Techniques d'analyse complexe
appliquées au problème des moments
et au problème du sous-espace invariant

Isabelle Chalendar

Travail en collaboration avec Karim Kellay et Tom Ransford

1 Introduction

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes et soit $r \in \mathbb{N}$. Il est clair que si $a_n = 0$ pour tout $n > r$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = O(n^r) \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Le contraire est faux. Par exemple la suite $a_n = (-1)^n$ satisfait

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k = (1 + (-1))^n = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

mais a_n ne tend même pas vers 0. On peut cependant donner une sorte de réciproque, qui, au vu de l'exemple ci-dessus, est peut-être un peu surprenante.

Théorème 1.1 *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes et soit r un entier naturel. Supposons que*

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} a_k = O(n^r) \quad \text{et} \qquad \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} a_k = O(n^r) \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Alors $a_n = 0$ pour tout $n > r$.

Ce théorème est le point central de l'exposé. Nous donnerons une idée de sa preuve dans le paragraphe suivant. Nous proposons ensuite une application aux algèbres de Banach, laquelle conduit à un résultat sur l'existence de sous-espaces invariants. Une autre application du Théorème **??** concernant la détermination d'une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbb{R}$ est aussi présentée dans la dernière section.

2 Preuve du Théorème ??

Une fonction entière $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est de *type exponentiel* si

$$\tau := \limsup_{|z|\to\infty} \frac{\log|f(z)|}{|z|} < \infty,$$

et dans ce cas τ est appelé le *type* de f. Si de plus $\tau = 0$, alors f est dite de *type exponentiel minimal.* Rappelons à présent une des versions du principe de Phragmén–Lindelöf ([**?**], Theorem 6.2.13) : Soit f une fonction entière de type exponentiel minimal et soit $r \in \mathbb{N}$. Supposons que sur l'axe réel $f(x) = O(|x|^r)$ lorsque $x \to \pm\infty$. Alors f est un polynôme de degré au plus r.

Considérons l'expression

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Nous allons montrer successivement que ceci définit une fonction entière de type exponentiel minimal et, finalement, qu'il s'agit d'un polynôme de degré au plus r, ce qui nous conduira à la conclusion désirée.

Pour $n \geq 0$, posons

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k \qquad \text{et} \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_k.$$

Les hypothèses sur (a_n) nous garantissent que $b_n, c_n = O(n^r)$ lorsque $n \to \infty$. Par conséquent, si l'on pose

$$b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \qquad \text{et} \qquad c(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n,$$

alors b et c sont des fonctions de type exponentiel au plus 1. En comparant les coefficients de z^n dans les égalités $e^z(e^{-z}b(z)) = b(z)$ et $e^{-z}(e^z c(z)) = c(z)$, on voit que $e^{-z}b(z)$ et $e^z c(z)$ ont les mêmes coefficients que $a(z)$. Par conséquent

$$a(z) = e^{-z}b(z) = e^z c(z), \qquad z \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

En particulier, a est aussi une fonction entière. De plus, (1) implique que $a^2 = bc$, et par conséquent a est aussi une fonction de type exponentiel au plus 1. Montrons à présent que a est en fait de type exponentiel minimal. Pour cela considérons les transformées de Laplace A, B, C de a, b, c respectivement. Nous avons donc, par exemple,

$$A(\zeta) = \int_0^\infty a(x)e^{-x\zeta}\,dx.$$

Comme a, b, c sont toutes de type exponentiel au plus 1, A, B, C sont bien définies et holomorphes dans $\{\zeta\colon \Re\zeta > 1\}$. De plus, pour $\Re\zeta > 1$,

$$A(\zeta) = \int_0^\infty \Big(\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!}x^n\Big)e^{-x\zeta}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!}\int_0^\infty x^n e^{-x\zeta}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{\zeta^{n+1}}, \quad (2)$$

avec des extensions analogues pour B, C. En utilisant des propriétés classiques des séries de Laurent, nous obtenons que A, B, C s'étendent holomorphiquement à $\{\zeta\colon |\zeta| > 1\}$. A présent, en prenant les transformées de Laplace dans (1) on a, pour $\Re\zeta > 1$,

$$A(\zeta) = B(\zeta + 1) = C(\zeta - 1).$$

Ainsi A s'étend holomorphiquement à $\{\zeta\colon |\zeta+1| > 1\} \cup \{\zeta\colon |\zeta - 1| > 1\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En utilisant l'extension de Laurent (2), ceci implique que

$$|a_n|^{1/n} \to 0 \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Il résulte de ceci que a est de type exponentiel minimal.

