Comportement asymptotique d'une somme d'exponentielles de moyennes mobiles

Nelly Torrent

1 Présentation du domaine de recherche

Le titre de ma thèse est "Applications des grandes déviations et de la loi d'Erdds-Rényi pour les variables indépendantes ou de dépendance markovienne".
Le principe de grandes déviations caractérise un comportement limite d'une famille de probabilités $\{\mu_\varepsilon\}$ sur un espace topologique mesurable $(E, \mathcal{E})$ quand $\varepsilon \to 0$. Les livres de Dembo et Zeitouni et de Deuschel et Stroock ([6], [7]) donnent un exposé de cette théorie. On dit que $\{\mu_e\}$ *satisfait le principe de grandes déviations* avec fonction de taux I si pour tout $\Gamma \in \mathcal{E}$

$$-\inf_{x\in\Gamma^o} I(x) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(\Gamma) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(\Gamma) \leq -\inf_{x\in\overline{\Gamma}} I(x)$$

où Γ^o et $\overline{\Gamma}$ notent respectivement l'intérieur et la fermeture de Γ. Une *fonction de taux* I est une fonction semi continue inférieurement $I : E \to [0, +\infty[$, c'est-à-dire telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ l'ensemble de niveau $\Psi_I(\alpha) = x : I(x) < a$ est un fermé de E. De plus, I est dite *bonne fonction de taux* si tous les ensembles de niveau $\Psi_I(\alpha)$ sont des sous ensembles compacts de E.
L'exemple suivant met en évidence l'utilisation des grandes déviations pour mesurer des "événements rares". Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées intégrables sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La loi forte des grands nombres établit la convergence presque sûre de $\overline{X}_n = (X_1 + .. + X_n)/n$ vers $E[X_1]$ quand $n \to \infty$. En 1938, Cramér, voir [4], établit que, pour $a \geq E[X_1]$, $\lim_{n\to\infty} n^{-1} \log P(\overline{X}_n \geq a) = -\Lambda^*(a)$ où Λ^* est la transformée de Cramér de la distribution de X. Le Théorème de grandes déviations de Cramér caractérise le comportement asymptotique de la probabilité de l'événement rare $\{\overline{X}_n \geq a\}$ pour $a \geq E[X_1]$. Bahadur et Rao et Petrov ([1], [13]) donnent un équivalent de $P(\overline{X}_n \geq a)$.
Ce résultat a été utilisé ensuite par Erdös-Rényi en 1970 ([8]) pour établir que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq i\leq n-k} \overline{X}_{i,k} = x^+(\alpha) \quad P - p.s.$$

où les X_i sont i.i.d., $\overline{X}_{i,k} = k^{-1}(X_{i+1} + \ldots + X_{i+k})$, $k = k_\alpha(n) = \lfloor \alpha^{-1} \log n \rfloor$ et $x^+(\alpha) > 0$ est tel que $\Lambda^*(x^+(\alpha)) = \alpha$ en faisant de bonnes hypothèses sur $\alpha > 0$.
On appellera *moyennes mobiles* les variables aléatoires $\overline{X}_{i,k}$.

P. Erdös et A. Rényi se sont tout d'abord intéressés au gain moyen maximal d'un joueur de pile ou face après $\lfloor C \log_2 n \rfloor$ lancés consécutifs, ils ont donc étudié le cas particulier où les variables aléatoires prennent les valeurs ± 1 avec probabilité $1/2$.
Cette vitesse est la plus intéressante. En effet : pour $k = n$, il suffit d'appliquer la loi des grands nombres pour avoir le comportement de $\max_{0 \leq i \leq n-k} \overline{X}_{i,k}$, pour $k \leq \lfloor C \log_2 n \rfloor$, les auteurs montrent que $\max_{0 \leq i \leq n-k} \overline{X}_{i,k} = 1$ et pour $k / \lfloor C \log_2 n \rfloor \to \infty$,
que $P(\lim\limits_{n \to \infty} \max_{0 \leq i \leq n-k} \overline{X}_{i,k} = 0) = 1$.
Deheuvels, Devroye et Lynch ([5]), quant à eux, précisent le comportement asymptotique de $(\max_{0 \leq i \leq n-k} \overline{X}_{i,k} - X^+(\alpha))$.
D'autre part, si les variables sont indépendantes, par la loi des grands nombres, on sait que pour $B \in \mathcal{B}$:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{Y_i}(B) \to P(Y \in B) \quad P - p.s.$$

Ceci nous conduit à nous intéresser aux mesures empiriques construites sur des variables non indépendantes, les moyennes mobiles de longueur $k = k_\alpha(n)$:

$$\overline{\mu}_{n,\alpha} = \frac{1}{n-k+1} \sum_{i=0}^{n-k} \delta_{\overline{Y}_{i,k}}$$

C'est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des mesures de probabilités sur $\mathcal{X}$ mais nous allons la regarder comme une mesure pour établir un PGD presque sûr.

