Invariants par conjugaison dans le dual de l'algèbre de Steenrod

Sarah Whitehouse [4]
d'après un travail avec M.D. Crossley

1 Introduction

Nous décrivons un travail en commun avec M.D. Crossley [1]. Nous nous intéressons à la conjugaison canonique, χ, de $\mathcal{A}_*$, le dual de l'algèbre de Steenrod modulo 2, afin de déterminer le sous-espace, $\mathcal{A}_*^{\chi}$, d'éléments invariants sous l'action de χ. Nous donnons des bornes pour la dimension de ce sous-espace en chaque degré et nous démontrons que, après l'inversion de ξ_1, il devient une algèbre polynomiale sur une famille de générateurs naturels. Sans cette inversion de ξ_1, l'algèbre des invariants est loin d'être polynomiale. Nous proposons deux conjectures sur la structure des invariants.

La motivation pour étudier ce problème vient de la théorie de l'homotopie stable. Les expressions comme $H^m(\sum_n; \pi_*(E^{\Lambda n}))$ interviennent dans les suites spectrales pour la "gamma cohomologie" d'un spectre en anneau E_∞[4]. Si E est bon, $\pi_*(E^{\Lambda n}) \approx (E_*E)^{\otimes(n-1)}$, l'action de $\sum_n$ étant donnée en [5] ; pour $n = 2$, $\sum_2$ agit par la conjugaison de l'algébroïde de Hopf E_*E. Donc, ici nous étudions le cas très spécial où E est le spectre d'Eilenberg-MacLane $H\mathbb{F}_2$ et $n = 2$.

Comme algèbre, $\mathcal{A}_* = \mathbb{F}_2[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots]$, où le degré de ξ_i est $2^i - 1$. Le coproduit ϕ est déterminé par

$$\phi(\xi_k) = \sum_{i=0}^{k} \xi_{k-i}^{2^i} \otimes \xi_i,$$

où $\xi_0 = 1$.

La "conjugaison" χ dans une algèbre de Hopf connexe est une application linéaire bijective qui est un anti-isomorphisme ($\chi(xy) = \chi(y)\chi(x)$). Elle est déterminée par la formule

$$\chi(a) = -a - \sum a_i' \chi(a_i'')$$

où $\phi(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a + \sum a_i' \otimes a_i''$, ($\deg a > 0$). Si l'algèbre de Hopf est commutative ou cocommutative alors χ^2est l'identité.

Pour le dual de l'algèbre de Steenrod, Milnor a donné la formule suivante pour la conjugaison [2].

4. Je voudrais remercier la Communauté Européenne pour une bourse TMR, et le Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications (UMR 7539 au CNRS), Université Paris-Nord, pour son accueil

Lemme 1. *Dans le dual de l'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}_*$,*

$$\chi(\xi_n) = \sum_{\alpha \in Part(n)} \prod_{i=1}^{l(\alpha)} \xi_{\alpha_i}^{2^{\sigma(i)}},$$

où $Part(n)$ est l'ensemble de partitions ordonnées de n ; et pour une partition ordonnée $\alpha = (\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(l)) \in Part(n)$, $\sigma(i)$ indique la somme partielle $\sum_{j=1}^{i-1} \alpha(j)$.

2 Propriétés élémentaires de la conjugaison

Nous donnons quelques observations sur la conjugaison d'une algèbre de Hopf H. On note H^χ le sous-espace des éléments de H qui sont invariants par l'action de la conjugaison χ. Donc, $H^\chi = Ker(\chi - 1)$, où 1 est l'identité. Pour H une algèbre de Hopf graduée, on note H_d la partie de H en degré d.

Lemme 2.
1. *Si H est commutative, H^χ est une sous-algèbre de H.*
2. *Si H est une algèbre de Hopf commutative ou cocommutative sur $\mathbb{F}_2$, alors $dim H_d^\chi \geq dim H_d/2$.*
3. *Si H est une algèbre de Hopf commutative sur $\mathbb{F}_2$, $Im(\chi - 1)$ est un idéal dans* $\mathrm{Ker}(\chi - 1)$. *En particulier, $Im(\chi - 1)$ est une sous-algèbre de H.*

3 Bornes pour la dimension de l'espace des invariants

Théorème 1. *On note la dimension de l'algèbre de Steenrod en degré d par D_d. Alors $D_{d_1}/2 \leq dim(\chi - 1)(\mathcal{A}_*)_d \leq D_d/2$ et donc*

$$D_d/2 \leq dim(\mathcal{A}_*^\chi)_d \leq D_d - (D_{d-1}/2).$$

La borne inférieure a été donnée par le lemme 2 (2) ; la borne supérieure est un corollaire du résultat suivant.

Proposition 1. *Les images sous l'action de $\chi - 1$ des monômes $\xi_1^{r_1} \ldots \xi_k^{r_k}$ tels que $r_k = 1$ sont linéairement indépendants.*

Exemple 6. *En degré 42, la dimension de $\mathcal{A}_*$ est 92. Les bornes du théorème 1 sont : $46 \leq dim(\mathcal{A}_*^\chi)_{42} \leq 49$. En fait, $dim(\mathcal{A}_*^\chi)_{42} = 47$, (et 42 est le plus petit degré tel que la borne inférieure n'est pas exacte).*

4 Invariants après l'inversion de ξ_1

Maintenant nous ajoutons à $\mathcal{A}_*$ un inverse formel de ξ_1, en notant l'objet obtenu par $\mathcal{A}_*[\xi_1^{-1}]$. Le sous-espace des éléments invariants de $\mathcal{A}_*[\xi_1^{-1}]$ est beaucoup plus facile à décrire. En fait, nous démontrons qu'il est une algèbre polyno-miale sur certains éléments invariants naturels.

