Classification des objets injectifs dans certaines catégories de K-modules instables sur l'algèbre de Steenrod

Dagmar M. Meyer

L'objet principal de cet exposé est de décrire les objets injectifs de la catégorie, notée $K-\mathcal{U}$, des K-$\mathcal{A}$-modules instables, $\mathcal{A}$ désignant l'algèbre de Steenrod modulo un nombre premier fixé p et K une algèbre instable noëthérienne. Tous les résultats présentés ici se trouvent dans [6].

Tout d'abord, rappelons la définition de l'algèbre de Steenrod. On considère l'algèbre graduée associative unitaire librement engendrée sur $\mathbb{F}_p$ par les symboles Sq^i de degré i quand $p = 2$, et par les symboles P^i de degré $2i(p-1)$ et β de degré 1 quand $p > 2$, o'u $i = 1, 2, \ldots$. Pour $i = 0$ on définit également $Sq^0 := 1$, respectivement $\mathrm{P}^0 := 1$. L'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}$ est le quotient de cette algèbre par l'idéal engendré par les relations suivantes (dites de Adem) :

$$\text{pour } p=2: \quad Sq^iSq^j \sim \sum_{k=0}^{[i/2]} \binom{j-k-1}{i-2k} Sq^{i+j-k}Sq^k \qquad \text{quand } 0<i<2j$$

$$\text{pour } p>2: \quad \beta^2 \sim 0$$

$$\mathrm{P}^i\mathrm{P}^j \sim \sum_{k=0}^{[i/p]} (-1)^{i+k} \binom{(p-1)(j-k)-1}{i-pk} \mathrm{P}^{i+j-k}\mathrm{P}^k \qquad \text{quand } 0<i<pj$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^i\beta\mathrm{P}^j \sim & \sum_{k=0}^{[i/p]} (-1)^{i+k} \binom{(p-1)(j-k)}{i-pk} \beta\mathrm{P}^{i+j-k}\mathrm{P}^k \\ & - \sum_{k=0}^{[(i-1)/p]} (-1)^{i+k-1} \binom{(p-1)(j-k)-1}{i-pk-1} \mathrm{P}^{i+j-k}\beta\mathrm{P}^k \qquad (\text{quand } 0<i<pj+1)\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant définir les objets que nous allons étudier :

Définition 1. *Un $\mathcal{A}$-module M à gauche est dit instable si, pour tout s dans M, on a $Sq^ix = 0$ quand $i > |x|$ (pour $p = 2$) et $\beta^e\mathrm{P}^ix = 0$ quand $2i + e > |x|$, $e \in \{0, 1\}$ (pour $p > 2$), conditions où $|x|$ désigne le degré de x. On désignera par $\mathcal{U}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathcal{A}$-modules instables et les morphismes sont les applications $\mathcal{A}$-linéaires de degré zéro.*

Une $\mathcal{A}$-algèbre instable est la donnée d'un module $K \in \mathcal{U}$ et d'applications $\mathcal{A}$-linéaires $\mu : K \otimes K \to K$ et $\eta : \mathbb{F}_p \to K$ qui font de K une $\mathbb{F}_p$-algèbre graduée associative commutative unitaire et telles que $Sq^{|x|}x = x^2$ (quand $p = 2$) resp. $P^{|x|/2}x = x^p$ si $|x|$ est pair (quand $p > 2$). Les $\mathcal{A}$-algèbres instables sont les objets d'une catégorie notée $\mathcal{K}$.

La condition d'instabilité pour $M \in \mathcal{U}$ entraîne en particulier $M^n = 0$ pour $n < 0$. La cohomologie modulo p d'un espace, $H^*(X;\mathbb{F}_p)$, est un objet dans $\mathcal{U}$. Muni du produit $\cup$ c'est aussi une algèbre instable, et cet exemple est à l'origine des définitions ci-dessus. Par la suite nous écrirons H^*X pour $H^*(X;\mathbb{F}_p)$.

Nous nous intéressons à des K-$\mathcal{A}$-modules instables, où $K \in \mathcal{K}$:

Définition 2. *Un K-$\mathcal{A}$-module instable est un module $M \in \mathcal{U}$ avec une application $\sigma : K \otimes M \to M$ qui est $\mathcal{A}$-linéaire. On désigne par $K - \mathcal{U}$ la catégorie dont les objets sont les K-$\mathcal{A}$-modules instables et dont les morphismes sont les $\mathcal{U}$-morphismes qui sont K-linéaires.*

Notons que si $K = \mathbb{F}_p$, la catégorie $K - \mathcal{U}$ coïncide avec $\mathcal{U}$.

