Unicité des solutions "mild" des équations de Navier-Stokes dans $L^3(\mathbb{R}^3)$

Giulia Furioli

Les équations de Navier-Stokes dans le cas d'un fluide visqueux, incompressible, homogène qui remplit tout l'espace, sont données en l'absence de forces extérieures (et en prenant les constantes de viscosité et de densité égales à 1) par le système :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \\ \partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \vec{\nabla}p \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

où $\vec{u}(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est le vecteur vitesse et $p(t,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est la pression.

Pour clarifier les notations :

- $(\Delta\vec{u})_i = \Delta u_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}$
- $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}) = \sum_{j=1}^3 u_j\partial_j$ d'où $\left[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right]_i = (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})u_i = u_1\partial_1 u_i + u_2\partial_2 u_i + u_3\partial_3 u_i$
- $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3$

Le système de Navier-Stokes ainsi défini donne des solutions classiques et l'existence pour un petit intervalle de temps d'une telle solution a été prouvée au début du siècle. Quant aux solutions globales, on a des résultats seulement si on considère le problème au sens faible. On préfère alors une formulation différente des équations, qui prend un sens sur une classe plus large d'espaces fonctionnels :

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \\ \partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - \vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\otimes\vec{u}) - \vec{\nabla}p \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

Si $\vec{u}$ est suffisamment régulière, $\vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\otimes\vec{u}) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{u})\vec{u}$ et si $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$ alors $V.(u®ii) = (u.V)u$.

Dans la suite, nous écrirons toujours X à la place de $X \times X \times X \equiv X^3$, par souci de brièveté.

Définition. *Soit* $T \in]0,+\infty]$. *Une solution faible sur* $]0,T[$ *des équations de Navier-Stokes est un champ de vecteurs* $\vec{u}(t,x) \in L^2_{loc}(]0,T[\times\mathbb{R}^3)$ *tel que* $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$ *et tel qu'il existe* $p \in \mathcal{D}'$ *vérifiant* $\partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - \vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\otimes\vec{u}) - \vec{\nabla}p$ *dans* $\mathcal{D}'(]0,T[\times\mathbb{R}^3)$.

C'est une définition qui permet beaucoup de liberté dans le choix des espaces fonctionnels où situer plus particulièrement le problème.

On peut projeter les équations sur les champs des vecteurs à divergence nulle. On introduit à cette fin l'opérateur matriciel $\mathbb{P}$ défini formellement par :

$$\mathbb{P}\vec{f} = (Id - \vec{\nabla}\frac{1}{\Delta}\vec{\nabla}\cdot)\vec{f} = (Id + \vec{R} \otimes \vec{R})\vec{f}$$

où $\vec{R}$ est le vecteur des transformées de Riesz définies en Fourier par le multiplicateur $\widehat{R_j f}(\xi) = i\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{f}(\xi)$ (voir aussi [1] et [5]).

Comme $\vec{u}$ est à divergence nulle, les équations prennent la forme :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \partial_t \vec{u} = \Delta\vec{u} - \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

où le terme de pression a disparu car c'était un gradient.

Voici une dernière formulation des équations, cette fois-ci intégrale :

$$\begin{cases} \vec{u}(t) = e^{t\Delta}\vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})(s)ds \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0 \end{cases}$$

L'opérateur $e^{t\Delta}$ est le semigroupe de la chaleur, donné par la convolution suivante :

$$e^{t\Delta}\vec{u}_0(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{|\cdot|^2}{4t}} * \vec{u}_0(x)$$

et qui fournit la solution de l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta\vec{u} \\ \vec{u}(0, x) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

Historiquement, les équations de Navier-Stokes ont été étudiées sous les trois formes que nous avons présentées. Il nous a paru intéressant d'établir tout d'abord dans quel cadre fonctionnel elles sont effectivement équivalentes.

Le résultat que nous avons obtenu est assez général. Nous introduisons l'espace des fonctions uniformément localement dans L^2 et nulles à l'infini

$$\mathrm{E}_2 = \left\{ f \in L^2_{loc} : sup \int_{\mathcal{B}(x,1)} |f(y)|^2 dy < \infty \text{ et } lim_{|x| \to \infty} \int_{\mathcal{B}(x,1)} |f(y)|^2 dy = 0 \right\}$$

(Exemple : $\forall p \geq 2 \mathrm{L}^P \subset \mathrm{E}_2$).

