Stabilité asymptotique faible d'équations d'évolution du second ordre soumises à des contrôles non linéaires, non monotones

Judith Vancostenoble *

On considère le problème de la décroissance asymptotique lorsque $t \to +\infty$ des solutions d'une équation d'évolution abstraite du second ordre soumise à un contrôle non linéaire et non monotone. On montre qu'il y a stabilité asymptotique faible des solutions globales en temps. Ce résultat abstrait s'applique à différents types d'équations (équations des ondes, des poutres, des plaques...) et à différents types de contrôles (contrôle interne, frontière ou ponctuel...). En particulier, on améliore sensiblement certains résultats antérieurs sur la stabilité asymptotique de l'équation des ondes dans un domaine borné avec un contrôle interne ou frontière.

1 équation des ondes soumise à un feedback frontière.

1.1 Présentation du problème.

Considèrons tout d'abord l'équation des ondes soumise à un feedback frontière. Le contrôle représente une force d'amortissement qui est une fonction non linéaire et non monotone de la vitesse observée.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N, N \geq 1$ de frontière Γ régulière. On considère le problème

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u_{|\Gamma^*} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial v}_{|\Gamma_0} = -a(x)q(u_t), \\ u(0) = u_0, u_t(0) = v_0 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

où (Γ_0, Γ^*) est une partition non triviale de Γ, $(u_0, v_0) \in V \times L^2(\Omega)$ avec $V = \{v \in H^1(\Omega) | v_{|\Gamma^*} = 0\}$, $a : \Gamma_0 \to \mathbb{R}_+^*$ et $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont continues. On suppose de plus que Γ_0 n'est pas "trop fin", (par exemple $\exists x_0 \in \Gamma, \exists \varepsilon > 0 | B(x_0, \varepsilon) \cap \Gamma \subset \Gamma_0$).

L'énergie de u est

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, E_u(t) = \frac{1}{2}\left(\|\nabla u(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_t(.,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)$$

Un calcul classique donne

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, E'_u(t) = -\int_{\Gamma_0} a u_t q(u_t) dt.$$

Pour l'étude de la stabilité asymptotique, on fera donc l'hypothèse "naturelle" suivante qui assurera la <u>dissipativité de l'énergie</u> :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda_q(\lambda) \geq 0. \tag{1}$$

Par conséquent, l'énergie est décroissante et les trajectoires $(u(t), u_t(t))$ sont <u>faiblement compactes</u> dans $V \times L^2(\Omega)$. On se demandera ce que l'on peut dire de la stabilité asymptotique avec cette seule information.

1.2 Résultat antérieur.

On connaît le résultat de stabilité forte (voir [4], [1]) : *on suppose* $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue telle que*

$$q \text{ croissante et } q(0) = 0, \tag{2}$$

$$\begin{cases} |q(\lambda)| \leq A + B|\lambda|^r & \text{avec } r \leq \min\left(\frac{N}{N-2}, 2\right) \quad \text{si } N \geq 3, \\ & \text{avec } r \leq 2 \qquad\qquad\qquad \text{si } N = 2, \\ \text{aucune condition} & \text{si } N = 1, \end{cases} \tag{3}$$

$$\forall \lambda > 0, q(\lambda) > 0. \tag{4}$$

Alors, $\forall (u_0, v_0) \in V \times L^2(\Omega)$, *il y a* *stabilité forte* *de la solution de* $(\mathcal{P}_1)$ *i.e.*

$$(u, u_t) \underset{t\to\infty}{\to} (0,0) \text{ fortement dans } V \times L^2(\Omega).$$

Dans [1], les auteurs donnent un théorème pour une équation d'évolution abstraite du second ordre et l'appliquent à cet exemple. De manière générale, ce sont des hypothèses assurant la compacité forte des trajectoires $(u(t), u_t(t))$ dans $V \times L^2(\Omega)$ qui permettent de prouver la stabilité forte. Cette compacité est une conséquence de l'hypothèse de monotonie (2) associée à l'hypothèse (3) limitant la croissance de q. Notons que si (3) n'est pas vérifiée, alors le problème de la stabilité forte des solutions de $(\mathcal{P}_1)$ reste ouvert (même lorsque q est croissante).

