELL : *The algebraic independence of certain numbers related by the exponential function*, J. Number Theory **6** (1974), 22-31.
- [2] L. DENIS : *Lemmes de multiplicités et T -modules*, Michigan Journal of Math **43** (1996),nl, 67-79.
- [3] S. DION : *Théorème de Brownawell-Waldschmidt en caractéristique finie*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math, (**6**), (2000), n9, 71-90.
- [4] A. THIERY : *Indépendance algébrique de périodes et quasi-périodes de modules de Drinfeld*, The Arithmetic of Functions Fields, Proceedings, Workshop at Ohio State University (1992), 265-284.

- [5] M. WALDSCHMIDT : *Solution du huitième problème de Schneider*, J. Number Theory **5** (1973), 191-202.
- [6] J. YU : *Transcendence Theory over function fields*, Duke Math. J. **52** (1985), 517-527.

Sophie Dion
Université des sciences et technologies de Lille
UFR de mathématiques
59655 Villeneuve d'Ascq
Sophie.Dion@agat.univ-lille1.fr

Une formulation mixte en rotation potentiel vecteur convergente pour le problème de Stokes stationnaire tridimensionnel

Bilan des principaux résultats de these

Muriel Duloué

Depuis les années 70, le problème de Navier-Stokes stationnaire fait l'objet de nombreuses études mathématiques. Ce problème issu de la Mécanique des Fluides régit l'écoulement d'un fluide visqueux, newtonien, homogène et incompressible soumis à des forces extérieures. Lorsque le mouvement du fluide est suffisamment lent, ces équations se simplifient et portent le nom de système de Stokes.

Cette thèse est dédiée à l'étude de ces problèmes physiques formulés à partir de deux nouvelles inconnues non usuelles, la rotation et le potentiel vecteur, lesquelles sont directement liées à la vitesse du fluide considéré.

L'originalité des résultats théoriques obtenus porte sur trois points précis.

i) Tout d'abord, on travaille sur un ouvert borné simplement connexe de \mathbb{R}^3 à frontière connexe polyédrique auquel, *a priori*, le caractère convexe n'est pas imposé.

ii) Ensuite, on présente une formulation mixte en rotation potentiel vecteur (équivalente à celle en vitesse-pression) qui repose sur une décomposition de la rotation en une partie régulière et une partie harmonique. On développe une méthode conforme d'approximation basée sur les éléments de plus bas degré de Nédélec, laquelle se révèle inconditionnellement convergente. La partie régulière est traitée classiquement tandis qu'une perturbation de type stabilisation est introduite dans la formulation discrète standard de la partie harmonique. On obtient des résultats numériques plus précis que ceux donnés par les méthodes classiques. On présente les estimations *a priori* et *a posteriori*.

iii) Enfin, les propriétés de convergence mises à jour permettent de maîtriser le terme convectif non-linéaire des équations de Navier-Stokes en vertu de la théorie d'approximation de branches de solutions non singulières de Brezzi, Rappaz et Raviart.

Ce travail est une extension à la dimension trois des résultats bidimensionnels de Mohamed Amara et Christine Bernardi. A cette présentation réductrice, il faut néanmoins préciser que le problème de Stokes tridimensionnel formulé en rotation potentiel vecteur s'écrit sous une forme totalement différente de celui en dimension deux (ce dernier est un problème scalaire). Ainsi, le cadre fonctionnel associé au problème tridimensionnel n'est pas classique et a dû faire l'objet d'une étude précise.

Références

- [1] *R.A. Adams*, Sobolev Spaces, Academic Press (1975).
- [2] *M. Amara, C. Bernardi, M. Benyounes*, Error indicators for the Navier-Stokes equations in stream function and vorticity formulation, *Numerische Mathematik* **80** (1998), 181-206.

- [3] *M. Amara, F. Dabaghi*, An optimal C^0 finite element algorithm for the 2D biharmonic problem, Internal Report INRIA **3068** (1996).
- [4] *C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, V. Girault*, Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains, *Mathematical Methods in Applied Sciences*, vol. *21*, n° 9 (1998), 823-864.
- [5] *A. Bendali, J.-M. Dominguez, S. Gallic*, A variational approach for the vector potential formulation of the Stokes and Navier-Stokes problems in three-dimensional domains, *J. Math. Anal. Appl.* **107** (1985), 537-560.
- [6] *C. Bernardi, V. Girault, Y. Maday*, Mixed spectral element approximation of the Navier-Stokes equations in the stream-function and vorticity formulation, *IMA J. Numer. Anal.* **12** (1992), 565-608.
- [7] *F. Dubois*, Discrete vector potential representation of a divergence - free vector field in three-dimensional domains : numerical analysis of a model problem, *SIAM J. Numer. Anal.* **27** (1990), 1103-1141.
- [8] *M. Duloué*, Analyse Numérique des Problèmes d'Écoulement de Fluides, Ph. D. Thesis, Université de Pau et des Pays de l'Adour France, (janvier 2000).
- [9] *V. Girault, P.-A. Raviart*, Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms, Springer-Verlag (1986).
- [10] *J.-C. Nédélec*, A new family of mixed finite elements in \mathbb{R}^3 , *Numerische Mathematik* **50** (1986), 57-81.
- [11] *J.-C. Nédélec*, Elements finis mixtes incompressibles pour l'équation de Stokes dans \mathbb{R}^3 , *Numerische Mathematik* **39** (1982), 97-112.
- [12] *J. Peetre*, Another approach to elliptic boundary problems, *Pure Appl. Math. Sci.* **14** (1961), 711-731.
- [13] *V. Ruas*, On formulations of vorticity systems for a viscous incompressible flow with numerical applications, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* **74**- 1 (1994), 43-55.
- [14] *R. Temam*, Theory and Numerical Analysis of the Navier-Stokes equations, North-Holland (1977).

Duloué Muriel
 Université de Pau et des Pays de l'Adour
 Bâtiment I.P.R.A.
 Avenue de l'Université
 64000 Pau
 France
 Muriel.Duloue@wanadoo.fr
[http ://perso.wanadoo.fr/muriel.duloue](http://perso.wanadoo.fr/muriel.duloue)

Au sujet des abus de langages en informatique

Dominique Duval

Résumé.

Les langages informatiques comportent de nombreux abus, c'est-à-dire des situations où les règles qui permettent d'écrire les programmes ne suffisent pas à décrire le sens de ces programmes : la syntaxe et la sémantique ne concordent pas. C'est le cas, par exemple, des "effets de bord", susceptibles de modifier l'état d'une machine, sans que cela apparaisse clairement dans l'écriture du programme. Dès qu'on souhaite appréhender l'informatique sous un angle théorique, ces abus de langages s'avèrent très gênants, et il est tentant de les supprimer, en se ramenant à une situation complètement explicite où syntaxe et sémantique concordent parfaitement. Cependant, ces abus de langages fournissent des informations intéressantes : typiquement, ce qui est caché est d'une autre nature que ce qui est montré, et en montrant tout on perd ce type d'informations.

Dans cet exposé, nous présentons un travail fait avec Christian LAIR (Université de Paris 7), qui montre que très souvent, en fait, ces abus de langage sont organisés selon une structure algébrique précise. On peut alors, pour les expliciter, utiliser une construction algébrique voisine d'un produit tensoriel. Mais surtout, il devient possible de prendre en compte directement les aspects implicites des langages informatiques, dans un formalisme algébrique adapté.

Spécifications.

L'approche de la *théorie des esquisses*, comme l'approche (plus classique en informatique) des *spécifications algébriques*, est essentiellement graphique. Plutôt que d'utiliser des formules logiques, cette approche fait appel à des graphes orientés, enrichis par de la composition de flèches, des équations entre flèches, et des *contraintes* permettant de traduire des propriétés non équationnelles (et qui, techniquement, sont aussi constituées de graphes). Un tel "graphe enrichi" est une *esquisse*, au sens de C. Ehresmann [Ehresmann 66], [Ehresmann 68], ou, plus généralement, une *trame*, au sens de C. Lair [Lair 87]. Une trame est une donnée formelle, ou *syntactique*, dont le sens, *i.e.* la *sémantique*, est fourni par une (ou des) *réalisation(s)*. La plupart du temps, une telle réalisation est *ensembliste*, c'est-à-dire qu'elle interprète chaque point du graphe comme un ensemble, chaque flèche du graphe comme une application, et ainsi de suite, de façon cohérente : la notion de *foncteur* entre *catégories* est sous-jacente à cette notion. Ces questions sont traitées dans [guidel].

La notion d'état.

A titre d'exemple, considérons la notion *d'état* en informatique. Pour plus de précisions, et un exemple détaillé, on pourra se reporter à [state]. Il y a plusieurs façons de spécifier cette notion. En gros, ces méthodes peuvent être réparties en deux familles, selon que l'état y est *explicite* ou *implicite*.

Une *spécification avec état explicite* est une trame \mathbf{S}^{ex} qui comporte un point distingué. Sa sémantique est fournie par une réalisation ensembliste de \mathbf{S}^{ex} , dans laquelle le point distingué est interprété comme l'ensemble des états de la machine considérée. Il s'agit donc d'une spécification tout-à-fait classique, mais souvent confuse, et dont il est difficile d'extraire une bonne notion de programme.

Une *spécification avec état implicite* est composée, entre autres, d'une trame \mathbf{S}^{im} . Mais celle-ci ne comporte aucun point pour représenter l'état, et ses réalisations ensemblistes n'ont aucun sens. Cependant, la trame \mathbf{S}^{im} fournit une bonne notion de programme, et les états de la machine peuvent être vus comme des réalisations ensemblistes d'une partie de \mathbf{S}^{im} . D'autre part, c'est une réalisation *non ensembliste* de \mathbf{S}^{im} qui en donne la sémantique. Pour définir précisément cette réalisation, il faut fournir des informations supplémentaires.

