Régularité de l'attracteur pour l'équation de Schrödinger non linéaire faiblement amortie

Naïma AKROUNE

Résumé : Nous étudions le comportement asymptotique lorsque le temps tend vers l'infini des solutions des équations de Schrödinger en présence d'un terme de force et d'un terme de dissipation, la variable d'espace x étant dans $\mathbb{R}$. Nous montrons que ce comportement est décrit par un attracteur qui capture toutes les trajectoires dans $H^1(\mathbb{R})$. Un de nos résultats principaux concerne l'existence d'un effet régularisant asymptotique pour ces équations. En d'autres termes, cet attracteur est inclus et compact dans $H^2(\mathbb{R})$.

1 Introduction

Nous nous intéressons au comportement pour les grands temps de l'équation de Schrödinger non linéaire faiblement amortie définie par

$$u_t + \alpha u + iu_{xx} - iu + i|u|^2 u = f \tag{1}$$

où u est une application de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans l'espace des fonctions complexes

$$H^1(\mathbb{R}) = \{u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, u, \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

On définit la condition de Cauchy associée à cette équation par

$$u(0) = u_0 \text{ dans } H^1(\mathbb{R}).$$

Le semi-groupe $S(t)$ qui agit de $H^1(\mathbb{R})$ sur lui-même est défini par

$$u(t) = S(t)u_0,$$

où $u(t)$ est la solution de (1).
Il est bien connu que ce semi-groupe est dissipatif : il possède un borné absorbant (c'est-à-dire un sous-ensemble borné de $H^1(\mathbb{R})$ dans lequel sont confinées toutes les trajectoires après un temps fini) et même un attracteur global $\mathcal{A}$ dans $H^1(\mathbb{R})$, voir [L].
Nous cherchons à montrer un effet régularisant asymptotique (suivant la terminologie de [H]) pour ce semi-groupe, i.e. que $\mathcal{A}$ est inclus dans un espace de fonctions plus régulières.
Notons que [G] a démontré le même résultat dans l'espace $H^1_{per}([0,1])$.
Nous renvoyons à [T] pour des références plus complètes.

2 Existence globale de la solution et le borné absorbant

Etant donné u_0 dans $H^1(\mathbb{R})$, on obtient aisément, en utilisant les méthodes classiques, l'existence globale et l'unicité de la solution de (1). Il en résulte alors les deux propositions suivantes :

Proposition 1. *Pour $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, l'équation (1) admet une unique solution*

$$u \in C_b([0, +\infty[, H^1(\mathbb{R}))$$

et l'application $S(t) : u_0 \longrightarrow u(t)$ est continue sur $H^1(\mathbb{R})$

Remarque 1. $C_b([0, +\infty[, H^1(\mathbb{R}))$ *désigne l'espace des fonctions continues et bornées à valeurs dans $H^1(\mathbb{R})$.*

Proposition 2. *Pour tout borné B de $H^1(\mathbb{R})$, il existe t_0 qui dépend de B, tel que, pour $t \geq t_0$, et $u_0 \in B$ on a*

$$|S(t)u_0|_{H^1} \leq M_1$$

où M_1 dépend de α et f .

Preuve : Voir [Gh] et [L].

3 Existence de l'attracteur dans $H^1(\mathbb{R})$

En utilisant les méthodes de [L], et l'argument de Ball [B], on montre que l'ensemble $\mathcal{A}$ défini par :

$$\mathcal{A} = \{\alpha \in B, \exists\, \varphi_n \in B, tn \longrightarrow +\infty, \text{ tel que } S(t_n)\varphi_n \longrightarrow a \text{ dans } H^1(\mathbb{R})\}$$

est un attracteur global et compact dans $H^1(\mathbb{R})$.
D'où le théorème suivant :

Théorème 1. *S(t) possède un attracteur global, inclus et compact dans* $H^1(\mathbb{R})$.