2 Résultats

2.1 Hypothèses

Ici, on garde les notations données dans la présentation. On suppose que les variables $X_1, X_2 \ldots$ ont même loi que la variable aléatoire réelle X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On fait les hypothèses suivantes :

A) $E[X] = 0$.

B) X n'est pas p.s. constante.

C) $\Psi(t) = E[e^{tX}] < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

On note $I(x) = \Lambda^*(x) = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \{tx - \Lambda(t)\}$ la duale de Legendre-Fenchel de Λ (ou transformée de Cramér) avec $\Lambda(t) = \log \Psi(t) = \log E[e^{tX}]$. C'est une fonction positive qui atteint son minimum en $E[X]$, elle est strictement convexe et $(\Lambda^*)' = (\Lambda^{-1})'$.

2.2 Principe de grandes déviations pour la mesure empirique sur les moyennes mobiles

On a établi le principe de grandes déviations suivant

Théorème 1. *P-p.s., $\hat{\mu}_{n,\alpha}$ satisfait le principe de grandes déviations sur $\mathbb{R}$ avec vitesse $k_\alpha(n)$ et fonction de taux*

$$I_\alpha(a) = \begin{cases} I(a) & si\ I(a) \leq \alpha \\ +\infty & sinon \end{cases}$$

2.3 Application

Grâce à ce principe de grandes déviations et au Théorème de Varadhan, on étudie le comportement asymptotique de la somme d'exponentielles de moyennes mobiles :

$$Z_n(\beta) = \sum_{i=0}^{n-k} e^{\beta k \overline{X}_{i,k}}.$$

Théorème 2 (Varadhan,1966,(14))**.** *Si P_n satisfait le principe de grandes déviations sur un espace métrique séparable $\mathcal{X}$ avec fonction de taux $I(.)$. Si $F(.)$ est continue bornée, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int e^{nF(x)} dP_n(x) = \sup_{x\in X}[F(x) - I(x)]$$

Soit β_c l'unique réel strictement positif tel que $\Lambda'(\beta_c) = x^+(\alpha)$; comme $\Lambda^*(x^+(\alpha)) = \alpha = \sup\{\beta x^+(\alpha) - \Lambda(\beta)\}$, on a $\alpha = \beta_c \Lambda'(\beta_c) - \Lambda(\beta_c)$.

En utilisant les Théorèmes 1 et 2, on a le comportement 'asymptotique logarithmique de $Z_n(\beta)$.

Théorème 3. *P-p.s.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k} \log\left(\frac{Z_n(\beta)}{n-k+1}\right) = \tilde{p}_\infty = \tilde{p}_\infty(\beta) = \begin{cases} \Lambda(\beta) & si\ 0 < \beta \leq \beta_c \\ \beta\Lambda'(\beta_c) - \alpha & si\ \beta \geq \beta_c \end{cases}$$

On s'intéresse alors à l'asymptotique plus précise de $Z_n(\beta)$ et on démontre le Théorème suivant :

Théorème 4. *.*

(i) Pour $0 \leq \beta < \beta_c \frac{Z_n(\beta)}{E[Z_n(\beta)]} = \frac{Z_n(\beta)e^{-k\Lambda(\beta)}}{n-k+1} = \frac{Z_n(\beta)}{n-k+1} e^{-k\tilde{p}_\infty} \xrightarrow{L^1} 1$

(ii) Pour $\beta > \beta_c$ *:*

(a) $\frac{Z_n(\beta)}{E[Z_n(\beta)]} = \frac{Z_n(\beta)e^{-k\Lambda(\beta)}}{n-k+1} \overset{p.s.}{\to} 0,$

(b) $\frac{1}{\log k}\left\{\log\left(\frac{Z_n}{n-k+1}\right) - k\tilde{p}_\infty\right\} \overset{P}{\to} -\frac{\beta}{2\beta_c}$

