**Champs de vecteurs adjoints sur l'espace tangent d'un espace symétrique semi-simple**

*Rosane Ushirobira*

# 1 INTRODUCTION

Ceci est un travail en commun avec le professeur Thierry Levasseur de l'Université de Poitiers.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe semi-simple et $G$ son groupe adjoint. Soit $\vartheta \in Aut(\mathfrak{g})$ une involution. On écrit $\mathfrak{k} = \mathrm{Ker}(\vartheta - I)$, $\mathfrak{p} = \mathrm{Ker}(\vartheta + I)$ et on obtient la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces propres, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. Les paires $(\mathfrak{g}, \vartheta)$ et $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ sont appelées paires symétriques semi-simples.

Soit $\Theta(\mathfrak{p})$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs algébriques sur $\mathfrak{p}$. Considérons $\Theta(\mathfrak{p})$ comme identifié à $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}}\mathcal{O}(\mathfrak{p})$, où $\mathcal{O}(\mathfrak{p}) = S(\mathfrak{p}^*)$, S est l'algèbre symétrique et $\mathfrak{p}^*$l'espace dual de $\mathfrak{p}$. On considère l'homomorphisme d'algèbres de Lie $\tau : \mathfrak{gl}(\mathfrak{p}) \to \Theta(\mathfrak{p})$ défini par $(\tau(X).f)(v) = \frac{d}{dt}_{|t=0} f(e^{-tX}.v) v \in \mathfrak{p}, f \in \mathcal{O}(\mathfrak{p})$ et $X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{p})$. En particulier, $ad(\mathfrak{k}) \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{p})$, et on écrit $\tau(X) = \tau(ad(X))$.

Soit $K$ le sous-groupe algébrique de $G$ tel que $Lie(K) = \mathfrak{k}$. On rappelle que d'après Kostant et Rallis ([5]),

$$\mathcal{O}(\mathfrak{p})^K = \{f \in \mathcal{O}(\mathfrak{p}) : \tau(\mathfrak{k}).f = 0\} = \mathbb{C}[u_1, \ldots, u_p]$$

est un anneau de polynômes. Ici, p est le rang de $(\mathfrak{g}, \vartheta)$, i.e. la dimension d'un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ pour $(\mathfrak{g}, \vartheta)$. Prenons la sous-algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{k}}$ de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{p})$ :

$$\tilde{\mathfrak{k}} = \left\{X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{p}) : \tau(X).f = 0 \text{ pour tout } f \in \mathcal{O}(\mathfrak{p})^K\right\}.$$

Il est clair que $\tilde{\mathfrak{k}}$ contient $ad(\tilde{\mathfrak{k}})$. L'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{k}}$ a été considérée par plusieurs auteurs (par exemple [6, 7]) dans l'étude des hyperfonctions sphériques sur $\mathfrak{p}$. On remarque que si $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{k}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors $ad(\mathfrak{s}) = 0$ et $ad(\mathfrak{k}) = ad(\mathfrak{k}/\mathfrak{s})$. Nous allons supposer que $\mathfrak{k}$ ne contient pas d'idéal non nul de $\mathfrak{g}$. Par conséquent $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ peut être écrit comme un produit direct $\Pi_{i=1}^{t}(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{k}^i)$ où chaque facteur $(\mathfrak{g}^i, \mathfrak{k}^i)$ est irréductible (voir [4, VIII.5]).

Quand $p = 1$, le polynôme invariant $u_1$ est la forme quadratique sur $\mathfrak{p}$ induite par la forme de Killing B de $\mathfrak{g}$ (à une constante près). Alors, $\tilde{\mathfrak{k}} = \mathfrak{so}(\mathfrak{p}, u_1)$ et $\tilde{\mathfrak{k}} \supsetneq ad(\mathfrak{k})$, sauf dans le cas où $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) \cong (\mathfrak{so}(q+1, \mathbb{C}), \mathfrak{so}(q, \mathbb{C}))$.

# 2 RÉSULTATS

Le résultat principal de l'article écrit par T. Levasseur et moi, *Adjoint vector fields on the tangent space of semisimple symmetric spaces* (Journal of Lie Theory, Volume 9 (1999), 293-304), est énoncé dans le théorème suivant.

