Quelques nouveaux résultats sur les mosaïques poissonniennes

Katy Paroux

Nous nous intéressons à des problèmes de géométrie aléatoire qui concernent plus particulièrement les mosaïques poissoniennes. Plus précisément, nous nous intéressons à l'étude géométrique de domaines aléatoires associés aux processus poissoniens de droites dans le plan. Chronologiquement, le problème de la détermination de caractéristiques géométriques simples de polygones associés à un processus poissonnien de droites dans le plan s'est posé, pour la première fois, dans les années quarante, au physicien S.A. Goudsmit [7], à propos de l'étude des trajectoires dans les chambres à bulles. Il a calculé, de façon heuristique, les deux premiers moments empiriques de la mesure d'aire des polygones. Dans les années soixante, R.E. Miles [8, 9] a repris ce problème pour l'étude de la qualité du papier dont les fibres sont modélisées par les droites. Par des arguments de nature ergodique, il a obtenu des résultats de convergence presque-sûre, ce qui lui a permis d'en déduire les valeurs exactes des deux (et parfois des trois)premiers moments empiriques de certaines caractéristiques géométriques, dans les cas $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Ce modèle a également été exploité afin d'estimer le temps moyen nécessaire à l'extraction de l'huile contenue dans des blocs délimités par un réseau de failles dans un gisement pétrolier (voir F. Conrad et C. Jacquin [2]). En 1975, G. Matheron [10] a mené une étude théorique exhaustive des ensembles aléatoires. Il a également évalué, dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, la valeur de certains moments empiriques et a obtenu, dans $\mathbb{R}^2$, la distribution empirique de la longueur de la projection orthogonale d'un polygone sur un axe fixé, ainsi que quelques résultats sur les caractéristiques du polygone contenant l'origine. Plus récemment, en analyse d'image, les processus poissonniens de droites ont été utilisés pour la reconnaissance des processus stochastiques générateurs d'une image donnée (voir S. Archambault et M. Moore [1]). Le spectre du Laplacien dans les polygones convexes de la mosaïque a été étudié par A. Goldman [5] (en explicitant une correspondance entre les propriétés géométriques des domaines polygonaux et celles de l'enveloppe convexe du pont brownien). Un récent travail de R.E. Miles relatif à une conjecture de D.G. Kendall sur les "grands polygones", a été repris par A. Goldman [6].

Notre contribution [11, 12] concerne des théorèmes centraux limites pour les caractéristiques géométriques des polygones convexes aléatoires, étudiées par R.E. Miles dans le cadre de la convergence presque-sûre.

Soit $\mathcal{P} = \{x_n, n \geq 1\}$ une mesure de Poisson aléatoire dans le plan $\mathbb{R}^2$, de mesure d'intensité

$$\mu(A) = \mathrm{E}\ \mathrm{card}\ (A \cap \mathcal{P}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\pi} 1_A(\rho, \theta) d\rho d\theta, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

et soit $\mathcal{H} = \{H(x), x \in \mathcal{P}\}$ l'ensemble des droites polaires associées. L'ensemble $\mathcal{H}$ découpe le plan $\mathbb{R}^2$ en polygones convexes aléatoires qui forment la mosaïque poissonnienne associée au processus poissonnien de droites dans le plan.

Soit $B_R = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| < R\}$ le disque ouvert centré à l'origine, de rayon $R > 0$, et soient $D_i, i = 1, ..., N_R$ les polygones convexes inclus dans B_R. Considérons par ailleurs une fonctionnelle X opérant sur les domaines polygonaux et invariante par translation. Sous des conditions raisonnables de mesurabilité, un argument de nature ergodique permet de voir que les moyennes empiriques, $1/N_R \sum_{i=1}^{N_R} 1_{[0,t]}(X(D_i))$, $R > 0$, convergent presque-sûrement vers une constante. Par définition, cette limite, notée $\tilde{P}\{X \leq t\}$, est la fonction de répartition empirique. De même, on peut montrer par un argument de même nature que, sous certaines conditions, la limite presque-sûre des moyennes empiriques, $1/N_R \sum_{i=1}^{N_R}(X(D_i))$, $R > 0$, existe et est égale à une constante. Par définition, cette constante, notée $\tilde{E}\ X$, est l'espérance empirique.

