Multiples de formes trace

Marina Monsurrò

1 Notations

Soit k un corps, $car(k) \neq 2$, on note k_s une clôture séparable de k et $G_k := Gal(k_s/k)$ le groupe de Galois absolu.

Soit L une extension galoisienne finie de k et $G := Gal(L/k)$.

Définition 1. *On appelle forme Trace de L/k la forme quadratique (non dégénérée) définie par*

$$q_L(x) := Tr_{L/k}(x^2) \ \forall x \in L.$$

On peut observer que q_L, est invariante par l'action de G, ce qu'on appelle une G-forme.

On dit que deux G-formes q et q' sont G-isomorphes, et on écrit $q \simeq_G q'$, si elles sont isomorphes comme formes quadratiques et si l'isomorphisme préserve l'action de G.

Les extensions galoisiennes de groupe G sont un cas particulier des G-Algèbres galoisiennes que nous introduisons maintenant.

Définition 2. *Une G-algèbre galoisienne est une k-algèbre commutative L de dimension $n = |G|$ munie d'une G-action qui satisfait aux conditions équivalentes suivantes :*

1 . *L est étale, c'est-à-dire produit d'extensions finies séparables, et l'action de G sur $X(L) = Hom^{Alg}(L, k_s)$ est simplement transitive.*

2 . *Après extension des scalaires à k_s, on obtient $L_s := L \otimes_k k_s \simeq k_s \times k_s \times \ldots \times k_s$ et l'action de G permute les n facteurs transitivement.*

Dans ce qui suit on va choisir ce point de vue plus général car, par exemple, la catégorie des G-algèbres galoisiennes est fermée par rapport à l'opération d'extension des scalaires, ce qui est très utile pour notre travail.

Soit G un groupe fini, on considère une G-algèbre galoisienne L/k, et soit q_L la trace de L/k. La classe d'isomorphisme de q_L comme G-forme est un invariant de L/k plus complet que la simple forme quadratique q_L car il permet, par exemple, de déterminer aussi la forme q_E pour toute algèbre E de points fixée ($k \subseteq E \subseteq L$).

- Si A est un G_k-module discret, on notera

$$H^i(k, A) := H^i(G_k, A)$$

($i \leq 2$ si A est non abélien).

- Soit L une G-algèbre galoisienne, il est possible d'associer à L un homomorphisme continu, $\phi_L : G_k \to G$, dont la classe de conjugaison caractérise la classe d'isomorphisme de L. On a donc une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphisme de G-algèbres galoisiennes sur k et l'ensemble des classes de con-jugaison de morphismes continus $\phi_L : G_k \to G$.

On peut donc "lire" sur ϕ_L plusieurs informations sur l'algèbre L ; on a par exemple :
- ϕ_L surjectif $\Longleftrightarrow$ L est un corps ;
- $\phi_L \equiv 1 \Longleftrightarrow$ L est déployée c'est-à-dire L $\simeq k \times k \times \ldots \times k$ (G agit en permutant transitivement les facteurs).

Pour tout i, on notera $H^i(k) := H^i(k, \mu_2)$ et $H^i(G) := H^i(G, \mu_2)$ où $\mu_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; on remarque alors que ϕ_L induit un morphisme

$$\phi_L^* : H^i(G) \longrightarrow H^i(k)$$

L'image $\phi_L^*(x) = x \circ \phi_L$ pour tout $x \in H^1(G)$ sera notée x_L.

2 Résultats

- E. Bayer-Fluckiger et H. W. Lenstra, [2], ont démontré que, si l'ordre de G est impair, q_L est toujours G-isomorphe à la forme unité c'est-à-dire que toute G-algèbre galoisienne L admet une base normale autoduale.

- E. Bayer-Fluckiger et J.P. Serre, [7], ont donné des critères cohomologiques pour déterminer la classe de G-isomorphisme de q_L dans le cas où l'ordre de G est pair.

Théorème 1. *Soient L et L' deux G-algèbres galoisiennes sur un corps k de dimension cohomologique inférieure ou égale à 1, $cd(k) \leq 1$, on a que :*

$$q_L \simeq_G q_{L'}$$

si et seulement si

$$x_L = x_{L'} \forall x \in H^i(G).$$

Corollaire 1. *Sous les mêmes hypothèses du théorème précédent on a que :*

$$q_L \oplus q_L \simeq_G q_{L'} \oplus q_L.$$

Dans un travail commun avec E. Bayer-Fluckiger, [4] nous nous sommes inspirées de ce résultat pour donner, sous des hypothèses plus faibles sur le corps k, deux critères de G-isomorphisme pour des multiples de la forme Trace.

