Principe d'invariance local pour les chaînes de Markov

Caroline Noquet

Considérons $\xi = (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d.), définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ et λ est la mesure de Lebesgue. Les v.a. ξ_k sont telles que $\mathbb{E}(\xi_k) = 0$ et $Var(\xi_k) = \sigma^2 < \infty$. Posons $S_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et construisons le processus polygonal ζ_n défini pour tout $t \in [0; 1]$ et tout $\omega \in \Omega$ par

$$\zeta_n(t, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left[S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt])\xi_{[nt]+1}(\omega)\right]$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x. Notons $C[0; 1]$ l'espace des fonctions continues sur $[0; 1]$ et P_n la loi de ζ_n sur $C[0; 1]$. Nous savons [1] que $P_n \Rightarrow W$, où W est la loi du processus de Wiener noté $\{w(t); t \in [0; 1]\}$ et "$\Rightarrow$" désigne la convergence en loi. Si φ est une fontionnelle définie sur $C[0; 1]$, W-presque partout continue, alors $P_n\varphi^{-1} \Rightarrow W\varphi^{-1}$

En imposant des conditions plus fortes sur la densité p de ξ_k et en restreignant la classe des fonctionnelles, Y. Davydov dans [4] a montré une assertion plus forte, c'est-à-dire qu'au lieu de la convergence faible, il obtient la convergence $P_n\varphi^{-1} \to W\varphi^{-1}$ en variation.

Notre objectif est de généraliser ce résultat au cas où ξ est une chaîne de Markov (c.m.) homogène stationnaire.

1 Inégalité

Dans un premier temps, il s'agit de majorer la distance en variation entre la loi $\mathcal{P}_n$ du vecteur $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ et la loi $\mathcal{P}_n^a$; du vecteur translaté $(\xi_1 + a_1, \ldots, \xi_n + a_n)$, où $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle. La loi de probabilité initiale stationnaire Π de ξ a pour densité π supposée absolument continue (a.c.) et le noyau de probabilité de transition P a pour famille de densités de transition $\{p(x, .); x \in \mathbb{R}\}$, où $p(x, .)$ est supposée a.c. pour tout $x \in \mathbb{R}$. Notons π' la dérivée de π et p'_x, p'_y les dérivées partielles de p. Définissons la notion de I-régularité suivante [5].

Définition 1. *Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. La famille des densités de probabilité $\{p(., \theta); \theta \in O\}$ est I-régulière si l'application de O dans $L^2(\mathbb{R}, \lambda)$ qui à θ associe $p^{1/2}(., \theta)$ est continûment différentiable au sens des normes standard de $\mathbb{R}$ et de $L^2(\mathbb{R}, \lambda)$. La quantité d'information associée est définie par*

$$I(\theta) = 4 \left\| \frac{\partial}{\partial\theta} p^{1/2}(., \theta) \right\|_2^2,$$

qui s'écrit sous la forme usuelle de la quantité de Fisher.

Notons $J = \{x \in \mathbb{R} | \pi(x) > 0\}$ et $\{q(y, .); y \in J\}$ la famille des densités de transition de la chaîne inversée (par rapport à Π). Nos hypothèses de /-régularité sont les suivantes.
(**R**) La famille $\{\pi(. + t); t \in \mathbb{R}\}$ est I-régulière et

$$I(\pi) = \int_J \left[\frac{\pi'}{\pi}(x)\right]^2 \pi(x)dx.$$

($\mathbf{R}^+$) La famille $\{p(x, .); x \in J\}$ est I-régulière et pour $x \in J$

$$I^+(x) = \int_J \left[\frac{p'_x}{p}(x, y)\right]^2 p(x, y)dy.$$

($\mathbf{R}^-$) La famille $\{q(y, .); y \in J\}$ est I-régulière et pour $y \in J$

$$I^-(y) = \int_J \left[\frac{p'_y}{p}(x, y) - \frac{\pi'}{\pi}(y)\right]^2 \frac{\pi(x)p(x, y}{\pi(y)}dx.$$

Nous supposons de plus que

$$I^+ = \int_J I^+(x)\pi(x)dx < \infty \text{ et } I^- = \int_J I^-(y)\pi(y)dy < \infty. \tag{1}$$

Théorème 1. *Si (**R**), ($\mathbf{R}^+$), ($\mathbf{R}^-$) et (1) sont réalisées, alors l'inégalité suivante a lieu*

$$\|\mathcal{P}_n^a - \mathcal{P}_n\| \leq \sqrt{2I}\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2},$$

où $I = I(\pi) + I^+ + I^-$.