Proposition. *(Furioli-Lemarié-Terraneo, 1997). Soit $\vec{u}(t) \in \mathrm{L}^2(]0, T[, \mathrm{E}_2)$. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $\vec{u}$ est une solution faible des équations de Navier-Stokes ;

ii) $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ *et* $\partial_t \vec{u} - \mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})$ *;*

iii) *il existe* $\vec{u}_0 \in S'$ *telle que* $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ *et* $\vec{u}(t) = e^{t\Delta}\vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})(s)ds$.

Corollaire. *Si* $p \geq 2$, $T \in]0, +\infty[$ *et si* $\vec{u}(t) \in \mathrm{L}^2(]0, T[, \mathrm{L}^P)$ *alors les trois assertions précédentes sont équivalentes.*

C'est dans ce cadre que nous allons travailler.

Les travaux sur les équations de Navier-Stokes du point de vue des solutions faibles débutent en 1933-34 par l'oeuvre de Jean Leray [3]. A une époque où la théorie des distributions n'était pas encore formalisée il démontre le théorème suivant :

Théorème. *Théorème (Leray, 1933).*

Pour tout $\vec{u}_0 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$ *il existe* $\vec{u}(t) \in \mathrm{L}^\infty(]0, +\infty[, \mathrm{L}^2) \cap \mathrm{L}^2(]0, +\infty[, \dot{H}^1)$ *solution des équations de Navier-Stokes telle que* $\vec{u}(0) = \vec{u}_0$ *dans* $\mathcal{D}'$ *et telle que*

$$\|\vec{u}(t)\|^2_{\mathrm{L}^2} + 2\int_0^t \|\vec{\nabla} \cdot \vec{u}(s)\|^2_{\mathrm{L}^2} ds \leq \|\|^2_{\mathrm{L}^2} \forall t \in]0, +\infty[.$$

Le problème de son unicité reste ouvert encore aujourd'hui.

La technique utilisée par Leray consiste à résoudre une suite de problèmes approchés et de passer à la limite faible sur les solutions grâce à des estimations uniformes d'énergie. Le passage à la limite faible fait cependant perdre l'unicité.

Si on passe de $p = 2$ à $p > 2$, la méthode utilisée pour montrer l'existence de solutions faibles dans $\mathrm{L}^\infty([0, T[, \mathrm{L}^p)$ change.

Les premiers travaux dans cette directions sont dus à Tosio Kato [2] ; il prend en considération des solutions "mild", c'est-à-dire continues en temps.

Définition. . *Une solution "mild" dans* L^p *des équations de Navier-Stokes est une solution faible telle que* $\vec{u}(t) \in \mathcal{C}([0, T[, \mathrm{L}^p)$.

Voici le théorème qu'il démontre.

Théorème. *(Kato, 1984).* $\forall p > 3, \forall \vec{u}_0 \in \mathrm{L}^p$ *telle que* $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0 \exists ! \vec{u}(t) \in \mathcal{C}([0, T[, \mathrm{L}^p)$ *solution "mild" des équations de Navier-Stokes .*

Pour $p = 3$ *il existe* $\delta_0 > 0$ *tel que* $\forall \vec{u}_0 \in \mathrm{L}^3$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ *et* $\|\vec{u}_0\|_{\mathrm{L}^3} < \delta_0$ *il existe* $\vec{u}(t) \in \mathcal{C}([0, +\infty[, \mathrm{L}^3)$ *solution "mild" des équations de Navier-Stokes qui est unique dans l'espace :*

$$E = \left\{ \vec{u}ES' : \vec{u}(t) \in \mathrm{L}^\infty([0, +\infty[, \mathrm{L}^3), \sup_{t \geq 0} \sqrt{t}\|\vec{u}(t)\|_{\mathrm{L}^\infty} < +\infty, \lim_{t \to 0} \sqrt{t}\|\vec{u}(t)\|_{\mathrm{L}^\infty} = 0 \right\}.$$

On remarque tout d'abord la différence entre les cas $p > 3$ et $p = 3$. Dans le premier cas, l'unicité est prouvée dans l'espace $\mathcal{C}([0, T[, \mathrm{L}^p)$, dans le deuxième elle l'est seulement dans un sous-espace de celui-ci. La méthode utilisée est celle du point fixe. On considère la formulation intégrale des équations, qu'on peut écrire :

$$\vec{u}(t) = \vec{U}_0(t) + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$$

où B est un opérateur bilinéaire.