L'int'erêt des catégories $K-\mathcal{U}$ tient à l'observation suivante : Soit G un groupe topologique et X un G-espace. La projection $EG \times_G X \to EG \times_G \{pt\} \simeq BG$ de la construction de Borel sur l'espace classifiant de G induit en cohomologie une application $H * BG \to H * (EG \times_G X) =: H*_G$ qui fait de la cohomologie équivariante $H *_G X$ de X un $H * BG - \mathcal{A}$-module instable.

Les catégories $K-\mathcal{U}$ sont des catégories abéliennes ayant assez d'objets injectifs, donc on peut employer l'algèbre homologique pour les étudier. Tandis qu'il est facile de décrire (au moins d'une façon abstraite) les objets projectifs dans $K-\mathcal{U}$, ce n'est pas le cas pour les injectifs. Nous allons donner ici la classification des objets injectifs dans $K - \mathcal{U}$ dans le cas où K est noëthérienne (en tant que $\mathbb{F}_p$-algèbre).

Rappelons que pour $\mathcal{U}$, une telle classification a été donnée par J. Lannes et L. Schwartz [5] en utilisant des résultat de H. Miller [7], du premier auteur et de S. Zarati [3] (Miller a démontré la $\mathcal{U}$-injectivité de $H^*B\mathbb{Z}/p$ qui joue un rôle essentiel dans sa solution de la conjecture de Sullivan). Dans le cas où $K = H^*BV$ (ici $V \cong (\mathbb{Z}/p)^{\otimes m}$ est un p-groupe abélien élémentaire) il existe aussi une classification des $K - \mathcal{U}$-injectifs qui est due à J. Lannes et S. Zarati [4]. - Par la suite nous écrirons H^*V pour H^*BV.

Afin de pouvoir énoncer le résultat dans le cas général il nous faut encore introduire quelques d'efinitions :

Définition 3. *Nous désignons par $\mathcal{L}$ un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des facteurs directs indécomposables de H^*V, o'u $V \cong (\mathbb{Z}/p)^{\otimes m}$ et $m \geq 0$.*

L'ensemble $\mathcal{L}$ a été introduit dans [3], il joue déjà un rôle important dans la classification des objets $\mathcal{U}$-injectifs.

Rappelons que dans le cas classique des modules sur un anneau commutatif R il y a une bijection entre idéaux premiers de R et objets injectifs indécomposables dans R-$\mathfrak{mod}$ (à isomorphisme près). Dans le cas présent les idéaux de K interviennent également dans la classification :

Définition 4. *Un idéal de K est dit invariant s'il est invariant relativement à l'action de $Sq^i, i \geq 0$ (quand $p = 2$) ou $\mathrm{P}^i, i \geq 0$ (quand $p > 2$). Nous désignons par $\mathcal{J}_K$ l'ensemble des idéaux premiers invariants de K.*

Les idéaux premiers invariant de K peuvent être décrits d'une autre faqn : soit $S(K)$ la catégorie dont les objets sont les paires (V, φ) o'u V est un p-groupe abélien élémentaire et $\varphi : K \to H * V \in \mathcal{K}$. Un morphisme $\alpha : (V, \varphi) \to (W, \psi)$ est un homomorphisme $\alpha : V \to W$ tel que $\alpha^* \circ \psi = \varphi$. Nous considérons $\mathcal{R}(K)$, la sous-catégorie pleine de $S(K)$ dont les objets sont tous les (V, φ) tel que H^*V est de type fini comme $\mathcal{K}$-module. Il en résulte que dans $\mathcal{R}(K)$ tous les endomorphismes sont des automorphismes. Le groupe des automorphismes $Aut_{\mathcal{R}(K)}((V, \varphi))$ est appelé $\mathrm{Gal}((V, \varphi))$ pour des raisons évidentes.

Lemme 1. *([1, Cor. 2.4]) L'application $(V, \varphi) \to \sqrt{ker\varphi}$ induit une bijection entre les classes d'isomorphisme dans $\mathcal{R}(K)$ et les éléments de $\mathcal{J}_K$.*

Il est conséquence de l'exactitude du foncteur T (introduit par J. Lannes [2]) que l'objet $H^*V(\varphi)$ est injectif dans $K - \mathcal{U}$ (la notation $H^*V(\varphi)$ signifie que H^*V est un K-module via φ). Mais normalement, ce $K - \mathcal{U}$-objet n'est pas indécomposable. Il faut donc étudier l'anneau des endomorphismes $\mathrm{End}_{K-\mathcal{U}}(H^*V(\varphi))$:

Lemme 2. *L'application $\mathbb{F}_p[\mathrm{End}_{S(K)}((V, \varphi))]^{op} \to \mathrm{End}_{K-\mathcal{U}}(H^*V(\varphi))$ qui est déterminée par $f \to f*$ pour $f \in \mathrm{End}_{S(K)}((V, \varphi))$, est une bijection d'anneaux. En particulier, si $(V, \varphi) \in \mathcal{R}(K)$ on a une bijection*

$$\mathbb{F}_p[\mathrm{Gal}((V, \varphi))]^{op} \to \mathrm{End}_{K-\mathcal{U}}(H * V(\varphi)).$$

Donc, on peut réduire le problème de la décomposition de $H^*V(\varphi)$ à un problème de la théorie des représentations modulaires.