Une spécification avec état implicite est donc formée d'une trame \mathbf{S}^{im} et d'autres composants. C'est une *mosaïque*, au sens de [guide2]. Les autres composants servent à préciser la nature de la réalisation qui fournit la sémantique de la trame \mathbf{S}^{im} . Pour cela, on utilise *encore* des trames $\mathbf{K}(i)$ (où i parcourt une certaine famille d'indices).

Le produit en ruban.

Considerons une mosaïque avec état implicite, comportant une trame \mathbf{S}^{im} et des trames $\mathbf{K}(i)$. Un résultat fondamental est que :

En regroupant convenablement toutes les trames qui composent une mosaïque avec état implicite, il est possible de retrouver la trame avec état explicite \mathbf{S}^{ex}

Cette construction s'appelle le *produit en ruban*, et ce résultat montre que le produit en ruban est, en fait, une forme de *produit tensoriel* [guide2].

Conclusion.

Les trames fournissent un outil de spécification bien adapté aux situations explicites, c'est-à-dire essentiellement à la programmation fonctionnelle. Pour traiter de la programmation impérative, ainsi que de divers autres aspects implicites des langages informatiques, nous proposons un second outil de spécification : les mosaïques. Le lien entre les deux approches est fourni par le produit en ruban, qui permet d'expliciter les aspects implicites par une construction algébrique proche du produit tensoriel.

Références

- [Ehresmann 66] Charles Ehresmann. Introduction to the theory of structured categories. Technical Report 10, University of Kansas at Lawrence, 1966.
- [Ehresmann 68] Charles Ehresmann. Esquisses et types de structures algébriques. *Bulletin de l'Institut Polytechnique, Iasi*, 14, pp. 1-32, 1968.

- [Lair 87] Christian Lair. Trames et sémantiques catégoriques des systèmes de trames. *Diagrammes*, 18 :CL1-CL47, 1987.
- [ref] Christian Lair and Dominique Duval. Sketches and specifications : reference manual. *Rapport de recherche du LACO*, 2000.
<http://www.unilim.fr/laco/rapports>.
[ref1] First part : Compositive graphs.
[ref2] Second part : Projective sketches.
[ref3] Third part : Models.
- [guide] Dominique Duval and Christian Lair. Sketches and specifications : User's guide. *Rapport de recherche du LACO*, 2000.
<http://www.unilim.fr/laco/rapports>.
[guidel] First part : Wefts for explicit specification.
[guide2] Second part : Mosaics for implicit specification.
- [state] Dominique Duval and Christian Lair. Mosaics for specifications with implicit state. *Rapport de recherche du LACO*, 2000.
<http://www.unilim.fr/laco/rapports>.

Dominique DUVAL
LACO, Université de Limoges
123 avenue Albert Thomas
F-87060 Limoges Cedex
dominique.duval@unilim.fr
<http://www.unilim.fr/laco/perso/dominique.duval/index.html>

Vitesse de convergence en théorie des probabilités

Christine Fricker

Le but de l'exposé est de présenter les problèmes et les résultats classiques liés à la vitesse de convergence vers l'équilibre de processus de Markov finis en les illustrant par des exemples de marches aléatoires sur des graphes, puis de les appliquer à l'étude d'un modèle issu des files d'attente, le modèle d'Erlang, qui a fait l'objet d'un travail commun avec Philippe Robert et Danielle Tibi [5].

Soit (X_n) une chaîne de Markov irréductible apériodique sur un ensemble fini E d'unique mesure d'équilibre $\pi = (\pi_i)_{i \in E}$.

Question : Quel est le temps d'atteinte de l'équilibre, i.e. à partir de quel n peut-on approximer la loi de X_n par π ?

Ce problème est intéressant si la mesure d'équilibre a une expression simple alors que les probabilités transitoires de la chaîne, utiles en pratique, sont difficiles à calculer. L'exemple de référence sera le suivant.

Définition : Une marche aléatoire sur un graphe G est une chaîne de Markov sur G telle que la transition de x à y se fait avec probabilité $p(x, y) = \frac{1}{d_x}$ si y est voisin de x , 0 sinon, d_x étant le degré de x ou nombre de voisins de x .

Si G est de degré constant, comme le tore \mathbb{Z}_N ou l'hypercube $\{0, 1\}^N$ considérés dans la suite, la mesure d'équilibre est uniforme.

Soit $d(t)$ l'écart entre la probabilité à l'instant t et la mesure d'équilibre, plus précisément

$$d(t) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x \in E} \|P_x(t) - \pi\|_{vt}$$

où $P_x(t)$ est la loi de $X(t)$ quand $X(0) = x$ et la norme utilisée est la norme en variation totale définie pour λ , et μ deux mesures sur l'ensemble fini E par

$$\|\lambda - \mu\|_{vt} = \sup_{A \subset E} |\lambda(A) - \mu(A)| = \frac{1}{2} \sum_{x \in E} |\lambda_x - \mu_x|.$$

En général, $d(t)$ a un comportement typique : Remarquons que $d(t) \in [0, 1]$. Pendant un certain temps $P_x(t)$ reste loin de la mesure d'équilibre π et $d(t)$ est proche de 1, puis l'équilibre s'installe en un temps très court et $d(t)$ devient voisin de 0. On définit ainsi le temps d'atteinte de l'équilibre $\tau_e = \inf\{t > 0, d(t) < 1/e\}$ où la valeur de la constante arbitraire $1/e$ dans $]0, 1[$ importe peu. Par ailleurs un résultat de Doeblin donne une décroissance exponentielle de $t \rightarrow d(t)$

$$d(t) \leq C e^{-t/\tau_r},$$

τ_r étant appelé temps de relaxation. La vitesse de convergence vers l'équilibre est mesurée par ces deux quantités. On s'intéresse aux grands systèmes où $|E|$ est une fonction croissante d'un N grand. On veut obtenir le comportement asymptotique des bornes de $d_N(t)$ et des temps de relaxation et d'atteinte de l'équilibre. Pour certaines chaînes de Markov, la décroissance vers l'équilibre se fait de façon brutale (voir Diaconis [3]) au sens suivant.

Définition : On dit qu'une suite de chaînes de Markov (X_n^N) possède la propriété de cut-off pour (a_N) si et seulement si

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} d_N(ta_N) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases} .$$

Les méthodes pour estimer $d(t)$ sont de trois types :

Géométrie (voir Diaconis et Strook [4]).

Si la chaîne de Markov (ou le processus de Markov) de matrice de transition $(p(x, y))$ est réversible i.e. $(\pi_x p(x, y))$ est symétrique, de valeurs propres par conséquent réelles comprises entre -1 et 1 , 1 est valeur propre et on note β_1 la deuxième plus grande valeur propre. La proposition suivante donne que τ_r^{-1} est exactement $1 - \beta_1$, dit trou spectral.

Proposition

$$\|P_x(t) - \pi\|_{vt} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - \pi(x)}{\pi(x)}} e^{-(1-\beta_1)t}, \quad x \in E, t \in \mathbb{R}^+.$$

La majoration de $d(t)$ passe donc par le calcul de β_1 , qui peut être obtenu par le principe de Rayleigh-Ritz. Remarquons que la connaissance de β_1 seul ne suffit pas à majorer $d(t)$, ni à avoir une borne sur τ_e .

Pour le tore et l'hypercube, on a une expression exacte des valeurs propres et $\beta_1^N = \cos 2\pi/N$ (respect. $1 - 2/N$). La proposition ci-dessus montre que $d_N(t) \leq \sqrt{N} e^{-2\pi^2 t/N^2} / 2$ d'où $\tau_e^N < N^2 \log N / (4\pi^2)$, respectivement $d_N(t) \leq 2^{N/2-1} e^{-2t/N}$ d'où $\tau_e^N < N^2 (\log 2) / 4$.

Analyse de Fourier (si E est un groupe) (voir Diaconis [2])

Définition : Si $p = (p_g)_{g \in G}$ est une probabilité sur $(G, +)$ groupe commutatif fini, on appelle fonction caractéristique de p et on note \hat{p} la fonction définie sur l'ensemble des caractères χ de G , c'est-à-dire des homomorphismes de $(G, +)$ dans (\mathbb{C}^*, \cdot) , par

$$\hat{p}(\chi) = \sum_{g \in G} \chi(g) p_g.$$

Proposition : Pour toute loi p sur G , si π est la loi uniforme sur G ,

$$\|p - \pi\|_{vt} \leq \frac{1}{4} \sum_{\chi \neq 1} |\hat{p}(\chi)|^2.$$

En déterminant les caractères et en utilisant cette proposition, pour le tore et pour l'hypercube, on obtient de meilleures estimations de $d_N(t)$

$$\begin{aligned} 1/2(\cos(\pi/N))^t &\leq d_N(t) \leq \sqrt{3/2}(\cos(\pi/N))^t; \\ d_N(t) &\leq \frac{1}{2} \left(\exp\left((N+1)\exp\left(-\frac{4t}{N+1}\right) - 1\right) \right) \end{aligned}$$

qui conduisent à de meilleures bornes pour le temps d'atteinte de l'équilibre en N^2 , respectivement $N(\log N)/4$, qui en est en fait un équivalent.

Probabilités

Elle est basée sur le couplage (voir Aldous [1]).

Définition : On dit qu'il y a couplage avec le processus stationnaire si on peut construire deux processus de Markov $(X(t))$ et $(\tilde{X}(t))$ de même matrice de transition tels que $X_0 = x \in E, \tilde{X}_0 \sim \pi$ tels que si $T = \inf\{t \geq 0, X(t) = \tilde{X}(t)\}$ alors $X(t) = \tilde{X}(t)$ si $t \geq T$.

On peut borner $d(t)$ à l'aide du temps de couplage T avec la trajectoire stationnaire :

$$d(t) \leq P(T > t).$$

Pour le tore et l'hypercube, on obtient des bornes du même ordre que par l'analyse de Fourier pour le temps d'atteinte de l'équilibre en N^2 , respectivement $N(\log N)/2$.