4 Régularité de l'attracteur

Nous esquissons ici notre résultat dont la preuve complète apparaîtra dans [A] .
Soit u solution de l'équation (1) qui s'écrit sous la forme :

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Pour un niveau donné N, on définit la partie basse fréquence de u :

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leq N} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Notons que y est C^∞ par rapport à x. De même, on définit la partie haute fréquence de u :

$$z(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \geq N} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Notons que z est solution de l'équation non autonome suivante :

$$\begin{cases} z_t + \alpha z + i z_{xx} - iz + iQ(|y+z|^2(y+z)) = Qf \\ z(0) = Qu_0 = z_0 \end{cases}$$

où Q est le projecteur orthogonal sur

$$QH^1 = \{z = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \geq N} \hat{u}(\xi) e^{ix\xi} d\xi, z \in H^1(\mathbb{R})\}.$$

Pour N fixé et pour une solution u, soit $y = Pu = (Id - Q)u$;
on introduit alors ZZ : $[t_0, +\infty[\longrightarrow QH_1$ vérifiant l'équation suivante :

$$\begin{cases} Z_1 + \alpha Z + iZ_{xx} - iZ + iQ(|y+Z|^2(y+Z)) = Qf \\ Z(t_0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Remarque 2. *t_0 est défini comme dans la proposition 2.*

Proposition 3. *Il existe une unique solution Z de (2) continue et bornée dans QH2, qui satisfait de plus à*

$$\limsup_{t\to+\infty} |Z(t) - z(t)|_{H^1} = 0$$

Preuve : En utilisant des estimations a priori, on montre alors que Z est une solution globale dans $H^2(\mathbb{R})$. De plus, il existe C dépendant de a et f, tel que

$$|Z(t) - z(t)|_{H^1} \leq Ce^{-\alpha t}$$

Théorème 2. *L'attracteur $\mathcal{A}$ est inclus, borné et compact dans $H^2(\mathbb{R})$.*

Preuve : La Proposition 3 implique que $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble borné de H^2 (voir [G]). Pour montrer la compacité, on introduit l'équation d'énergie vérifiée par u :

$$\phi(S(t)u_0) = \phi(u_0)e^{2\alpha t} + \alpha \int_0^t e^{2\alpha(t-s)}\psi(S(s)u_0)ds \tag{3}$$

où

$$\phi(u) = |u|_{H^2}^2 - 2Im \int f\overline{u_{xx}} - \int |u_x|^2|u|^2 - 2\int [Re(u_x\overline{u})]^2$$

$$\psi(u) = -\alpha Im \int f\overline{u_{xx}} + \alpha \int |u|^2 - 2\int Re(u_x\overline{u}) \int Re(u_x\overline{u_t}) \\ + \int Re(u\overline{u_t}) - \int Re(u\overline{u_t})|u_x|^2.$$

Soit une suite (x_j) dans $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}$ est borné dans $H^2(\mathbb{R})$ et compact dans $H^1(\mathbb{R})$, alors il existe une sous-suite $(x_{j'})$ qui converge faiblement vers

$$\limsup_{j' \to +\infty} |x_{j'}|_{H^2} \leq |\beta|_{H^2}$$

d'où le résultat.

Bibliographie

[A] *N. Akroune*, Thèse d'université, en préparation.

[B] *J. Ball*, A proof of the existence of global attractors for damped semilinear wave equations, à paraître.

[G] *O. Goubet*, Regularity of the attractors for a weakly damped nonlinear Schrödinger equation, *Applicable Analysis*, Vol 60, 99-119 (1995).

[Gh] *J.-M. Ghidaglia*, Finite dimensional behaviour for weakly damped driven Schrödinger equations, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 5, 365-405 (1988).

[H] *A. Haraux*, Two remarks on hyperbolic dissipative problems, in Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, *Collège de France Seminar*, Vol 7, H. Brézis, J.-L. Lions (Eds), Pitman, London (1985).

[L] *P. Laurençot*, Long time behaviour for weak damped driven nonlinear Schrödinger equation in $\mathbb{N}, N \leq 3$, No DEA (1995).

[T] *R. Temam*, Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, Appl. Math. Sc. 68, *Springer-Verlag, New.York*, Second Edition (1997).

Université de Cergy-Pontoise
2, Avenue Adolphe Chauvin
95302 Cergy-Pontoise, France
Naima.Akroune@math.u-cergy.fr