Théorème 2. *On note $k = \mathbb{F}_2[\xi_1, \xi_1^{-1}]$. Alors*

$$\mathcal{A}_*[\xi_1^{-1}]^\chi = k[\epsilon_2, \epsilon_3, \ldots],$$

où $\epsilon_2 = \xi_2\chi\xi_2)$ et, pour $n \geq 3$, $\epsilon_n = \xi_2\xi_n + \chi(\xi_2\xi_n)$. En outre,

$$H^i(\sum_2; \mathcal{A}_*[\xi_1^{-1}] = 0 \text{ pour } i > 0.$$

La démonstration de la deuxième partie est facile : dans $\mathcal{A}_*$ on a $(\chi - 1)\xi_2 = \xi_1^3$. Donc, dans $\mathcal{A}_*[\xi_1^{-1}]$, $1 \in Im(\chi - 1)$, mais $Im(\chi - 1)$ est un idéal dans $\mathrm{Ker}(\chi - 1)$ et donc ils sont égaux. Il est facile de voir que les éléments ϵ_n sont des invariants algébriquement indépendants. Alors $k[\epsilon_2, \epsilon_3, \ldots] \subset \mathcal{A}_*[\xi_1^{-1}]$. Pour la démonstration de l'inclusion dans l'autre sens on utilise la proposition 2 ci-dessous.

Lemme 3. *Si $x \in \mathcal{A}_*$. est invariant et si $\xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2}\ldots\xi_k^{r_k}$ est son premier monôme (dans l'ordre lexicographique à droite), alors r_2 est pair.*

Proposition 2. *Si $x \in \mathcal{A}_*^\chi$, il existe un entier s tel que $\xi_1^s \in \mathbb{F}_2[\xi_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \ldots]$*

Démonstration. *Soit $l = \xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2}\ldots\xi_k^{r_k}$ le premier monôme de x. Donc, par la proposition 2, r_2 est pair. On pose $z = \xi_1^{r_1}\epsilon_2^{r_2/2}\epsilon_3^{r_3}\ldots\epsilon_k^{r_k}$. Le premier monôme de z est $\xi_1^{r_1+t}\xi_2^{r_2}\ldots\xi_k^{r_k}$, où $t = 3(r_3 + \ldots + r_k)$. C'est aussi le premier monôme de $\xi_1^t x$ et alors nous posons $x' = \xi_1^t x + z$. On constate que x' est invariant et qu'il a un premier monôme plus petit que celui de x. Maintenant on peut utiliser une induction pour démontrer le résultat.*

5 Conjectures

Une question naturelle est la suivante : quel est le premier élément invariant qui contient ξ_n ? Si $n = 1$, c'est évidemment ξ_1 et si $n = 2$ on peut voir que c'est $\epsilon_2 = \xi_2\chi(\xi_2)$. Pour $n \geq 3$, $\epsilon_n = (\chi - 1)(\xi_2\xi_n)$ est un candidat évident, de degré $2^n + 2$. Cependant, nous avons trouvé que, au moins pour $3 \leq n \leq 7$, il existe des invariants de degré $2n + 1$ qui contiennent ξ_n et nous proposons la conjecture suivante.

Conjecture 1. *Pour chaque $n > 3$, il existe un polynôme d_n dans $\mathcal{A}_*$ de degré $2n + 1$, invariant sous l'action de x et dont le premier monôme (pour l'ordre lexicographique à droite) est $\xi_1^2\xi_n$.*

Par exemple, on peut prendre $(\chi - 1)(\xi_2\xi_3)/\xi_1$ pour d_3.

Conjecture 2. *Les éléments suivants engendrent les invariants par conjugaison,* $(\mathcal{A}_*)^X$

1. ξ_1,
2. $\xi_n\chi(\xi_n)$, *pour* $n \geq 2$,
3. $(\chi - 1)(\xi_{m_1}\xi_{m_2}\ldots\xi_{m_n})$, *pour* $2 \leq m_1 < \ldots < m_n$, $n \geq 2$ *et où* $n > 2$ *ou* $m_1 > 2$,
4. d_n, *pour* $n \geq 3$.

Nous avons construit d_n, *pour* $n = 3, \ldots, 7$ *et nous avons vérifié la conjecture* 2 *jusqu'au degré* 40.

Proposition 3. *Les trois premières familles d'éléments de la conjecture 2 sont des générateurs nécessaires. Pour chaque* $n \geq 3$, *si* d_n *existe, alors il est un générateur nécessaire et s'il n'existe pas, alors en est un générateur nécessaire.*

Bibliographie

[1] *M.D. Crossley and Sarah Whitehouse*, On Conjugation Invariants in the dual Steenrod algebra, prépublication de l'Université Paris-Nord, 98-08, Mars 1998.

[2] *John Milnor*, The Steenrod algebra and its dual, Ann. Math., 67, (1958), 150-171.

[3] *J. Milnor and J. Moore*, On the structure of Hopf algebras, Ann. Math., 81, (1965), 211-264.

[4] *Alan Robinson and Sarah Whitehouse*, Γ-homology of commutative rings and of $E\infty$-ring spectra, Warwick preprint 76/1995.

[5] *Sarah Whitehouse*, Symmetric group actions on tensor products of Hopf algebroids, en préparation.

Dépt. de Mathématiques
Faculté des Sciences-Jean Perrin
Université d'Artois-Pôle de Lens
Rue Jean Souvraz
S.P. 18
62307 LENS FRANCE
whitehou@agat.univ-lillel .fr
whitehouse@euler.univ-artois.fr