Nous terminons cet exposé par l'étude du modèle d'Erlang, utilisé pour modéliser un central téléphonique. Soit $(X_N(t))$, le nombre de clients à l'instant t de la file $M/M/N/N$ de taux d'arrivée λN et de taux de service 1, processus de Markov sur $E = \{0, \dots, N\}$ de mesure d'équilibre la loi de Poisson tronquée sur E . Le résultat principal donne un majorant de $d_N(t)$ et l'existence d'un cut-off pour les 3 régimes possibles du modèle.

Proposition Si $\lambda \leq 1, d_N(t) \leq Ne^{-t}$ et $(X_N(t))$ vérifie la propriété de cut-off pour $(\log N)/2$ et si $\lambda > 1, d_N(t) \leq \lambda^{N/2} e^{-N(\sqrt{\lambda}-1)^2 t}$ vérifie la propriété de cut-off pour $\log(\lambda/(\lambda-1))$.

Intuitivement, et des renormalisations le montrent, si $\lambda > 1, X_N(t)$ reste voisin de N et si $\lambda < 1$ (resp. $\lambda = 1$), $X_N(t)$ reste dans une zone $[\lambda N - a\sqrt{N}, \lambda N + a\sqrt{N}]$ (resp. $[N - a\sqrt{N}, N]$). Le temps d'atteinte de l'équilibre sera équivalent au temps d'atteinte de N partant de 0 dans le cas $\lambda > 1$, au temps d'atteinte de la zone partant de 0 dans les autres cas.

Références

- [1] Aldous, D. Random walks on finite groups and rapidly mixing Markov chains. In Seminar on probability, XVII, vol. 986 of Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1983, pp. 243-297.
- [2] Diaconis, P. Group representations in probability and statistics. Institute of Mathematical Statistics, Harvard, 1988.

- [3] Diaconis, P. The cutoff phenomenon in finite Markov chains. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 93, 4 (1996), 1659-1664.
- [4] Diaconis, P., and Stroock, D. Geometric bounds for eigenvalues of Markov chains. Ann. Appl. Probab. 1, 1 (1991), 36-61.
- [5] Fricker, C., Robert, P., and Tibi, D. On the rates of convergence of Erlang's model. Journal of Applied Probability 36, 4 (1999), 1-18.

Christine Fricker
INRIA
Rocquencourt
78 153 Le Chesnay Cedex
France
Christine.Fricker@inria.fr

Sur l'invariant universel des 3-variétés de Le-Murakami-Ohtsuki

Catherine Gille

Les surfaces fermées orientées connexes sont classifiées par le genre. En dimension 3 en revanche, on n'a pas de classification complète et la conjecture de Poincaré tient toujours. Il est donc intéressant de construire des invariants des 3-variétés, problème qui peut être lié à la théorie des noeuds (et entrelacs), comme nous l'expliquons dans la première partie. Nous présentons ensuite un invariant récent des entrelacs -l'invariant de Kontsevich- ainsi qu'un invariant des 3-variétés qui en est issu -l'invariant de Le-Murakami-Ohtsuki-.



1. Construction d'invariants des 3-variétés via la théorie des noeuds

Définition : Un **entrelacs** orienté à l composantes dans la 3-sphère S^3 est une sous variété difféomorphe à l copies ordonnées du cercle S^1 , telle que chaque composante est munie d'une orientation. On le note $L = L_1 \cup \dots \cup L_l$. Un entrelacs à une seule composante s'appelle un noeud. On considère les entrelacs à isotopie près.

Comme $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, on peut toujours regarder un entrelacs de S^3 dans \mathbb{R}^3 et le représenter par un diagramme dans le plan (image par une projection régulière) en gardant en mémoire les croisements, de manière à ce que ce diagramme détermine l'entrelacs à isotopie près.

Exemple : Le diagramme  représente un entrelacs à 2 composantes.

Un **entrelacs avec framing** est un entrelacs orienté L tel que chaque composante est munie d'une section de la projection $\partial N(L_i) \rightarrow L_i$ (à isotopie près) où $\partial N(L_i)$ est le bord d'un voisinage tubulaire de L_i . Cela revient à considérer chaque composante comme un ruban $S^1 \times [0, 1]$ et non plus comme un cercle S^1 . Un entrelacs avec framing peut encore être représenté par un diagramme dans le plan : il suffit de penser à chaque courbe comme un ruban aplati.

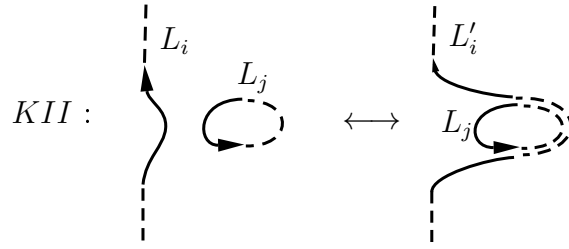
Exemple : Les diagrammes  et  représentent le noeud trivial mais avec des framing différents.

A partir de tout entrelacs avec framing de S^3 , on peut construire par chirurgie de Dehn une 3-variété fermée orientée connexe, notée $S^3(L)$. On a les deux résultats fondamentaux suivants :

Théorème (Lickorish 1962) *Pour toute 3-variété fermée orientée connexe M , il existe un entrelacs avec framing L tel que $M = S^3(L)$.*

Théorème (Kirby 1978) *$S^3(L)$ et $S^3(L')$ sont difféomorphes si et seulement si L et L' sont reliés, à orientation près, par une suite finie de mouvements élémentaires de types suivants, définis sur les diagrammes dans le plan :*

$$KI : L \longleftrightarrow L \amalg \text{⌚}, \quad KI : L \longleftrightarrow L \amalg \text{⌚}$$




Conséquence des théorèmes de Lickorish et Kirby : Soit maintenant un invariant des entrelacs, c'est-à-dire une fonction I de l'ensemble des entrelacs dans un ensemble quelconque. Si I passe au quotient pour les mouvements de Kirby KI et KII et le changement d'orientation d'une composante, on obtient un invariant des 3-variétés.


2. L'invariant de Kontsevich des entrelacs

Dans [2], Le et Murakami ont construit un invariant $\hat{Z}(L)$ des entrelacs orientés avec framing L qui généralise l'intégrale de Kontsevich des noeuds et est universel pour les invariants de Vassiliev. L'existence de cet invariant est un théorème difficile mais nous voulons ici mettre l'accent sur le fait qu'il est calculable facilement à partir des diagrammes des entrelacs.

Définition : Si X est une variété (abstraite) de dimension 1 compacte orientée, un **diagramme univalent** de support X est la variété X munie d'un graphe univalent tel que les sommets univalents sont sur X et les sommets trivalents sont munis d'une orientation (c'est-à-dire un ordre cyclique des sommets adjacents). Les diagrammes univalents sont regardés à homéomorphisme près respectant les composantes de X , l'orientation de X et l'orientation des sommets trivalents du graphe. Le **degré** d'un diagramme univalent est la moitié du nombre de sommets de son graphe. Dans une représentation plane d'un diagramme univalent de support X , on représente les composantes de X par des lignes pleines et le graphe par des lignes pointillées. L'orientation des sommets trivalents est donnée par le sens trigonométrique.

Exemple :  est un diagramme univalent de support S^1 et de degré 3.

On note $\mathcal{A}(X)$ le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les diagrammes univalents de support X , quotienté par certaines relations non détaillées ici. Ces relations respectent le degré, ainsi $\mathcal{A}(X)$ est gradué. Si $X = \emptyset$, les diagrammes univalents sont simplement des graphes trivalents. $\mathcal{A}(\emptyset)$ est muni d'une structure d'algèbre commutative graduée, le produit étant donné par l'union disjointe.

Un q -**tangle** est un tangle orienté avec framing dont les extrémités sont des mots non-associatifs. Tout entrelacs peut se décomposer en produit de q -tangles élémentaires  et avec éventuellement des orientations différentes et où chaque composante peut être remplacée par plusieurs composantes parallèles.

On définit :

- $\hat{Z} \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} \right) = \uparrow \in \mathcal{A} \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{array} \right)$

- $\hat{Z}(\text{loop}) = \text{loop} + \frac{1}{48} \text{loop with dot} + \dots \in \mathcal{A}(\text{loop})$
- $\hat{Z}(\text{loop}) = \text{loop} + \frac{1}{48} \text{loop with dot} + \dots \in \mathcal{A}(\text{loop})$
- $\hat{Z}(\text{cross}) = \text{cross} + \frac{1}{2} \text{cross with dot} + \frac{1}{8} \text{cross with dot} + \dots \in \mathcal{A}(\text{cross})$
- $\hat{Z}(\text{cross}) = \text{cross} - \frac{1}{2} \text{cross with dot} + \frac{1}{8} \text{cross with dot} + \dots \in \mathcal{A}(\text{cross})$
- $\hat{Z}(\text{trivalent}) = \text{trivalent} + \frac{1}{24} (\text{trivalent with dot} - \text{trivalent with dot}) + \dots \in \mathcal{A}(\text{trivalent})$
- $\hat{Z}(\text{trivalent}) = \text{trivalent} - \frac{1}{24} (\text{trivalent with dot} - \text{trivalent with dot}) + \dots \in \mathcal{A}(\text{trivalent})$

On définit aussi ce qui se passe lorsqu'on change l'orientation d'une composante d'un q -tangle ou lorsqu'on double une composante (cf [2]). On peut alors calculer $\hat{Z}(L) \in \mathcal{A}(\Pi_{i=1, \dots, l} S^1)$ pour tout entrelacs L à l composantes.