1.3 Résultat nouveau.

On se place dans le cas où seule la compacité faible des trajectoires dans $V \times L^2(\Omega)$ est assurée. On supprime les hypothèses (2) et (3) et on remplace l'hypothèse (4) par la suivante :

$$\forall \alpha > 0, \inf\{q(\lambda) | \lambda \geq \alpha\} > 0. \tag{5}$$

On obtient le résultat de stabilité faible :

Théorème 1. *([7]) On suppose (1) et (5). Alors,* $\forall (u_0, v_0) \in V \times H$, *il y a stabilité faible des solutions globales de* $(\mathcal{P}_1)$ *i.e.*

$$(u, u_t)t \underset{t\to\infty}{\to} (0,0) \text{ faiblement dans } VxH.$$

Ceci s'applique en particulier lorsque q est croissante, même sans hypothèse limitant sa croissance (cas pour lequel l'existence de la solution est classique).

2 Formulation abstraite.

2.1 Théorème abstrait de stabilité asymptotique faible.

On considère une équation d'évolution abstraite dans un espace mesuré (X, μ) . On note H l'espace de Hilbert $L^2(X, \mu)$. L'équation est régie par un opérateur linéaire $A : D(A) \to H$. On note $V = D(A^{\frac{1}{2}})$ et $\tilde{A}$ l'extension de A à V'. On se donne (Y, m) un autre espace mesuré où Y est une partie de X. Soit $a \in L^\infty(Y, m)$

positive et soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue vérifiant (1) et (5). On définit un opérateur abstrait Q (représentant une force de contrôle agissant sur la partie supp(a) de Y). Cet opérateur est défini sur une partie $D(Q)$ de V à valeurs dans V' et vérifie pour tout $v \in D(Q)$ et tout φ régulier,

$$(Q(v), \varphi)_{v',v} = \int_Y a(y)q(v(y))\varphi(y)dm(y)$$

Pour $(u_0, v_0) \in V \times H$, on considère le problème abstrait :

$$(\mathcal{P}_2) : \begin{cases} u_{tt} + \tilde{A}u = -Q(u_t), \\ u \in V, \\ u(0) = u_0, u_t(0) = v_0. \end{cases}$$

Si supp (a) (i.e. la région sur laquelle le contrôle agit) n'est pas trop "fin", alors il y a stabilité faible des solutions globales de $(\mathcal{P}_2)$. **(Pour un énoncé complet des hypothèses et du théorème, voir [8] ou [9]) .**

Remarque. Cette formulation s'applique à de nombreuses équations (choix de A) et à divers types de contrôle (choix de Y).

Exemple 1. *. équation des ondes soumise à un contrôle frontière, (problème $(\mathcal{P}_1)$) : on pose $(X, \mu) = (\overline{\Omega}, dx)$ et $(Y, m) = (\Gamma, d\sigma)$* [1]*. On définit $Au = -\Delta u$ pour $u \in D(A) = \{v \in V | \Delta v \in L^2(\Omega)$ et $\frac{\partial v}{\partial u}_{|\Gamma_0} = 0$.*

2.2 Applications à d'autres types de contrôle.

Exemple 2. *. équation soumise à un contrôle interne : on pose $(X, \mu) = (Y, m) = (\Omega, dx)$ pour étudier le problème*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = -a(x)q(u_t) \text{ dans } \Omega, \\ u_{|\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

avec $a : \Omega \to \mathbb{R}$ positive telle que mes $(supp(a)) > 0$.