Il s'agit de considérer la transformation $F(\vec{u}) = \vec{U}_0 + B(\vec{u}, \vec{u})(t)$ et de démontrer qu'elle est une contraction d'une boule $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}([0,T[, \mathrm{L}^p)$ voisinage de $\vec{U}_0 = e^{t\Delta}\vec{U}_0$. Cela revient à prouver la bicontinuité de l'opérateur B de $\mathcal{C}([0,T[, \mathrm{L}^p) \times \mathcal{C}([0,T[, \mathrm{L}^p) \to \mathcal{C}([0,T[, \mathrm{L}^p)$. Pour $p > 3$ c'est une simple application des inégalités de Young et de Holder, qui donnent :

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} ds \right\|_{\mathrm{L}^p} &\leq \left(\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{\frac{3}{2p}+\frac{1}{2}}} \right) \sup_{[0,T]} \|\vec{u}\|_{\mathrm{L}^p} \sup_{[0,T]} \|\vec{v}\|_{L^p} \\
&\leq \mathcal{C}_p T^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}} \sup_{[0,T]} \|\vec{u}\|_{\mathrm{L}^p} \sup_{[0,T]} \|\vec{v}\|_{\mathrm{L}^p}
\end{aligned}$$

Pour $p = 3$ le procédé échoue car on arrive à $\int_0^t \frac{1}{t-s} ds$ qui diverge.

Cependant on remarque que le terme $\vec{U}_0$ appartient à un espace plus précis que $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathrm{L}^3)$ et notamment à l'espace E de l'énoncé de Kato. On peut donc démontrer la contractivité de F dans cet espace car B y est bicontinu. L'unicité de la solution trouvée n'est pourtant prouvée que dans ce sous-espace.

Nous avons alors montré le théorème suivant :

Théorème. *(Furioli-Lemarié-Terraneo, 1997). Soient $\vec{u}(t) \in \mathcal{C}([0,T[, \mathrm{L}^3), \vec{v}(t) \in \mathcal{C}([0,T'[, \mathrm{L}^3)$ telles que :*

- *$\vec{u}$ est solution "mild" de Navier-Stokes sur $[0,T[$;*
- *$\vec{v}$ est solution "mild" de Navier-Stokes sur $[0,T'[$;*
- *$\vec{u}|_0 = \vec{v}|_0 = \vec{u}_0$.*

Alors $\vec{u} = \vec{v}$ sur $[0, \inf(T,T')[$.

Il existe à présent plusieurs preuves de ce résultat. Nous allons donner quelques idées de la preuve originale. Nous renvoyons à [2] pour plus de détails.

On veut montrer que toutes les solutions coïncident avec la solution à la Kato. Mettons-nous d'abord dans le cas où $\|\vec{u}_0\|_{\mathrm{L}^3} < \delta_0$, où on sait que la solution de Kato est globale et de plus vérifie que $\sup_{t>o} \|\vec{u}(t)\|_{\mathrm{L}^3} < \|\vec{u}_0\|_{\mathrm{L}^3}$

On commence par poser $t_0 = \sup\{t \geq 0 \vec{u}(s) = \vec{v}(s)$ dans L^3, $\forall s \in [0,t[\}$. Cet ensemble n'est pas vide car $\vec{u}(0) = \vec{v}(0)$.

Soit par l'absurde $to < T$ (temps maximal de vie de $\vec{v}$). Comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont continues, $\vec{u}(t_0) = \vec{v}(t_0)$.

On écrit $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = e^{t\Delta}\vec{u}_0 + B(\vec{u},\vec{u}) - e^{t\Delta}\vec{v}_0 - B(\vec{v},\vec{v}) = B(\vec{u}-\vec{v},\vec{u}) + B(\vec{v},\vec{u}-\vec{v}) = B(\vec{w},\vec{u}) + B(\vec{v},\vec{w})$. On a $\|\vec{w}\|_{\mathrm{L}^3} = 0$ sur $[0,t_0]$.