Exemple : $\hat{Z}(\text{circle}) = \hat{Z}(\text{loop}) \circ \hat{Z}(\text{loop}) = (\text{loop} + \frac{1}{48} \text{loop with dot} + \dots) \circ (\text{loop} + \frac{1}{48} \text{loop with dot} + \dots) = \text{circle} + \frac{1}{24} \text{circle with dot} + \dots \in \mathcal{A}(\text{circle})$

3. L'invariant de Le-Murakami-Ohtsuki des 3-variétés

\hat{Z} n'est pas invariant par les mouvements de Kirby. Cependant, dans [4], Le, Murakami et Ohtsuki ont construit une fonction explicite qui composée avec \hat{Z} le devient, ce qui fournit ainsi un invariant des 3-variétés. L'invariant obtenu $\Omega(M)$ est un élément de $\mathcal{A}(\emptyset)$, l'algèbre graduée des graphes trivalents. On a le résultat suivant :

Théorème ([3]) *Pour toute 3-variété M , $\Omega(M) = 1 + \frac{(-1)^{b_1(M)}}{2} \lambda(M) \text{circle with dot} + O(2)$ où b_1 est le premier nombre de Betti, λ l'invariant de Casson-Walker-Lescop ([5]) et où $O(2)$ désigne des termes de degré ≥ 2 .*

Ainsi, on sait interpréter le terme de degré 1 de l'invariant Ω mais on ne sait rien sur le terme de degré 2. Pour avancer dans cette direction, l'idée est de le calculer pour les sphères d'homologie entières dont l'invariant de Casson est nul. Voici un résultat pour une famille de telles variétés.

Théorème ([1]) *Soit K un noeud de framing trivial et soit \tilde{K}_η , double non-twisté du noeud K ($\eta = \pm 1$). Alors : $\Omega(M_{\tilde{K}_\eta}) = 1 + \frac{-1}{4} a_2(K) \text{circle with dot} + O(3)$ où $a_2(K)$ est le coefficient de degré 2 du polynôme de Conway du noeud K .*

Références

[1] Gille C., Sur l'invariant de Le-Murakami-Ohtsuki en degré 2. Preprint.

- [2] *Le T. T. Q., Murakami J.*, The universal Vassiliev-Kontsevich invariant for framed oriented links. *Compos. Math.* **102** (1996), 41-64.
- [3] *Le T. T. Q., Murakami H., Murakami J., Ohtsuki T.*, A three manifold invariant via the Kontsevich integral. Preprint (1995).
- [4] *Le T. T. Q., Murakami J., Ohtsuki T.*, On a universal quantum invariant of 3-manifolds. *Topology* **37** (1998), 539-574.
- [5] *Lescop C.*, *Sur l'invariant de Casson-Walker : formule de chirurgie globale et généralisation aux variétés de dimension 3 fermées orientées.* *C. R. Acad. Sci. Paris Ser.I*, **315** (1992), 437-440.

Catherine Gille
Mathematisches Institut, Universität Bern
Sidlerstrasse 5, 3012 Bern, Suisse
gille@math-stat.unibe.ch

Inégalités pour la constante de temps en percolation de premier passage

Régine Marchand

La percolation de premier passage a été introduite en 1965 par Hammersley et Welsh comme modèle pour les matériaux poreux (voir aussi [K84] pour les principaux résultats). Pour représenter le médium poreux, nous considérons le graphe \mathbf{Z}^2 , que nous munissons de l'ensemble \mathbf{E}_2 des arêtes joignant les plus proches voisins pour la norme $\|\cdot\|_1$, définie sur \mathbf{R}^2 par $\|(x, y)\|_1 = |x| + |y|$. Ces arêtes modélisent les canaux microscopiques du matériau susceptibles de laisser passer un liquide. Chaque arête est alors munie d'un temps de passage aléatoire $t(e)$ représentant le temps nécessaire à la traversée de l'arête.

Nous supposons, pour la suite, que les $(t(e))_{e \in \mathbf{E}_2}$ sont indépendants et identiquement distribués. Notons F leur fonction de répartition commune, sur laquelle nous faisons en outre les hypothèses (H) suivantes : F est de moyenne finie, son support $\text{supp } F$ est inclu dans \mathbf{R}^+ et $\inf \text{supp } F = 1$. Remarquons que F n'est pas supposée continue a priori. Le support de F désigne ici l'ensemble des points où F est strictement croissante, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs effectivement prises par le temps de passage t .

Le temps de passage d'un chemin est la somme des temps de passage des arêtes qui le composent et le temps de passage $t(x, y)$ entre deux points x et y de \mathbf{Z}^2 est l'infimum des temps de passage de tous les chemins joignant x à y , définition que l'on étend aux points de \mathbf{R}^2 en considérant les plus proches voisins. Cette grandeur représente le premier instant où un liquide, injecté en x au temps $t = 0$ atteindra le point y . Nous nous intéressons en particulier à l'ensemble des points atteints à partir de l'origine au temps n : $A(n) = \{z \in \mathbf{R}^2, t(0, z) \leq n\}$.

Ceci nous donne une description microscopique du milieu poreux. Afin d'en déduire des informations macroscopiques, nous recherchons des propriétés asymptotiques pour ce modèle.

Question 1 Quel est, pour x fixé, le comportement de $(t(0, nx))_{n \in \mathbf{N}}$?

Des techniques de théorème ergodique sous-additif permettent de prouver l'existence d'une vitesse directionnelle :

$$\forall x \in \mathbf{R}^2, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t(0, nx)}{n} = \mu(x) = \inf_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{Et(0, nx)}{n}$$

cette convergence ayant lieu presque sûrement et dans L^1 . L'application $x \mapsto \mu(x)$ est une norme sur \mathbf{R}^2 , on notera A sa boule unité et $\mu = \mu((0, 1))$ sera appelée constante de temps du modèle de percolation de premier passage associé à F .

Question 2 Quel est le comportement de $(A(n))_{n \in \mathbf{N}}$?

Si F a de plus un second moment fini, Cox et Durrett, dans [CD81], prouvent le théorème de forme asymptotique suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, P \left((1 - \varepsilon)A \subset \frac{A(n)}{n} \subset (1 + \varepsilon)A \text{ pour } n \text{ suffisamment grand} \right) = 1.$$

L'ensemble A décrit donc le comportement des sites mouillés au temps n , renormalisé par n : on l'appelle forme asymptotique du modèle de percolation de premier passage associé à F . C'est un ensemble compact convexe de \mathbf{R}^2 , déterministe.

Question 3 Peut-on calculer μ ou A en fonction de F ?

Le calcul de μ , sans parler de celui de A , est un problème ardu, non résolu pour l'instant. Nous sommes donc particulièrement intéressés par les problèmes d'approximation. Ainsi, si $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge faiblement vers F , un résultat de continuité de [CK81] assure que $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers μ , et, en un certain sens, $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers A . Pourrait-on faire mieux et trouver une approximation F , obtenue par troncature par exemple, ayant même constante de temps ou même forme asymptotique que F ? Notre travail vise à répondre à cette question, en étendant un résultat de Van den Berg et Kesten, dans [vdBK93]. Nous l'exposons dans le cadre de la domination stochastique :

Définition : soit F et \tilde{F} deux fonctions de répartition sur \mathbf{R} telles que pour tout réel t , $F(t) < \tilde{F}(t)$; on dit alors que F domine stochastiquement \tilde{F} . Si F et \tilde{F} sont de plus distinctes, on dit que la domination est stricte.

Un couplage des deux fonctions de répartition permet dans ce cas de voir que $\tilde{\mu} \leq \mu$ et $A \subset \tilde{A}$. Notre problème se reformule en ces termes : peut-on trouver une fonction de répartition F vérifiant les hypothèses (H) et une fonction de répartition \tilde{F} sur \mathbf{R}^+ , de moyenne finie, strictement dominée par F et telle que $\tilde{\mu} = \mu$? Notons \vec{p}_c le seuil de percolation critique en percolation orientée sur les arêtes de \mathbf{Z}^2 (voir [D84]).

Théorème 1 (de comparaison) Soit F vérifiant (H) et telle que $F(1) > \vec{p}_c$. Soit \tilde{F} une fonction de répartition sur \mathbf{R}^+ , de moyenne finie, strictement dominée par F . Alors $\tilde{\mu} < \mu$.

Van den Berg et Kesten, dans [vdBK93], ont prouvé le résultat analogue sous la condition $F(1) < \vec{p}_c$. La suite s'organise de la façon suivante : dans un premier temps, nous verrons comment l'hypothèse $F(1) < \vec{p}_c$ intervient dans la démonstration de Van den Berg et Kesten ; ceci nous conduira à étudier, dans le cas $F(1) > \vec{p}_c$ l'existence d'un bord plat de la forme asymptotique A . Dans un deuxième temps, nous verrons comment la détermination exacte de ce bord plat permet d'obtenir l'extension du théorème de Van den Berg et Kesten dans ce cas.

Détermination du bord plat de la forme asymptotique :

On suppose que F vérifie les hypothèses (H).

Si $F(1) < \vec{p}_c$, alors avec une grande probabilité, il n'existe pas, si x et y sont suffisamment éloignés, de chemin joignant x à y et comportant exactement $\|y - x\|_1$ arêtes de temps de passage 1. En effet, un tel chemin constituerait un chemin ouvert orienté dans le modèle de percolation orientée sous-critique de paramètre $F(1)$. En utilisant un principe de grandes déviations pour la percolation orientée sous-critique et un procédé de renormalisation, Van den Berg et Kesten montrent l'existence de trois constantes strictement positives δ, A, B telles que pour tous points x et y de \mathbf{Z}^2 :

$$(R)P(t(x, y) \leq (1 + \delta)\|y - x\|_1) \leq A \exp(-B\|y - x\|_1).$$

Un couplage de F et \tilde{F} permet alors d'utiliser l'excédent δn de temps le long du chemin de temps de passage t minimal entre 0 et n pour modifier ce chemin de façon à ce qu'il utilise, avec une grande probabilité, un nombre proportionnel à n d'arêtes telles que $\tilde{t}(e) < t(e) - s$, avec $s > 0$. On en déduit alors que $\tilde{\mu} < \mu$.