Pour certaines caractéristiques géométriques des polygones convexes, des moments empiriques ont pu être calculés. Ainsi par exemple, en désignant respectivement par $\tilde{E}\ V$, $\tilde{E}\ P$ et $\tilde{E}\ S$ les moyennes empiriques de la mesure d'aire, du périmètre et du nombre de sommets des domaines polygonaux, on a $\tilde{E}\ V = 1/\pi$, $\tilde{E}\ P = 2$ et $\tilde{E}\ S = 4$. Nous présentons ici des théorèmes centraux limites pour ces caractéristiques géométriques.

1. Le cas de certains types d'angles liés aux droites polaires et du nombre de sommets des polygones convexes inclus dans BR.

Nous nous intéressons aux angles formés par l'intersection de deux droites polaires avec l'axe (Ox). Désignons par $s_i, i = 1, \ldots, S_R$ les sommets des polygones inclus dans B_R puis par β_i et γ_i les deux angles formés par l'intersection avec l'axe (Ox), des deux demi-droites issues du sommet s_i. Plus précisément, on désigne par β_i l'angle associé à celle des deux demi-droites dont le point d'intersection avec l'axe (Ox) est celui d'abscisse la plus petite des deux. La répartition empirique de ces angles vérifie le

Théorème 1. *Fixons t et s dans $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a alors :*

$$\frac{1}{S_R^{3/4}} \left(\sum_{i=1}^{S_R} 1_{[0,t]}(\beta_i) 1_{[0,s]}(\gamma_i) - \frac{n_R(n_R-1)}{4} m(t,s) \right) \xrightarrow[R \to \infty]{loi} \mathcal{N}(0, \sigma^2(t,s)) \qquad (1)$$

où

$$m(t,s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_0^t |\sin(u-v)| du dv,$$

$$\sigma_2(t,s) = I(t,s) + I(s,t) + J(t \wedge s, t, s) - 2m^2(t,s),$$

avec

$$I(a,b) = \frac{4}{3\pi^2} \int_0^a \left[\int_0^b |\sin(u-v)| dv \right]^2 du,$$

$$J(a,b,c) = \frac{8}{3\pi^2} \int_0^a \left[\int_0^b |\sin(u-v)| dv \int_0^c |\sin(u-v)| dv \right] du$$

La démonstration de ce théorème repose, via la méthode des moments (voir par exemple R. Durrett [4]), sur des arguments de nature combinatoire.

Le théorème suivant se déduit du théorème 1 et d'un résultat de R. Cowan [3] reliant le nombre de points d'intersection des droites polaires situés dans le disque BR au nombre de polygones contenus dans le disque B_R. Il concerne :

(i) le nombre S_R de sommets contenus dans B_R ;

(ii) le nombre N_R de polygones contenus dans B_R.

Désignons par n_R le nombre de droites coupant le disque B_R.

Théorème 2. *On a :*

$$\frac{1}{S_R^{3/4}} \left(S_R - \frac{n_R(n_R-1)}{4} \right) \xrightarrow[R\to\infty]{loi} \mathcal{N}\left(0, \frac{64}{3\pi} - 2\right) \tag{2}$$

$$\frac{1}{N_R^{3/4}} \left(N_R - \frac{n_R(n_R-1)}{4} \right) \xrightarrow[R\to\infty]{loi} \mathcal{N}\left(0, \frac{64}{3\pi} - 2\right) \tag{3}$$

On peut également obtenir un résultat de convergence en loi pour les moyennes empiriques du nombre de sommets. On sait notamment que $\tilde{E}\ S = 4$ et que $\tilde{E}\ S^2 = (\pi^2 - 8)/2$([8]). En relation avec ces estimations, nous démontrons, comme conséquence du théorème 2, le théorème central limite suivant :

Théorème 3. *On a :*

$$N_R^{1/4} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N_R} S(D_i)}{N_R} - \frac{n_R^2}{N_R} \right) \xrightarrow[R\to\infty]{loi} \mathcal{N}\left(0, \frac{1024}{3\pi^2} - 32\right)$$