Il a été démontré par F.Oru ([6]) que B n'est pas bicontinu dans $[\mathrm{L}^\infty([0,T[, \mathrm{L}^3)]^2$. Cependant on se pose la question suivante : existe-t-il un espace $X \to S'$ tel que :

a) $\vec{w}(s) \in \mathrm{L}^\infty([0,T[,X) si \vec{w} = B(\vec{u},\vec{u}), \vec{u} \in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{L}^3)$;

b) B est bicontinu sur $\mathrm{L}^\infty([0,T[,X) \otimes \mathrm{L}^\infty([0,T[,\mathrm{L}^3) \to \mathrm{L}^\infty([0,T[,X)$?

On remarque que X ne contient pas forcément L^3 ; il suffit que $\forall s \in [0,T[\vec{w}(s)$ soit dans X même si $\vec{u}(s), \vec{v}(s)$ n'y sont pas.

Supposons que cela soit vérifié. Alors on obtient :

$$\|\vec{w}\|_X \leq \mathcal{C} \sup_{[0,T]} \|\vec{w}(s)\|_X (\sup_{[0,T]} \|\vec{u}(s)\|_{\mathrm{L}^3} + \sup_{[0,T]} \|\vec{v}(s)\|_{\mathrm{L}^3})$$

d'où :

$$\|\vec{w}\|_X \leq \mathcal{C} \sup_{[0,T]} \|\vec{w}(s)\|_X (\sup_{[0,T]} \|\vec{v}(s) - \vec{u}(s)\|_{\mathrm{L}^3} + 2 \sup_{[0,T]} \|\vec{u}(s)\|_{\mathrm{L}^3})$$

$\vec{u}$ est la solution à la Kato, donc :

- $\sup_{[o,+\infty[} \|\vec{u}(s)\|_{\mathrm{L}^3} \leq \|\vec{u}_0\|_{\mathrm{L}^3} < \delta_0$
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont continues et coïncident jusqu'à t_0, donc $\forall \varepsilon > 0, \exists t_1 \in]t_0, T[$ tel que $\sup_{[t_0,t_1[} \|\vec{u}(s) - \vec{v}(s)\|_{\mathrm{L}^3} < \varepsilon$.

Il suffit de choisir $\delta_0 < \frac{1}{4C}$ et t_1 tel que $\sup_{[0,t_1[} \|\vec{u}(s) - \vec{v}(s)\|_{\mathrm{L}^3} < \frac{1}{4C}$ pour que $\sup_{[t_0,t_1[} \|\vec{w}(s)\|_X \leq \frac{3}{4} \sup_{[t_0,t_1[} \|\vec{w}(s)\|_X$ d'où $\|\vec{w}(s)\|_X \equiv 0$ sur $[0,t_1[$ et donc $\vec{w}(s) \equiv 0$ dans *S'*. Mais $\vec{w}(s) \in \mathrm{L}^3$ donc $\vec{w}(s) \equiv 0$ dans L^3, ce qui est absurde.

L'espace qui convient est un espace de Besov. C'est un espace de distributions tempérées dont on contrôle uniformément la taille en norme L^p des morceaux supportés en Fourier sur des couronnes dyadiques, et cela permet d'évaluer la norme de l'intégrale sans passer d'emblée à l'intégrale de la norme mais en faisant une estimation plus fine sur les blocs de fréquences.

Bibliographie

[1] *M. Cannone*, "Ondelettes, Paraproduits et Navier-Stokes" Diderot Editeur (1995).

[2] *G. Furioli, P.G. Lemarié-Rieusset et E. Terraneo*, Unicité dans $\mathrm{L}^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces fonctionnels limites pour Navier-Stokes , Prépublication 85 de l'Université d'Evry (1998).

[3] *T. Kato*, Strong LP solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$ with applications to weak solutions. Math. Zeit. **187**, pp. 471-480 (1984).

[4] *.J. Leray*, Sur le mouvement d'un liquide visqueux remplissant l'espace. Acta Math., **63**, pp. 193-248 (1934).

[5] *Y. Meyer*, "Wavelets, paraproducts and Navier-Stokes equations", à paraître comme Memoir of the AMS.

[6] *F. Oru*, Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1998.

Equipe d'Analyse et Probabilités
Université d'Evry-Val-d'Essonne
bd. F. Mitterrand, 91025 EVRY CEDEX, FRANCE
furioli@lami.univ-evry.fr