Si $F(1) > \vec{p}_c$, le résultat (R) n'est plus vrai : il existe avec une probabilité strictement positive, des chemins infinis orientés ne contenant que des arêtes de temps 1. Le long de ces chemins, on ne peut pas espérer, si $\inf \text{supp} F = 1$, trouver des arêtes telles que $\tilde{t}(e) < t(e) - s$. La première étape consiste donc à déterminer les directions dans lesquelles de tels chemins existent, c'est-à-dire les x de \mathbf{R}^2 tels que $\mu(x) = \|x\|_1$. Le résultat suivant généralise un théorème de Durrett et Liggett dans [DL81] :

Théorème 2 (bord plat) Soit F vérifiant (H) et telle que $F(1) = p > \vec{p}_c$. Alors la forme asymptotique A du modèle de percolation de premier passage associée à F est incluse dans $\{x \in \mathbf{R}^2, \|x\|_1 \leq 1\}$ et admet un bord plat entièrement déterminé par la masse affectée à 1 par F :

$$A \cap \{x \in \mathbf{R}^2, \|x\|_1 = 1\} \cap (\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+) = [M_p, N_p],$$

où M_p est le point de coordonnées $(\beta_p, 1 - \beta_p)$, N_p est le point symétrique de M_p par rapport à la première bissectrice, $\beta_p = \frac{1}{2} + \frac{\alpha_p}{\sqrt{2}}$ et α_p est la vitesse asymptotique dans le modèle de percolation orientée de paramètre $p > \vec{p}_c$ sur les arêtes de \mathbf{Z}^2 (voir [D84] pour une définition). La preuve de ce résultat repose sur l'étude du modèle de percolation orientée sous-jacent, et utilise un principe de grandes déviations en régime surcritique ainsi qu'un procédé de renormalisation pour obtenir, dans les directions n'appartenant pas au cône de percolation un analogue à (R).

Idée de la preuve du théorème de comparaison :

La convexité de la forme asymptotique A assure que $\frac{1}{\mu} \geq \beta_p$. Cependant, nous aurons besoin d'une inégalité stricte :

Théorème 3 $\frac{1}{\mu} > \beta_p$.

Ce résultat assure que pour joindre 0 à n , le moyen le plus économique en temps n'est pas d'essayer de n'utiliser que des portions orientées ne comportant que des arêtes de temps de passage 1, (et donc des portions dont la pente est dans le cône de percolation du modèle de percolation orientée sous-jacent) mais soit d'utiliser des arêtes de temps

supérieur, soit d'utiliser plus d'arêtes que le minimum indispensable. La preuve de ce résultat utilise des techniques de chaînes de Markov et de temps d'arrêt dans le modèle de percolation orientée.

Le théorème 3 assure, via un résultat de grandes déviations, que de grandes portions du chemin de temps minimal entre 0 et n vont avoir une pente n'appartenant pas au cône de percolation du modèle de percolation orientée sous-jacent. Le long de ces portions, on peut alors construire, comme Van den Berg et Kesten, des raccourcis, ce qu'on ne pourrait pas faire sur une portion comportant le nombre minimal d'arêtes, et uniquement des arêtes de temps de passage 1. On en déduit alors le théorème de comparaison.

Conclusion :

Le théorème 1 peut s'étendre dans chaque direction n'appartenant pas au cône de percolation, ainsi qu'au cadre d'un ordre plus général sur les fonctions de répartition (voir [vdBK93]). Par contre, les théorèmes 2 et 3 utilisent fortement des techniques propres à la dimension 2 ; une extension du théorème de comparaison aux dimensions supérieures nécessiterait l'étude de la percolation orientée en dimension supérieure à 3, et en particulier la mise aux points de résultats de type grandes déviations.

Références

- [vdBK93] Van den Berg, J., Kesten, H., Inequalities for the time constant in first-passage percolation, *The Annals of Applied Probability*, (1993), **vol 3, n1**, 56-80.
- [C80] Cox, J. T., The time constant of first-passage percolation on the square lattice, *Advances in Applied Probabilities*, (1980), **n12**, 864-879.
- [CD81] Cox, J. T., Durrett, R., Some limit theorems with necessary and sufficient conditions, *The Annals of Probability*, (1981), **vol 9, n4**, 583-603.
- [CK81] Cox, J. T., Kesten, H., On the continuity of the time constant of first-passage percolation, *Journal of Applied Probabilities*, (1981), **n18**, 809-819.
- [D84] Durrett, R., Oriented percolation in two dimensions, *The Annals of Probability*, (1984), **vol 12, n4**, 999-1040.
- [DL81] Durrett, R., Liggett, T.M., The shape of the limit set in Richardson's growth model, *The Annals of Probability*, (1981), **vol 9, n2**, 186-193.
- [HW65] Hammersley, J.M., Welsh, D.J.A., First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks and generalized renewal theory, Bernoulli, Bayes, Laplace Anniversary volume, J. Neyman and L.M. LeCam eds. Springer-Verlag, (1965), 61-110.

[K84] Kesten, H., Aspects of first passage percolation, Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag 1180, Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour XIV, (1984).

[R73] Richardson, D., Random growth in a tessellation, Proc. Camb. Phil. Soc., (1973), **74**, 515.

Régine Marchand
Institut élie Cartan (Mathématiques)
Université Henri Poincaré Nancy 1
B.P. 239, F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex
France
marchand@iecn.u-nancy.fr

Une version équivariante du théorème de non-réalisabilité de Kuhn-Schwartz

Dagmar M. Meyer

(travail en collaboration avec Dorra Bourguiba)

Soit p un nombre premier qui est arbitraire mais fixe. Dans cet exposé nous allons démontrer une version équivariante du théorème suivant qui est dû à Lionel Schwartz après une conjecture de Nick Kuhn :

Théorème 1 ([4]) *Soit X un espace topologique. Si la cohomologie H^*X est finiment engendrée sur l'algèbre de Steenrod, alors elle est de dimension finie en tant que \mathbb{F}_p -espace vectoriel gradué.*

Ici et dans ce qui suit H^*X désigne la cohomologie mod p de X .

Tout d'abord, rappelons la définition de l'algèbre de Steenrod : on considère la \mathbb{F}_p -algèbre graduée associative unitaire librement engendrée par les symboles Sq^i quand $p = 2$ et par les symboles P^i et β quand $p > 2$, où $i = 1, 2, \dots$. Les degrés de ces symboles sont $|Sq^i| = i$, $|P^i| = 2i(p - 1)$ et $|\beta| = 1$. Pour $i = 0$ on définit également $Sq^0 := 1$ resp. $P^0 := 1$. L'algèbre de Steenrod \mathcal{A} est le quotient de cette algèbre par l'idéal engendré par un certain ensemble de relations dites "relations d'Adem". Elle possède aussi la structure d'une coalgèbre ; en fait, c'est une algèbre de Hopf. La cohomologie mod p d'un espace topologique est un \mathcal{A} -module, munie du produit \cup elle est aussi une \mathcal{A} -algèbre, et ces deux structures satisfont à certaines conditions d'instabilité. En fait, cet exemple est à l'origine des deux premières définitions ci-dessous :

Définition 1 • *Un \mathcal{A} -module M à gauche est dit instable si pour tout $x \in M$, on a $Sq^i x = 0$ quand $i > |x|$ (si $p = 2$) et $\beta^e P^i x = 0$ quand $2i + e > |x|$, $e \in \{0, 1\}$ (si $p > 2$). On désignera par \mathcal{U} la catégorie des \mathcal{A} -modules instables avec des applications \mathcal{A} -linéaires de degré zéro. Le produit tensoriel sur \mathbb{F}_p de deux \mathcal{A} -modules instables, avec la structure de \mathcal{A} -module qui provient de la structure de coalgèbre de \mathcal{A} , est de nouveau un objet dans \mathcal{U} .*

• *Une \mathcal{A} -algèbre instable est un module $K \in \mathcal{U}$ qui est à la fois une \mathcal{A} -algèbre associative commutative (dans le sens gradué) unitaire telle que $Sq^{|x|} x = x^2$ (si $p = 2$) resp. $P^{|x|/2} x = x^p$ quand $|x|$ est pair (si $p > 2$). On note \mathcal{K} la catégorie des \mathcal{A} -algèbres instables avec des \mathcal{U} -morphisms qui respectent la multiplication.*

• *Soit $K \in \mathcal{K}$. Un $K - \mathcal{A}$ -module instable est un module $M \in \mathcal{U}$ avec une application $\sigma : K \otimes M \rightarrow M$ dans \mathcal{U} qui fait de M un K -module. On désigne par $K - \mathcal{U}$ la catégorie dont les objets sont les $K - \mathcal{A}$ -modules instables et dont les morphismes sont les \mathcal{U} -morphisms qui sont K -linéaires.*

Notons que si $K = \mathbb{F}_p$, la catégorie $K - \mathcal{U}$ coïncide avec \mathcal{U} .

L'intérêt des catégories $K - \mathcal{U}$ tient à l'observation suivante : soit G un groupe topologique et X un G -espace. La projection $q_G : EG \times_G X \rightarrow EG \times_G \{pt\} \simeq BG$ de la construction de Borel sur l'espace classifiant de G induit une application $q_G^* : H^*BG \rightarrow H^*(EG \times_G X) = : H_G^*X$ qui fait de la cohomologie équivariante H_G^*X de X un $H^*BG - \mathcal{A}$ -module instable. Voici le théorème que nous allons démontrer :

Théorème 2 ([1]) *Soit G un groupe de Lie compact et X un G -espace. Si la cohomologie équivariante H_G^*X de X est de type fini en tant qu'objet dans $H^*BG - \mathcal{U}$, alors elle est finiment engendrée sur H^*BG .*

Ici, l'expression " H_G^*X est de type fini en tant qu'objet dans $H^*BG - \mathcal{U}$ " signifie que l' \mathcal{A} -module instable $H_G^*X \otimes_{H^*BG} \mathbb{F}_p$ (où \mathbb{F}_p est un H^*BG -module via l'augmentation) est finiment engendré sur \mathcal{A} .

La démonstration de ce théorème se fait dans deux étapes : premièrement on réduit le problème au cas où G est un groupe unitaire, après on procède par un argument de récurrence sur n ; le cas $n = 0$ correspondant au Théorème 1.