2.4 Comparaison avec le chaos multiplicatif

Le modèle du chaos multiplicatif introduit en 1974 par Mandelbrot ([11]), étudié entre autres par Kahane et Peyrière ([10]), Collet et Koukiou ([3]) et Franchi ([9]), peut être représenté sous la forme d'un arbre dont les notations ont été introduites dans Neveu [12]. Cette présentation est d'ailleurs utilisée par différents auteurs dans [2] pour les processus de branchement.
On considère ici un arbre $\mathbb{A}_n$ de hauteur n, d-adique (on construit l'arbre de hauteur $n+1$ à partir de $\mathbb{A}_n$ chaque arête terminale donne naissance à d descendants). Les arêtes sont numérotées par les suites finies (ou mots) non vides $v = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$ avec $j_i \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$, de longueurs $|v| = k \leq n$.
A chaque arête v, on associe une variable aléatoire U_v. On suppose que la collection $(U_v)_{v\in\mathbb{A}_n}$ est constituée de variables aléatoires indépendantes ayant la même loi qu'une variable aléatoire U.
On note rw la suite obtenue en juxtaposant les suites r et w. On dit que l'arête r précède dans l'arbre l'arête v si r est un début de v, c'est à dire qu'il existe un mot w tel que $v = rw$; on écrira $r < v$ ou $r \leq v$ suivant que le mot w est vide ou non. Si v est une arrête de $\mathbb{A}_n$ on pose $S_v = \sum_{r\leq v} U_r$ et $S_\emptyset = 0$.
La notation "arbre d-adique" provient du fait qu'on peut repérer le sommet $S(j_1, \ldots, j_n)$ d'une arête $v(j_1, \ldots, j_n)$ par le point $\sum_{i=1}^n j_i d^{-i}$ de l'intervalle d-adique $I(j_1, .., j_n) = [\sum_{i=1}^n j_i d{-}i\ , \sum_{i=1}^n j_i d{-}i + d^n\,[$ avec $j_i = 0, 1, .., d-1$ et $[0, 1[= \cup_{j_1,..,j_n} I(j_1, .., j_n)$.

On définit dans ce modèle $Z_n(\beta)$ de la façon suivante :

$$Z_n(\beta) = \sum_{v:|v|=n} e^{\beta S_v} = \sum_{j_1,..,j_n} e^{\beta\{U_{j_1}+U_{j_1,j_2}+..+U_{j_1,...,j_n}\}}.$$

La limite obtenue dans le Théorème 3 est identique à celle obtenue dans le modèle du chaos multiplicatif avec $\alpha = logd$ (voir [10]) mais l'asymptotique fine décrite dans le Théorème 4 est différente selon le modèle. Contrairement au chaos multiplicatif, aucune variable aléatoire non dégénérée n'apparaît ici à la limite.

Nous n'avons donné ici que le comportement de $Z_n(\beta)$ pour $\beta > 0$. Le cas $\beta < 0$ se traite de la même manière et on voit apparaître une valeur critique $\tilde{\beta}_c < 0$.

Bibliographie

[1] R.R. Bahadur et R.R. Rao. (1960). On deviations of the sample mean. *Ann. Math. Stat.* **31**. 1015-1027.

[2] Classical and modern branching processes. (1997). Eds Athreya, Jagers, IMA volume 84 (Springer).

[3] P. Collet et F. Koukiou. (1992). Large Deviations for Multiplicative Chaos. *Communications in Mathematical Physics.* **147**, 329-342.

[4] H. Cramér. (1938). Sur un nouveau théorème-limite de la théorie des probabilités. *Actualités scientifiques et industrielles.* **736**, 5-23.

[5] P. Deheuvels, L. Devroye et J. Lynch.Exact convergence rate in the limit theorems of ErdSs-Rényi and Shepp. *Annals of Probability.* (1986). **14**, 209-223.

[6] A. Dembo et O. Zeitouni. (1998). Large deviations techniques and applications. *Springer Verlag.*

[7] J-D. Deuschel et D.W. Stroock. (1989). Large deviations. *Academic Press.*

[8] P. Erdôs et A. Rényi. On a new law of large numbers. *J. Analyse Maths.* (1970). **23**, 103-111.

[9] J. Franchi. (1993). Prépublication n 148 du Laboratoire de Probabilités de l'Université Paris 6.

[10] J.P. Kahane et J. Peyrière. Sur certaines martingales de B.Mandelbrot. *Advances in Mathematics.* (1976). **22**, 131-145.

[11] B. Mandelbrot. (1974). Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire : quelques extensions. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.* **278**, 355-358.

[12] J. Neveu. (1986). Arbres et processus de Galton-Watson. *Annales de l'Institut Henri Poincaré.* **22**, 199-207.

[13] V.V. Petrov. On the limit of large deviations for sums of independent random vari-ables. *Theory of Probability and its Applications.* (1965). **10**, 287-298.

[14] S.R.S. Varadhan. Large deviations and applications. CBMS-NSF *Regional Conference Series in Applied Mathematics.* (1984). **46**.

adresse postale : Université Paris 7,
Statistique et Modèles aléatoires,
Case 7012,
2 Place Jussieu,
75251 PARIS cedex 05
adresse email : Denis.Nelly©wanadoo.fr