Enfin, montrons que a est un polynôme. Pour $x \geq 0$, nous avons

$$|b(x)| \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{|b_n|}{n!}x^n \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{K(n+r)\cdots(n+1)}{n!}x^n = K(x^r e^x)^{(r)},$$

où K est une constante indépendante de x. Ainsi, d'après (1),

$$|a(x)| = |e^{-x}b(x)| \leq Ke^{-x}(x^r e^x)^{(r)} = O(x^r) \quad \text{lorsque } x \to \infty.$$

Des calculs analogues avec $c(x)$ au lieu de $b(x)$ montrent que $a(x) = O(|x|^r)$ lorsque $x \to -\infty$. Comme a est de type exponentiel minimal, le principe de Phragmén–Lindelöf nous permet de conclure que a est un polynôme de degré au plus r. Ainsi $a_n = 0$ pour tout $n > r$ et la preuve du théorème est achevée.

3 Quelques applications

3.1 Le problème du sous-espace invariant

Soit E un espace de Banach (réel ou complexe) de dimension infinie et soit T un opérateur linéaire et borné sur E. On appelle sous-espace invariant non trivial $\mathcal{M}$ de T un sous-espace fermé de E tel que $T(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ avec de plus $\{0\} \neq \mathcal{M} \neq E$. La question de savoir si tout opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert complexe séparable de dimension finie admet toujours un sous-espace invariant non trivial est appelé *le problème du sous-espace invariant* et est à ce jour toujours ouvert.

Le Théorème **??** nous permet facilement de déduire le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Soit E un espace de banach (réel ou complexe) de dimension infinie, et soit T un opérateur linéaire borné sur E. Supposons qu'il existe $\xi_0 \in E \backslash \{0\}$, $\psi_0 \in E^* \backslash \{0\}$ et un entier naturel r tels que :*

$$\left\langle \psi_0, (I+T)^n \xi_0 \right\rangle = O(n^r) \quad \textit{et} \quad \left\langle \psi_0, (I-T)^n \xi_0 \right\rangle = O(n^r) \qquad \textit{lorsque } n \to \infty.$$

Alors T a un sous-espace invariant non trivial.

3.2 Application aux distributions de probabilité

Il est bien connu qu'une distribution de probabilité sur $\mathbb{R}$ est uniquement déterminée par ses moments, pourvu qu'ils soient finis et ne croissent pas trop vite :

Théorème 3.2 (Théorème de Carleman [?],p.126) *Soient μ et ν des mesures de probabilité boréliennes sur $\mathbb{R}$ dont tous les moments sont finis. Supposons que pour tout $\in \mathbb{N}$,*

$$S_n := \int_{-\infty}^{\infty} t^n \, d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} t^n \, d\nu(t), \ \textit{et que} \ \sum_{n=1}^{\infty} S_{2n}^{-1/2n} = \infty.$$

Alors $\mu = \nu$.

Une des applications du Théorème **??** est un analogue du théorème de Carleman pour les moments complexes $\int_{-\infty}^{\infty} (1+it)^n \, d\mu(t)$, mais avec la différence que même si les moments $\int_{-\infty}^{\infty} (1+it)^n \, d\nu(t)$ sont simplement 'approximativement' égaux à ceux de μ, alors $\mu = \nu$.

Théorème 3.3 *Soit μ, ν des mesures de probabilité boréliennes sur $\mathbb{R}$ dont tous les moments sont finis. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$Z_n := \int_{-\infty}^{\infty} (1+it)^n \, d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (1+it)^n \, d\nu(t) + O(n^r) \qquad \textit{lorsque } n \to \infty$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Z_{2n}|^{-1/2n} = \infty.$$

Alors $\mu = \nu$.

La preuve de ce résultat s'appuie sur la théorie des classes quasi-analytiques.

Références

[1] R. P. Boas. *Entire Functions.* Academic Press, New York, 1954.

[2] I. Chalendar and T. Kellay, K. and Ransford. Binomial sums, moments and invariant subspace. *Israel Math. J.*, 1999.

[3] P. Koosis. *The Logarithmic Integral I.* Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

Isabelle Chalendar
Institut Girard Desargues
Bâtiment du doyen Jean Braconnier (101)
43, boulevard du 11 novembre 1918
69 622 Villeurbanne Cedex
France
`chalenda@desargues.univ-lyon1.fr`
http ://www.desargues.univ-lyon1.fr/home/chalenda/chalendar.html