Pour la réduction on utilise le fait que pour tout groupe de Lie compact il y a un plongement $G \xrightarrow{\rho} U(n)$ pour un certain nombre n . Soit maintenant X un G -espace. Alors $U(n) \times_G X$ est un $U(n)$ -espace, et le couple $(\rho, j) : (G, X) \rightarrow (U(n), U(n) \times_G X)$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} EG \times_G X & \xrightarrow{E\rho \times_E j} & EU(n) \times_{U(n)} (U(n) \times_G X) \\ q_G \downarrow & & q_{U(n)} \downarrow \\ BG & \xrightarrow{B\rho} & BU(n) \end{array}$$

Comme $EU(n)$ est un G -espace libre contractible, il peut être utilisé comme modèle pour EG . Avec cette observation il est clair que l'application induite $(j)_{hp}^* : H_{U(n)}^*(U(n) \times_G X) \rightarrow H_G^*X$ est un isomorphisme de $H^*BU(n) - \mathcal{A}$ -modules instables. On observe également que le module H^*BG est finiment engendré sur $H^*BU(n)$ (cf. [3, Cor. 2.4]), ce qui entraîne qu'il est de type fini en tant qu'objet dans $H^*BU(n) - \mathcal{U}$. Maintenant il n'est pas difficile de voir que pour démontrer le théorème 2 il suffit de considérer le cas $G = U(n)$. Supposons alors que X est un $U(n)$ -espace, $n > 0$, tel que $H_{U(n)}^*X$ est de type fini en tant qu'objet dans $H^*BU(n) - \mathcal{U}$, et supposons que le théorème a été démontré pour tout \hat{n} avec $0 \leq \hat{n} < n$. La démonstration que $H_{U(n)}^*X$ est finiment engendré sur $H^*BU(n)$ est conséquence de l'observation suivante :

Proposition 1 *Soit X un $U(n)$ -espace. On a une suite exacte courte dans la catégorie $H^*BU(n-1) - \mathcal{U}$ de la forme*

$$0 \rightarrow H^*BU(n-1) \otimes_{H^*BU(n)} H_{U(n)}^*X \rightarrow H_{U(n-1)}^*X \rightarrow \Sigma^{2n-1}\tau(n-1; H_{U(n)}^*X) \rightarrow 0$$

où

$$\tau(n-1; H_{U(n)}^*X) := \{m \in H_{U(n)}^*X \mid c_n m = 0\}$$

est considéré comme objet dans $H^*BU(n-1) - \mathcal{U}$ via l'inclusion canonique $H^*BU(n-1) \rightarrow H^*BU(n)$ et $c_n \in H^*BU(n) \cong \Gamma_p[c_1, \dots, c_n]$ désigne la n -ième classe de Chern universelle.

Pour la démonstration de cette proposition on considère l'inclusion canonique $\delta : U(n-1) \rightarrow U(n)$ et le diagramme "pullback" suivant :

$$\begin{array}{ccc} EU(n-1) \times_{U(n-1)} X & \xrightarrow{q_{U(n-1)}} & BU(n-1) \\ E\delta \times_{\delta} \text{id} \downarrow & & B\delta \downarrow \\ EU(n) \times_{U(n)} X & \xrightarrow{q_{U(n)}} & BU(n) \end{array}$$

Les deux colonnes sont des fibrations sphériques avec fibre S^{2n-1} . Nous désignons par $\{E_r^{*,*}[X]\}$ et $\{E_r^{*,*}[*]\}$ les suites spectrales de Leray-Serre (en cohomologie mod p) associées aux fibrations à gauche et à droite respectivement. On observe que $\{E_r^{**}[X]\}$ est un module sur $\{E_r^{*,*}[*]\}$; cette structure est compatible avec l'action de l'algèbre de Steenrod sur ces deux suites spectrales. De plus on sait que $\{E_r^{**}[X]\}$ converge vers son aboutissement $H_{U(n-1)}^*X$ en tant que $H^*BU(n-1) - \mathcal{A}$ module (cf. [1, Appendix A]).

Maintenant à partir d'une analyse du terme E_2 de la suite spectrale $\{E_r^{*,*}[X]\}$ on obtient la suite exacte courte désirée. En effet, il s'agit d'une partie de la suite exacte longue de Gysin associée à la fibration sphérique $E\delta \times_{\delta} \text{id}$. Ce qui est important est le fait que la partie qui nous intéresse est vraiment une suite exacte dans la catégorie $H^*BU(n-1) - \mathcal{U}$. En utilisant la proposition 1 on achève la démonstration du théorème 2 par le raisonnement suivant : par hypothèse $H_{U(n)}^*X$ est de type fini en tant qu'objet dans $H^*BU(n) - \mathcal{U}$ qui est une catégorie localement noethérienne ([2, Sect. 5.2]). L'action de $H^*BU(n)$ sur le sous-objet $\tau(n-1; H_{U(n)}^*X)$ de $H_{U(n)}^*X$ factorise par $B\delta^*$; par conséquent $\tau(n-1; H_{U(n)}^*X)$ est de type fini en tant qu'objet dans $H^*BU(n-1) - \mathcal{U}$. Évidemment $H^*BU(n-1) \otimes_{H^*BU(n)} H_{U(n)}^*X$ est lui aussi de type fini en tant qu'objet dans cette même catégorie. Il en résulte que le terme au milieu de la suite exacte de la proposition 1 a la même propriété.

Maintenant l'hypothèse d'induction dit que $H_{U(n-1)}^*X$ est en fait finiment engendré sur $H^*BU(n-1)$. Puisque la \mathbb{F}_p -algèbre $H^*BU(n-1)$ est noethérienne on déduit que le $H^*BU(n-1)$ -sous-module $H^*BU(n-1) \otimes_{H^*BU(n)} H_{U(n)}^*X$ de $H_{U(n-1)}^*X$ est lui aussi finiment engendré sur $H^*BU(n-1)$. Ceci implique que $H_{U(n)}^*X$ est finiment engendré sur $H^*BU(n)$.

Références

- [1] *D. Bourguiba, D. M. Meyer*, An equivariant version of the Kuhn-Schwartz non-realizability theorem, à paraître aux Math. Proc. Cambridge Phil. Soc
- [2] *D. M. Meyer*, Injective objects in categories of unstable K -modules, *Bonner Mathematische Schriften* **316** (1999).

- [3] *D. Quillen*, The spectrum of an equivariant cohomology ring I, *Ann. of Math.* **94** (1971), 549-572
- [4] *L. Schwartz*, A propos de la conjecture de non-réalisation due à N. Kuhn, *Invent. Math.* **134** (1998), 211-227

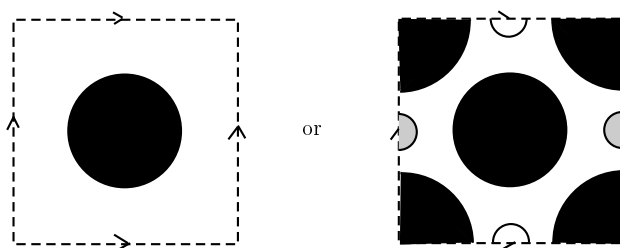
Dagmar M. Meyer
Mathematisches Institut
Georg-August-Universität Göttingen
Bunsenstr. 3-5
37073 Göttingen
Allemagne
meyerd@member.ams.org
<http://www.uni-math.gwdg.de/dagmar>

Sur l'ergodicité de billards dispersifs en mesure infinie

Françoise Pène

1. Introduction

Considérons un fermé Q du plan, \mathbf{Z}^2 -périodique dont le complémentaire est constitué d'une union dénombrable (localement finie) d'ouverts convexes $O_i (i \in \mathcal{J})$ d'adhérences deux à deux disjointes, de bord Γ_i de classe C^{r+1} avec $r \geq 2$ (et de courbure jamais nulle). Sur la figure suivante, sont représentés l'intersection avec le carré unité $[0; 1]^2$ de deux tels domaines (pour chacun de ces dessins, le domaine Q correspondant s'obtient par \mathbf{Z}^2 -périodicité) :



Nous nous intéressons au comportement d'une particule se déplaçant dans Q à vitesse unitaire, constante à l'intérieur de Q et obéissant aux lois de la réflexion à l'instant d'un choc contre ∂Q (selon la loi "angle incident = angle réfléchi"). Il peut être modélisé par le flot $(Y_t)_t$ sur $M' := T^1Q$, où $Y_t(x)$ désigne la configuration à l'instant t d'une particule dont la configuration à l'instant 0 est $x = (q, v)$. Ce flot préserve la mesure de Lebesgue m' sur M' . L'étude de $(M', m', (Y_t)_t)$ se ramène à celle du système dynamique (M, μ, T) où M, μ et T sont définis ci-dessous. L'ensemble M désigne l'espace des configurations après un choc :

$$M := \{x = (q, \vec{v}) \in M'; q \in \partial Q \text{ et } \langle \vec{n}(q), \vec{v} \rangle \geq 0\},$$

($\vec{n}(q)$ désignant le vecteur unitaire normal à ∂Q en q dirigé vers l'intérieur de Q). Remarquons que les cas où $\{\vec{n}(q), v-\} = 0$ correspondent aux cas où la trajectoire est tangente à l'instant du choc. Nous définissons la transformation $T : M \rightarrow M$ qui, à une configuration à l'instant après un choc associe la configuration à l'instant après le choc suivant :

$$T(q, \vec{v}) = (q', \vec{v}'), \quad \text{où } q' = q + \tau(q, \vec{v})\vec{v} \text{ et } \vec{v}' = \vec{v} - 2 \langle \vec{v}, \vec{n}(q') \rangle \vec{n}(q')$$

en notant $\tau(q, \vec{v}) = \min\{s > 0 : q + s\vec{v} \in \partial Q\} \in]0, +\infty[$ ($\tau(q, \vec{v})$ est fini pour des raisons de \mathbf{Z}^2 -périodicité). Cette transformation préserve la mesure μ donnée par $d\mu(q, \vec{v} = \cos(\varphi) \delta_i dr d\varphi$, où $i \in J$ est tel que q soit sur Γ_i , où r désigne l'abscisse curviligne de q sur Γ_i et $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est la mesure de l'angle $(\vec{n}(q), \vec{v})$. Nous supposons ici que **l'horizon est fini**, i.e. $\max_M \tau < +\infty$. Parmi les deux dessins de la première figure, remarquons que seul le second correspond à un système billard à horizon fini. Nous établissons le résultat suivant :

Théorème A [6] : Le système (M, μ, T) est **ergodique**, i.e. tout ensemble mesurable $A \subseteq M$ μ -presque partout sous-invariant (c'est-à-dire tel que $T^{-1}(A) \subseteq A$ μ -p.p.) vérifie $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A^c) = 0$, i.e. pour tout $A \subseteq M$ avec $\mu(A) > 0$, pour μ -presque tout $x \in M$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $T^n(x) \in A$.