3 Multiples

On notera

$$2 \otimes q_L := q_L \oplus q_L.$$

Théorème 2. *Soient L et L' deux G-algèbres galoisiennes sur un corps k tel que $cd(k) \leq 2$, et q_L et $q_{L'}$ les formes Trace associées. Alors*

$$2 \otimes q_L \simeq_G 2 \otimes q_{L'}$$

si et seulement si

$$(x_L, -1) = (x_{L'}, -1) \in H^2(k) \forall x \in H^1(G),$$

où (,) indique le produit "cup" de deux éléments de $H^1(k)$.

Soit maintenant k un corps de dimension cohomologique virtuelle au plus 2, c'est-à-dire $vcd(k) := cd(k(\sqrt{-1})) \leq 2$ et soit $\Omega(k)$ l'ensemble de ses ordres, on notera k_v la clôture réelle de k en $v \in \Omega$, et G_{k_v} le groupe de Galois absolu de k_v, cyclique d'ordre deux.

Théorème 3. *Avec les notations du Théorème 2, mais avec $vcd(k) \leq 2$, on a :*

$$2 \otimes q_L \simeq_G 2 \otimes q_{L'}$$

si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$(x_L, -1) = (x_{L'}, -1) \forall x \in H^1(G)$$

$$\sigma(L_v) = \sigma(L'_v) \forall v \in \Omega(k)$$

où σ est l'application qui associe à chaque G-algèbre galoisienne $L_v := L \otimes_k k_v$ sur k_v la classe de conjugaison du morphisme correspondant ϕ_{L_v}

Puisque G_{k_v}, est cyclique d'ordre 2, la classe de conjugaison de cet homomorphisme est identifiée par la classe de conjugaison de l'image de son élément non trivial par ϕ_{L_v}, c'est-à-dire par une classe de conjugaison dans G ; on va donc appeller $\sigma(L_v)$ cette classe.

Corollaire 2. *Avec les notations du Théorème 2 on a :*

$$4 \otimes q_L \simeq_G 4 \otimes q_{L'}$$

Les preuves de ces résultats, qui généralisent un théorème analogue démontré par Bayer-Fluckiger et Morales, [3], pour les corps de nombres, utilisent des résultats récents sur la cohomologie galoisienne des groupes algébriques linéaires ([5], [6], [8] et [9]).

Bibliographie

[1] *E. Bayer-Fluckiger*, Galois cohomology and the trace form, Jahresber. DMV **96** (1994), 35-55.

[2] *E. Bayer-Fluckiger and H. W. Lenstra*, Forms in odd degree extensions and self dual normal bases, Amer. J. Math. **112** (1990), 359-373.

[3] *E. Bayer-Fluckiger and J. Morales*, Multiples of trace forms in number fields, AMS Proc. Symposia Pure Math., **58.2** (1995) 73-81.

[4] *E. Bayer-Fluckiger and M. Monsurro*, Multiples of Trace forms, à parai tre dans S. Petersburg Mathematical Journal.

[5] *E. Bayer-Fluckiger and R. Parimala*, Galois cohomology of linear algebraic groups over fields of cohomological dimension ¡ 2, Invent. Math., **122** (1995) 195-229.

[6] *E. Bayer-Fluckiger and R. Parimala*, Classical groups and the Hasse principle, à paraitre dans Ann. of Math..

[7] *E. Bayer-Fluckiger and J.-P. Serre*, Torsions quadratiques et bases normales autoduales, Amer. J. Math. **116** (1994) 1-64.

[8] *C. Scheiderer*, Hasse principles and approximation theorems for homogeneous spaces of virtual cohomological dimension one, Invent. Math. **125** (1996), 307-365.

[9] *C. Scheiderer*, Classification of hermitian forms and semisimple groups over fields of virtual cohomological dimension one, Manuscr. Math. **89** (1996), 373-394.

Université de Franche-Comté
16, route de Gray, 25030 Besançon Cedex, FRANCE
monsurro©univ-fcomte.fr