Par une méthode analogue à celle qui nous a permis de démontrer le théorème 1, nous obtenons un résultat concernant les angles aux sommets des polygones inclus dans le disque B_R. Soit Si le plus petit des deux angles formés par l'intersection des deux droites polaires se coupant au sommet si. On a alors

Théorème 4. *Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on a :*

$$\frac{1}{S_R^{3/4}} \left(\sum_{i=1}^{S_R} 1_{[0,t]}(\delta_i) - \frac{n_R(n_R-1)}{4} m(t) \right) \xrightarrow[R\to\infty]{loi} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2(t)\right)$$

où

$$m(t) = \int_0^t \sin u du$$

$$\sigma^2(t) = \left(\frac{64}{3\pi} - 2\right) m^2(t).$$

3. Le cas du périmètre des polygones convexes inclus dans B_R. Désignons par $P(D_i), i = 1, \ldots, N_R$ le périmètre du polygone D_i contenu dans le disque B_R. On sait que les moyennes empiriques $1/NR \sum_{i=1}^{N_R} P(D_i)$ convergent presque-sûrement vers $\tilde{E}\ P = 2$ ([8]). Dans ce cadre, nous obtenons le théorème central limite suivant :

Théorème 5. *On a :*

$$N_R^{1/4} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N_R} P(D_i)}{N_R} - \frac{\pi R n_R}{N_R} \right) \underset{R \to \infty}{\overset{loi}{\longrightarrow}} \mathcal{N}\left(0, \frac{64}{3\pi} - 2\right)$$

Pour démontrer ce résultat, on fait appel au théorème de convergence en loi de P. Lévy ainsi qu'au résultat intermédiaire suivant :

Lemme 1. *Pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$E\left(\frac{{P_0}^n}{V_0}\right) < +\infty, \tag{4}$$

où P_0 désigne le périmètre du polygone convexe contenant l'origine et V_0 sa mesure d'aire.

La preuve de ce lemme exploite l'expression explicite de la loi empirique de la longueur de la projection orthogonale d'un polygone sur une droite fixée due à G. Matheron (voir [10]).

Bibliographie

[1] *S. Archambault and M. Moore*, Statistiques Morphologiques pour l'Ajustement d'Images, *Int. Stat. Rev.* **61** (1993), 283-297.

[2] *F. Conrad and C. Jacquin*, Représentation d'un réseau bi-dimensionnel de failles par un modèle probabiliste, *Fontainebleau* **295** (1972).

[3] *R. Cowan*, Properties of ergodic random mosaic processes, *Math. Nachr.* **97** (1980), 89-102.

[4] *R. Durrett*, Probability : Theory and Examples, *Wadsworth & Brooks* **CA** (1991).

[5] *A. Goldman*, Le spectre de certaines mosaïques poissonniennes du plan et l'enveloppe convexe du pont brownien, *PTRF* **105** (1996), 57-83.

[6] *A. Goldman*, Une conjecture de D.G. Kendall et sa contre-partie brownienne, En préparation, (1997).

[7] *S.A. Goudsmit*, Random distributions of lines in a plan, *Rev. Mod. Phys.* **17** (1945), 321-322.

[8] *R.E. Miles*, Random polygons determined by random lines in a plane I, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **52** (1964), 901-907.

[9] *R.E. Miles*, Random polygons determined by random lines in a plane II, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **52** (1964), 1157-1160.

[10] *G. Matheron*, Random Sets and Integral Geometry, *JWS* **New York** (1975).

[11] *K. Paroux*, Quelques théorèmes centraux limites pour les mosaïques poissonniennes du plan, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I **324** (1997), 465-469.

[12] *K. Paroux*, Quelques théorèmes centraux limites pour les processus poissonniens de droites du plan, à paraitre dans *Adv. Appl. Prob.* (1998).

[13] *K. Paroux*, Théorèmes centraux limites pour les processus poissonniens de droites dans le plan et questions de convergence pour le modèle booléen de l'espace euclidien, *Thèse de doctorat* (1997).

Laboratoire de Probabilités
Université Lyon 1
43 bd du 11 novembre 1918
69622 Lyon FRANCE
paroux@math.univ-fcomte.fr