D'autre part, le système (M, μ, T) ne possède pas de fonction propre mesurable non constante, i.e. si $f : M \rightarrow \mathbf{C}$ est mesurable et si $\lambda \in \mathbf{C}$ sont tels que $f \circ T = \lambda f$, alors $\lambda = 1$ et f est μ -presque partout constante.

Corollaire : Le système $(M', m', (Y_t)_t)$ est **ergodique**, i.e. pour tout $A \subseteq M'$ avec $m'(A) > 0$, pour m' -presque tout $x \in M'$, il existe $t \in \mathbf{R}_+$ tel que $Y_t(x) \in A$. De plus, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, le système (M, μ, T^N) est ergodique.

Remarquons qu'avec ces définitions, l'ergodicité d'un système dynamique (Ω, ν, S) avec $\nu\sigma$ -finie, infinie n'est pas équivalente au fait que tout ensemble mesurable $A\nu$ -presque partout invariant vérifie $\nu(A) = 0$ ou $\nu(A^c) = 0$. Par exemple, la translation τ par 1 sur \mathbf{Z} n'est pas ergodique (car les ensembles $\{n \in \mathbf{Z} : n \leq n_0\}$ sont sous-invariants) mais vérifie la deuxième propriété. Cependant les deux propriétés sont équivalentes si le système est **récurrent**, i.e. si, pour tout ensemble mesurable $A \subseteq \Omega$ vérifiant $\nu(A) > 0$, ν -presque tout point de A retourne dans A . Une première étape consistera donc à établir la récurrence du système (M, μ, T) .

2. Récurrence

Notons $p : \mathbf{R}^2 \rightarrow \frac{\mathbf{R}^2}{\mathbf{Z}^2}$ la projection canonique et $\bar{Q} := p(Q)$. Nous définissons, de même que précédemment, les systèmes $(\bar{M}' := T^1\bar{Q}, \bar{m}', (\bar{Y}_t)_t)$ et $(\bar{M}, \bar{\mu}, \bar{T})$ en considérant la projection canonique $\tilde{p} : M' \rightarrow \bar{M}'$. On note $\bar{\nu} := \frac{\bar{\mu}}{\mu(\bar{M})}$. Ces systèmes dynamiques (en mesure finie) ont été beaucoup étudiés depuis l'article fondateur [8] de Sinai. Citons notamment [1,2] qui fournissent des théorèmes centraux limites pour $(\bar{M}, \bar{\mu}, \bar{T})$ et pour certaines classes de fonctions. On peut représenter le système (M, μ, T) comme une extension cylindrique de $(\bar{M}, \bar{\mu}, \bar{T})$ par (\mathbf{Z}^2, L) où L est une fonction $L : \bar{M} \rightarrow \mathbf{Z}^2$, i.e. (M, μ, T) est isomorphe au système (M_0, μ_0, T_0) avec $M_0 := \bar{M} \times \mathbf{Z}^2, \mu_0 = \mu \otimes \lambda$ (où λ est la mesure de Haar sur \mathbf{Z}^2) et $T_0(x, n) = (\bar{T}(x), n + L(x))$. L'idée est ici de choisir un domaine fondamental \mathcal{D}_0 de $\tilde{p} : M' \rightarrow \bar{M}'$ et de définir l'isomorphisme de systèmes dynamiques $\psi : M_0 \rightarrow M$ par $\psi((q, \vec{v}), n) = (q + n, \vec{v})$. D'après [9] et [1,2], L vérifie le théorème central limite pour les sous suites de densité positive : pour toute suite de v.a. $k_n : \bar{M} \rightarrow \mathbf{N}$ telle que $\frac{k_n}{n}$ converge $\bar{\nu}$ -presque sûrement vers une constante $a \in \mathbf{R}_+^*$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=0}^{k_n-1} L \circ \bar{T}^l$ est asymptotiquement de loi normale. Ainsi, d'après [4] ou [7], le système (M, μ, T) est récurrent.

3. Théorème du zig-zag

Dans cette partie, nous allons discuter des propriétés hyperboliques du système (M, μ, T) . L'étude de ce système présente des difficultés, notamment en raison de la présence de singularités (points de discontinuité). Notons $R_0 := T^1(\partial Q)$ l'ensemble des vecteurs de M tangents à ∂Q . L'ensemble des points de discontinuité de T est $T^{-1}(R_0)$. Notons, pour tout $l \in \mathbf{N} \cup \infty, R_{0,l} := \bigcup_{i=0}^l T^i(R_0)$ et $R_{-l,0} := \bigcup_{i=0}^l T^{-i}(R_0)$. On montre que, pour tout entier $k \geq 1, T^k$ définit un C^r -difféomorphisme de $M \setminus R_{-k,0}$ sur $M \setminus R_{0,k}$.

Définition : On appelle **fibre contractante** (resp. **dilatante**) toute courbe $\gamma \subseteq M \setminus R_{-\infty,0}$ (resp. $\gamma \subseteq M \setminus R_{0,+\infty}$) C^1 -difféomorphe à $]0, 1[$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} l(T^n(\gamma)) = 0$ (resp. $\lim_{n \rightarrow +\infty} l(T^{-n}(\gamma)) = 0$) où $dl = \sqrt{dr^2 + d\varphi^2}$.

La construction de fibres contractantes et dilatantes en presque tout point a été réalisée dans [8,5]. Un outil essentiel pour établir l'ergodicité de (M, μ, T) est le résultat suivant. Notons $M^{(i)} := \{x = (q, \vec{v}) \in M, q \in \Gamma_i\}$.

Théorème du zig-zag : Pour tout $i \in \mathcal{J}$ et tout ensemble mesurable $D \subseteq M$ avec $\mu(D) = 0$, il existe un ensemble mesurable $A_i(D) \subseteq M^{(i)}$ de μ -mesure totale dans $M^{(i)}$ tel que $A_i(D) \cap D = \emptyset$ et tel que, pour tous $x, y \in A_i(D)$, il existe un entier $k \geq 2$, une suite de fibres contractantes $(\gamma_1^s, \dots, \gamma_k^s)$ et une suite de fibres dilatantes $(\gamma_1^u, \dots, \gamma_k^u)$ tels que $x \in \gamma_1^s, y \in \gamma_k^u$ et tels que, pour tout $j = 1, \dots, k$ et tout $j' = 1, k-1$, les intersections $\gamma_j^s \cap \gamma_{j'}^u$ et $\gamma_{j'}^u \cap \gamma_{j'+1}^s$ sont non vides et contenues dans $A_i(D)$.

Ce résultat prouvé dans [8,3] a permis d'établir l'ergodicité de $(\overline{M}, \overline{\mu}, \overline{T})$ en reprenant l'argument utilisé par Hopf pour l'étude du flot géodésique. Nous allons nous inspirer de cette preuve afin d'établir le théorème A.

4. Preuve du théorème A

Soit une fonction lipschitzienne $g : M \rightarrow \mathbf{R}_+^*$ μ -intégrable. Comme (M, μ, T) est récurrent, on a $\sum_{k \geq 0} g \circ T^{\pm k} = +\infty$ μ -p.p.. Soit une fonction lipschitzienne $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ μ -intégrable. On pose $\tilde{f}^\pm := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^{\pm k}}{\sum_{k=0}^{n-1} g \circ T^{\pm k}}$. Notons B^\pm les ensembles des points $y \in M$ tels que $\sum_{k \geq 0} g \circ T^{\pm k}(y) = +\infty$ et $\tilde{f}^\pm(y)$ existe et B l'ensemble des points $y \in B^+ \cap B^-$ tels que $\tilde{f}^+(y) = \tilde{f}^-(y)$; on note alors $\tilde{f}(y)$ leur valeur commune. D'après le théorème de Hopf en mesure infinie, on a $\mu(B^c) = 0$ et $\tilde{f} = \mathbf{E}_{g\mu}[\frac{f}{g}|\mathcal{I}]$ μ -presque partout (en notant \mathcal{I} la tribu des invariants). On remarque que, pour toute fibre contractante γ^s (resp. dilatante γ^u), si $\gamma^s \cap B^+ \neq \emptyset$ (resp. si $\gamma^u \cap B^- \neq \emptyset$), alors on a $\gamma^s \subseteq B^+$ (resp. $\gamma^u \subseteq B^-$) et \tilde{f}^+ (resp. \tilde{f}^-) est constante sur γ^s (resp. γ^u), d'après les propriétés de contraction des fibres contractantes et dilatantes et l'invariance de \tilde{f}^\pm par $T^{\pm 1}$. Le théorème du Zig-Zag pour $D = B^c$ nous assure alors que \tilde{f} est μ -presque partout constante sur chaque $M^{(i)}$. On conclut que \tilde{f} est μ -presque partout constante, en montrant que pour tous $i, j \in \mathcal{J}$, il existe $l \geq 1$ et $(i_0, \dots, i_l) \in \mathcal{J}^{l+1}$ (avec $i_0 = i$ et $i_l = j$) tel que $T(M^{(i_k)}) \cap M^{(i_{k+1})} \neq \emptyset$, pour tout $k = 0, \dots, l-1$. Par densité des fonctions lipschitziennes μ -intégrables dans L^1 , on en déduit que, pour tout f dans L^1 , $\tilde{f} = \mathbf{E}_{g\mu}[\frac{f}{g}|\mathcal{I}]$ est constante μ -presque partout. Si A est μ -presque partout invariant, on aura μ -presque partout les égalités suivantes : $\mathbf{1}_A = \mathbf{E}_{g\mu}[\mathbf{1}_A|\mathcal{I}] = \widetilde{\mathbf{1}_A g} = C^{te}$. Ainsi, les seuls ensembles mesurable invariants sont les ensembles A vérifiant $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A^c) = 1$.