Exemple 3. *. équation soumise à un contrôle ponctuel : soient $l > 0$ et $x_0 \in]0, l[$. On pose $(X, \mu) = (]0, l[, dx)$ et $(Y, m) = (\{x_0\}, \delta(. - x_0))$* [2]*. On peut alors étudier le problème*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = -q(u_t(x_0))\delta(. - x_0) \text{ dans }]0, l[, \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases}$$

2.3 Applications à d'autres équations.

Exemple 4. *. équation des plaques : on définit $Au = \Delta^2 u$ pour $u \in D(A) = \{v \in V | \Delta^2 v \in L^2(\Omega)$ et $\Delta v_{|\Gamma} = 0\}$. Ceci permet d'étudier le problème*

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u = -a(x)q(u_t) \text{ dans } \Omega, \\ u_{|\Gamma} = 0, \Delta_{u_{|\Gamma}} = 0. \end{cases}$$

1. dx étant la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$ et $d\sigma$la mesure superficielle sur Γ
2. $\delta(. - x_0)$ étant la masse de Dirac en x_0

Exemple 5. . *Système d'équations d'ondes couplées :* *on pose* $(X,\mu) = (Y,m) = (\Omega \times \{1,2\}, dxd\nu)$ [3]. $H = L^2(\Omega \times \{1,2\}, dxd\nu)$ *identifie à l'espace* $(L^2(\Omega))^2$. *On se donne* $D(A) = (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^2$ *et* $A = \begin{pmatrix} -\Delta - \delta\Delta \\ -\delta\Delta - \Delta \end{pmatrix}$ *avec* $0 < |\delta| < 1$.

On définit $a : \Omega \times \{1,2\} \to \mathbb{R}$ *par* $a(.,1) = 0$ *et* $a(.,2) = \tilde{a}(.)$, *où* $\tilde{a} : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *est telle que mes* $(supp(\tilde{a})) > 0$. *On peut alors étudier*

$$\begin{cases} u^1_{tt} - \Delta u^1 - \delta\Delta u^2 = 0 & \textit{dans } \Omega, \\ u^2_{tt} - \Delta u^2 - \delta\Delta u^1 = -\tilde{a}(x)q(u^2_t) & \textit{dans } \Omega, \\ u^1_{|\partial\Omega} = u^2_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

(Pour une formulation complète concernant ces exemples et pour d'autres exemples, voir [8] ou [9].)

Bibliographie

[1] F. CONRAD, M. PIERRE, *Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedbacks*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 11 (1994), 5, 485-515.

[2] A. HARAUX, *Stabilization of trajectories for some weakly damped hyperbolic equations*, J. Differential Equations 59 (1985), 2, 145-154.

[3] A. HARAUX, *Comportement à l'infini pour certains systèmes dissipatifs non linéaires*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 84A (1979), 213-234.

[4] I. LASIECKA, *Stabilization of wave and plate-like equations with nonlinear dissipation on the boundary*, J. Differential Equations 79 (1989), 340-381.

[5] M. PIERRE, J. VANCOSTENOBLE, *Strong stability for one-dimensional wave equations with nonlinear nonmonotone boundary feedbacks*, en préparation.

[6] M. SLEMROD, *Weak asymptotic decay via a "relaxed invariance principle" for a wave equation with nonlinear, nonmonotone damping*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 113A (1989), 87-97.

[7] J. VANCOSTENOBLE, *Stabilisation faible de l'équation des ondes par un contrôle non linéaire, non monotone*, Inst. Elie Cartan Univ. Nancy I (1997), 3.

[8] J. VANCOSTENOBLE, *Weak asymptotic stability of second order evolution equations by nonlinear and nonmonotone feedbacks*, SIAM J. Math. Anal., to appear.

[9] J. VANCOSTENOBLE, Stabilisation non monotone de systèmes vibrants et Contrôlabilité, *Thèse de l'Université de Rennes I*, en préparation.

Laboratoire MIP, UFR MIG, Université Paul Sabatier Toulouse III
118 route de Narbonne, 31 062 Toulouse Cedex 4
vancoste@mip.ups-tlse.fr

* Ce travail a été effectué sous la direction de Michel Pierre à l'Institut E. Cartan, U.H.P. Nancy I et rédigé lorsque l'auteur travaillait à l'I.R.M.A, U.L.P. Strasbourg I.

3. $d\nu$ étant la mesure discrète sur $1,2$.