2 Principe d'invariance local

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $S_0 = 0$ et $S_k = f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_k)$. Le processus polygonal ζ_n de loi P_n est défini par

$$\zeta_n(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left[S_{[nt]}(\omega) + (nt - [nt])f(\xi_{[nt]+1}(\omega))\right].$$

En utilisant l'inégalité précédente et un théorème limite local pour les fonctionnelles de processus aléatoires (Y. Davydov [2]), nous montrons un principe d'invariance local pour la suite de lois $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Théorème 2. *Si les conditions suivantes sont réalisées*

(1) $(\boldsymbol{R})$, $(\boldsymbol{R}^+)$, $(\boldsymbol{R}^-)$ *et (1),*

(2) $\exists\delta > 0$ *et* $\exists M \geq 0$ *tels que* $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq \delta$ *et* $|f''(x)| \leq M$,

(3) $P_n \Rightarrow W_c$ *avec* $c > 0$,

(4) $\varphi \in \mathcal{M}_W$,

alors $P_n\varphi^{-1} \to W_c\varphi^{-1}$ *en variation.*

Remarque 1. W_c *est la loi du processus* $\{cw(t); t \in [0;1]\}$. *La définition de la classe des fonctionnelles* $\mathcal{M}_W$ *ainsi que de nombreux exemples sont disponibles dans [3] et [4] .*

Dans ce résultat, nous avons supposé la convergence faible de la suite $(P_n)n \in \mathbb{N}^*$. En ajoutant des conditions peu restrictives sur ξ et sur f , il existe un principe d'invariance, c'est-à-dire que la condition (3) est réalisée. En effet, supposons que $f \in L^2(J,\Pi)$ vérifie la condition suivante
$(\mathbf{C}) Pf = P_g - g$ pour une fonction $g \in L^2(J,\Pi)$
et notons $\sigma^2 = \|g - f\|_2^2 - \|P(g - f)\|_2^2$. Nous pouvons alors énoncer le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Si les conditions suivantes sont réalisées*

(1) $(\boldsymbol{R})$, $(\boldsymbol{R}^+)$, $(\boldsymbol{R}^-)$ *et (1),*

(2) $\exists\delta > 0$ *et* $\exists M \geq 0$ *tels que* $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq \delta$ *et* $|f''(x)| \leq M$ *et* $f \in L^2(J,\Pi)$ *vérifie (**C**) avec* $\sigma^2 > 0$,

(3) ξ *est indécomposable,*

(4) $\varphi \in \mathcal{M}_W$,

alors $P_n\varphi^{-1} \to W_\sigma\varphi^{-1}$ *en variation.*

Remarque 2. *La définition d'une chaîne indécomposable se trouve dans [6]. Les conditions (1) et (3) permettent de démontrer que* ξ *est Harris-récurrente positive sur J (définition dans [6]). Ceci et la condition (**C**) sont les conditions requises pour avoir le principe d'invariance, c'est-à-dire la condition (3) du théorème 2.*

Bibliographie

[1] *P. Billingsley*, Convergence of Probability Measures, Wiley, New York (1968).

[2] *Y. A. Davydov*, Local limit theorems for functionals of random processes, Th. Prob. Appl. **33** (1988), 732-738.

[3] *Y. A. Davijjdov, M. A. Lifshits*, Fibering method in some probabilistic problems, J. Soy. Math. **31** (1985), 2796-2858.

[4] *Y. A. Davydov, M. A. Lifshits, N. V. Smorodina*, Local properties of distributions of stochastic functionals, Ams, New York (1998).

[5] *I. A. Ibragimov, R. Z. Has'minskii*, Statistic Estimation : Asymptotic Theory, Springer Verlag, Berlin, New York (1981).

[6] *E. Nummelin*, General irreductible Markov chains and non-negative operators, Cambridge University Press, London (1981).

Laboratoire de Statistique et Probabilités
U.F.R. de Mathématiques Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 Villeneuve d'Acsq cedex, FRANCE
noquet@jacta.univ-lille1.fr