Nous donnons encore une définition. Soit $a \in \mathcal{J}_K$ représenté par l'objet $(V, \varphi) \in \mathcal{R}(K)$.

Définition 5. *Nous désignons par P_a un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des facteurs directs indécomposables de $\mathbb{F}_p[\mathrm{Gal}((V, \varphi))]$. Si P est un élément de $\mathcal{P}_a$, soit ϵ_P l'idempotent primitif associé.*

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre résultat principal. Soit

$$\Omega_K := \{\omega = (L, n, a, P) | L \in \mathcal{L}, n \in \mathbb{N}, a \in \mathcal{J}_K, P \in \mathcal{P}_a$$

Pour chaque $\omega = (L, n, a, P) \in \Omega_K$ nous définissons l'objet $K - \mathcal{U}$-injectif suivant :

$$E_K(\omega) := E_{K-\mathcal{U}}(L \otimes \sum^n \epsilon_P H^*V(\varphi))$$

Ici la notation $E_{K-\mathcal{U}}(\_)$ désigne l'enveloppe injective dans la catégorie $K - \mathcal{U}$.

Théorème 1. *Soit $K \in \mathcal{K}$ noëthérienne, I K - $\mathcal{U}$-injectif. Alors il existe une unique famille de cardinaux $\{a_\omega\}_{\omega \in \Omega_K}$ telle que*

$$I \cong \bigotimes_{\omega \in \Omega_K} E_K(\omega)^{\otimes a_\omega}.$$

Cette description des objets injectifs indécomposables est très abstraite et en général il n'est pas facile de décrire des objets $E_K(\omega)$ en termes plus concrets. Cependant on a le résultat suivant :

Théorème 2. *Si K est noëthérienne, l'objet $L \otimes E_{K-\mathcal{U}}(\sum^n \epsilon_P H^* V(\varphi)) \in K - U$ est injectif et $E_K(\omega) \cong L \otimes E_{K-\mathcal{U}}(\sum^n \epsilon_P H^* V(\varphi))$.*

Les objets $E_K(\omega) = E_{K-\mathcal{U}}(L \otimes \sum^n \epsilon_P H^* V(\varphi))$ sont de type fini comme K-module si et seulement si $L = \mathbb{F}_p$. Par conséquent, Théorème 2 implique que pour connaître les injectifs indécomposables de $K - \mathcal{U}$ il suffit identifier ceux qui sont finitement engendrés sur K.

Exemples : Quand $K = H^*BG$ avec G un groupe fini ayant "peu" de p-sousgroupes abéliens élémentaires, il est souvent possible d'ecrire tous les objets injectifs indécomposables de $K - \mathcal{U}$ en termes plus ou moins concrets (par exemple pour $p = 2$, $G = D_{2^m}$, Q_{2^m}, $\sum_4, \ldots$). C'est le cas aussi pour $K = D(m)$, l'algèbre de Dickson polynomiale.

Bibliographie

[1] *H.-W. Henn*, Commutative algebra of unstable K-modules, Lannes' T-functor and equivariant mod-p cohomology, *J. Reine Angew. Math.* **478** (1996), 189-215.

[2] *J. Lannes*, Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire (avec un appendice par Michel Zisman), *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. 75 (1992), 135-244

[3] *J. Lannes, S. Zarati*, Sur les $\mathcal{U}$-injectifs, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **19** (1986), no.2, 303-333.

[4] *J. Lannes, S. Zarati*, Théorie de Smith algébrique et classification des $H^*V-\mathcal{U}$-injectifs, *Bull. Soc. Math. France* **123** (1995), no.2, 189-223.

[5] *J. Lannes, L. Schwartz*, Sur la structure des $\mathcal{A}$-modules instables injectifs, *Topology* **28** (1989), 153 - 169.

[6] *D. M. Meyer*, Injective objects in categories of unstable K-modules, *Bonner Mathematische Schriften.* **316** (1999).

[7] *H. Miller*, The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces, *Ann. of Math. (2)* **120** (1984), no.1, 39-87 ; Corrigendum Ann. of Math. (2) 121 (1985) , no.3, 605-609.

Université Paris 13
Institut Galilée
Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications
UMR 7539
Av. Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse FRANCE

e-mail : dagmar@math.univ-parisl3.fr