**Théorème 1** (Théorème principal)**.** *Soit* $(\mathfrak{g}, \vartheta)$ *comme ci-dessus. Alors* $ad(\mathfrak{k}) = \tilde{\mathfrak{k}}$ *si, et seulement, si chaque facteur irréductible de rang un de* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ *est isomorphe à* $(\mathfrak{so}(q+1, \mathbb{C}), \mathfrak{so}(q, \mathbb{C}))$.

Une idée de la démonstration du théorème est la suivante. Soit $\tilde{K}$ le sous-groupe algébrique connexe de $\mathrm{GL}(\mathfrak{p})$ tel que $\mathrm{Lie}(\tilde{K}) = \tilde{\mathfrak{k}}$. Nous démontrons d'abord que la représentation $(\tilde{K} : \mathfrak{p})$ est polaire (voir [1, 2]). En suite, nous utilisons les résultats de Dadok ([1]) et nous supposons qu'il existe une paire symétrique semi-simple $(\tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\vartheta})$ avec une décomposition $\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{p}$ et un sous-espace de Cartan a. Finalement, une analyse cas par cas des systèmes de racines restreints $\sum(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ et $\sum(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{a})$ nous permet de conclure la preuve.

La motivation ce théorème vient d'un problème plus général qui consiste à décrire le $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$-module des champs de vecteurs sur $\mathfrak{p}$ qui s'annulent sur $\mathcal{O}(\mathfrak{p})^K$. On définit :

$$\mathcal{E} = \left\{ d\ \Theta(\mathfrak{p}) : d.f = 0 \text{ pour tout } f \in \mathcal{O}(\mathfrak{p})^K \right\}.$$

Donc $E = \mathcal{O}(\mathfrak{p})\tau(\mathfrak{k}) \subset \tilde{E} = \mathcal{O}(\mathfrak{p})\tau(\mathfrak{k}) \subset \mathcal{E}$ et nous conjecturons que $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\mathfrak{p})\tau(\mathfrak{k})$. L'égalité $\mathcal{E} = \mathcal{O}(\mathfrak{p})\tau(\mathfrak{k})$ a été établie par J. Dixmier [3] pour le cas diagonal, c'est-à-dire, quand $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_1$ semi-simple, $\vartheta(x, y) = (y, x)$. Le même résultat est valable quand $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est de rang maximal, i.e. $p = rk\mathfrak{g}$ (ceci est aussi un cas particulier des résultats de Schwarz ([8])). Les modules $E$, $\tilde{E}$ et $\mathcal{E}$ sont des $\mathcal{O}(\mathfrak{p})$-sous-modules gradués de $\Theta(\mathfrak{p})$. Les parties de degré zero sont données par $E_0 = \tau(\mathfrak{k}), \tilde{E}_0 = \mathcal{E}_0 = \tau(\tilde{\mathfrak{k}})$. Alors le théorème principal nous montre dans quels cas nous avons $E \subsetneq \tilde{E} = \mathcal{O}(\mathfrak{p})\mathcal{E}_0$. Nous espérons que ce théorème pourra nous aider à résoudre la question originale.

**Bibliographie**

[1] J. Dadok, Polar coordinates induced by actions of compact Lie groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **288** (1985), 125-137.

[2] J. Dadok and V. Kac, Polar representations, *J. Algebra*, **92** (1985), 504-524.

[3] J. Dixmier, Champs de vecteurs adjoints sur les groupes et algèbres de Lie semi-simples, *J. Reine Angew. Math.*, **309** (1979), 183-190.

[4] S. Helgason, Differential Geometry, *Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic press, 1978.

[5] B. Kostant and S. Rallis, Orbits and representations associated with symmetric spaces, *Amer. J. Math.*, **93** (1971), 753-809.

[6] A. Kowata, Spherical hyperfunctions on the tangent space of symmetric spaces, *Hiroshima Math. J.*, **21** (1991), 401-418.

[7] H. Ochiai, Invariant functions on the tangent space of a rank one semisimple symmetric space, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **39** (1992), 17-31.

[8] G. W. Schwarz, Lifting differential operators from orbit spaces, *Ann. Scient. éc. Norm. Sup.*, **28** (1995), 253-306.

Laboratoire Gevrey de Mathématique Physique, Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et Techniques
B.P. 47870
F-21078 Dijon Cedex
rosaneu-bourgogne.fr