On conclut en montrant que, pour tout système dynamique probabilisé (N, ν, S) ergodique inversible, le système $(M \times N, \mu \otimes \nu, T \times S)$ est ergodique.

Références

- [1] Bunimovich L., Sinai Ya., Statistical properties of lorentz gaz with periodic configuration of scatterers. *Comm. Math. Phys.* (1981), 78, 479-497.
- [2] Bunimovich L., Chernov N., Sinai Ya., Statistical properties of two-dimensional hyperbolic billiards, *Russ. Math. Survey* (1991), 46(4), 47-106.
- [3] Chernov N., Sinai Y., Ergodic properties of certain systems of two-dimensional discs and three-dimensional balls, *Russ. Math Survey* (1987), 42(3), 181-207.
- [4] Conze J.-P., Sur un critère de récurrence en dimension 2 pour les marches stationnaires, applications, *Erg. Th. & Dyn. Sys* (1999), 19, 1233-1245.
- [5] Gallavotti G., Ornstein D., Billiards and Bernoulli schemes, *Comm. Math. Phys.* (1974), 38, 83-101.
- [6] Pène F., Applications des propriétés stochastiques du billard dispersif, *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I* (2000), 1103-1106.
- [7] Schmidt K., On joint recurrence, *C.R. Acad. Sci., Paris, Sér. I* (1998), 327, 837-842.
- [8] Sinai Y., Dynamical systems with elastic reflections, *Russ. Math. Survey* (1970), 25(1), 137-189.
- [9] Young L-S., Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity, *Ann. of Math.* (1998), 147, 585-650.

Françoise Pène
UBO
Département de Mathématiques
29285 Brest Cedex
France
fpene@maths.univ-rennes1.fr

Chaînes algébriquement constructibles

Hélène Pennaneac'h

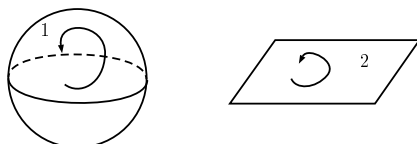
X sera une variété algébrique réelle (un sous-ensemble algébrique de \mathbf{R}^p , i.e de la forme $\{P = 0\}$ où P est un polynôme sur \mathbf{R}^p). Un *semi-algébrique* de X est l'intersection de X avec des sous-ensembles constitués d'intersections et de réunions finies d'ensembles de la forme $\{Q_i > 0\}$ et $\{R_j = 0\}$ où les Q_i et R_j sont des polynômes sur \mathbf{R}^p . Pour la géométrie semi-algébrique, voir [BCR].

Chaînes semi-algébriques de dimension n sur X

Ce sont des sommes formelles $\sum m_S [S]$ où $S \subset X$ est une variété lisse semi-algébrique orientée de dimension n ; ces symboles vérifient les relations :

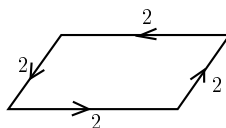
- $[S^a] = -[S]$ si S^a est S avec l'orientation opposée,
- $[S \sqcup S'] = [S] + [S']$,
- $[S] = [S']$ si S' est dense dans S avec l'orientation induite.

Cela signifie entre autre qu'on ne tient pas compte des sous-ensembles de dimension $< n$.
Exemple : une 2-chaîne dans \mathbf{R}^3 :



Ça signifie qu'on a la sphère S orientée comme indiqué avec le coefficient 1 et le rectangle R avec le coefficient 2, i.e la chaîne $[S] + 2[R]$.

On peut faire un bord : par exemple ici le bord de la chaîne $[S]$ est 0 et le bord de la chaîne $2[R]$ est la 1-chaîne :

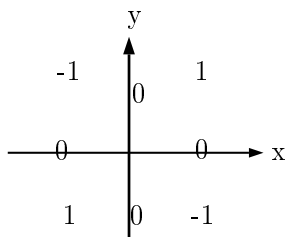


Ainsi on construit un complexe de chaîne et donc une homologie. L'homologie obtenue n'apporte rien de nouveau : c'est l'homologie de Borel-Moore de X (son homologie singulière si X est compact).

Chaînes algébriquement constructibles

D'abord : une fonction $f : X \rightarrow \mathbf{Z}$ est *constructible* s'il existe une partition finie de X en semi-algébriques telle que f est constante sur chacun des éléments de cette partition. Elle est algébriquement constructible si en plus c'est une somme finie de signes de polynômes sur X (voir [MP]).

Exemple dans \mathbf{R}^2 : $f = \text{sign}(xy)$:



Pour voir si une n -chaîne semi-algébrique donnée $\sum m_S[S]$ est algébriquement constructible, il faut regarder sur chaque composante irréductible W du *support* de la chaîne (i.e de la clôture de Zariski des S où m_S est non nul ; pour le premier exemple, c'est la sphère d'une part, et le plan contenant le rectangle d'autre part). Ensuite on prend une n -forme de Kähler ω sur le corps de fraction de W (disons, une n -forme différentielle sur la partie lisse de W , s'exprimant "algébriquement" en fonctions des coordonnées). A quelque chose de dimension $n - 1$ près, ω donne une orientation à W . On suppose, quitte à changer et l'orientation de S , et le signe de m_S (ce qui me change rien à la chaîne par définition), que l'orientation donnée par ω coïncide avec l'orientation des S donnée au départ. On regarde maintenant la fonction $\sum m_S \mathbf{1}_S$. Si elle est algébriquement constructible à un sous-ensemble de dimension $n - 1$ près, on dit que la chaîne elle-même est algébriquement constructible

Notre chaîne n'était pas algébriquement constructible : sur la composante "sphère", ça va, mais sur la composante "plan", ça me marche pas (il n'y a pas de somme de signe de polynômes sur le plan qui donne 2 à l'extérieur du rectangle, et 0 à l'intérieur).

Les chaînes algébriquement constructibles ont quelque chose de remarquable : leur bord est divisible par 2, et une fois divisé par 2, c'est une $n - 1$ -chaîne algébriquement constructible. Ainsi on peut construire un nouveau complexe, et donc une nouvelle homologie, qui donne des résultats différents de l'homologie de Borel-Moore.

En s'inspirant de cette construction, on peut construire encore d'autres groupes d'homologie, " k -algébriquement constructibles", qui cette fois sont à coefficients dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, et qui donne dans certains cas une filtration entre l'homologie de Borel-Moore à coefficients dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et l'homologie algébrique (pour la définition de cette dernière, voir [BCR]).

Cycles lagrangiens semi-algébriques

Un deuxième intérêt des chaînes algébriquement constructibles est le suivant : dans l'isomorphisme entre les fonctions constructibles sur X et les cycles lagrangiens semi-algébriques

(c'est un peu compliqué à détailler en 4 pages, voir [KS][chapitre 9 les fonctions algébriquement constructibles correspondent exactement aux cycles lagrangiens algébriquement constructibles.

Références

- [BCR] J. Bochnak, M. Coste, M-F. Roy, *Géométrie algébrique réelle*, Ergebnisse der Math. 3.Folge Vo1.12 Springer (1987)
- [kIP] C. McCrory, A. Parusiński, *Algebraically constructible functions*, Ann. Scient. de l'Ecole Norm. Sup. (4) **30** (1997) 527-552
- [KS] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on manifolds*, Springer-Verlag, Berlin (1990)

Hélène Pennaneac'h
IRMAR
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex
France
hpennane@maths.univ-rennes1.fr

Femmes & math
Revue de l'association *femmes et mathématiques*
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
fetm@ihp.jussieu.fr
<http://www.femmes-et-maths.fr.fm>

Cinquième forum des jeunes mathématiciennes (2000)

• Editorial	1
• Contributions mathématiques	
Sophie Bismuth - <i>Instabilité des solutions rapidement oscillantes dans le cadre des équations différentielles à retard</i>	3
Delphine Boucher - <i>Une application de l'étude d'équations différentielles linéaires homogènes dépendant de paramètres: systèmes hamiltoniens</i>	7
Anne de Bouard et Arnaud Debussche - <i>Une équation de Schrödinger non linéaire stochastique</i>	11
Sophie Dion - <i>Théorème de Brownawell-Waldschmidt en caractéristique finie</i>	15
Muriel Duloué - <i>Une formulation mixte en rotation potentiel vecteur convergente pour le problème de Stokes stationnaire tridimensionnel</i>	19
Dominique Duval - <i>Au sujet des abus de langages en informatique</i>	21
Christine Fricker - <i>Vitesse de convergence en théorie des probabilités</i>	25
Catherine Gille - <i>Sur l'invariant universel des 3-variétés de Le-Murakami-Ohtsuki</i>	29
Régine Marchand - <i>Inégalités pour la constante de temps en percolation de premier passage</i>	33
Dagmar M. Meyer - <i>Une version équivariante du théorème de non-réalisabilité de Kuhn-Schwartz</i>	39
Françoise Pène - <i>Sur l'ergodicité de billards dispersifs en mesure infinie</i>	43
Hélène Pennaneac'h - <i>Chaînes algébriquement constructibles</i>	47

Coordination du supplément au numéro 6 : *Catherine Bonnet*
Directrice de Publication : *Véronique Chauveau*
Imprimerie de l'INRIA Rocquencourt
Numéro ISSN : 1271-3546
Tirage 120 ex
Dépôt légal : septembre 2002
Prix du numéro : 8 euros