Zéros des polynômes aléatoires à coefficients gaussiens complexes.

Frédérique Bienvenüe-Duheille

Nous étudions dans cet article les zéros des polynômes ou séries entières à coefficients gaussiens complexes $P(z) = \sum_{n=0}^{d} a_n z^n$ où a_n est une suite de variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées et d est un entier, éventuellement infini. Plus précisément, pour tout domaine D simplement connexe et borné de $\mathbf{C}$, nous calculons explicitement le nombre moyen de zéros de P dans D et la variance de cette quantité. Si $d = +\infty$, il faut naturellement se restreindre aux domaines D relativement compacts dans le disque de convergence de la série.

Le nombre moyen de zéros réels d'un polynôme à coefficients gaussiens réels a été étudié tout d'abord par M. Kac [5] qui a obtenu l'existence d'une densité moyenne de zéros, ainsi que le comportement limite du nombre de zéros réels lorsque les coefficients sont centrés réduits et indépendants. Ce résultat, qui se traduit par le fait qu'un polynôme aléatoire de degré d à coefficients réels centrés possède en moyenne environ $(2/\pi)\ln d$ zéros réels lorsque d tend vers $+\infty$, a été étendu notamment par I. Ibragimov et I. Maslova [3] à certains polynômes à coefficients réels aléatoires identiquement distribués, mais non nécessairement gaussiens.

L. Shepp et R. Vanderbei [6] puis I. Ibragimov et O. Zeitouni [4] se sont intéressés à l'existence d'une densité moyenne de zéros complexes sur $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ d'un polynôme à coefficients réels et à son comportement limite.

L'expression du nombre moyen de zéros (complexes) d'un polynôme à coefficients gaussiens complexes a été obtenue par A. Edelman et E. Kostlan [1]. Par une technique différente, nous retrouvons ce résultat et nous calculons la variance de cette quantité, ce qui est impossible avec la méthode employée par A. Edelman et E. Kostlan. A l'aide de l'expression obtenue, nous montrons également que le nombre de zéros, dans un domaine dont la fermeture est inclus dans le disque de convergence, de la suite des sommes partielles d'une série entière à coefficients aléatoires gaussiens converge au sens de la norme L^2 vers le nombre de zéros de la série entière.

1. Espérance du nombre de zéros de P dans un domaine

Dans toute la suite, nous considérons un polynôme P à coefficients aléatoires complexes gaussiens et indépendants

$$P(z) = \sum_{n=0}^{d} a_n z^n,$$

où $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, α_n et β_n sont des variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées et de variance σ_n^2, et nous étudions les zéros de P dans un domaine D simplement connexe et borné. Les résultats obtenus sont également valables dans le cas où P est une série entière ($d = +\infty$) lorsque la fermeture de D est de plus incluse dans le disque de convergence de P (dont le rayon est presque sûrement constant).

Nous notons *N(D)* le nombre de zéros de P dans D et pour tout nombre entier i et pour tout nombre réel r positif,

$$A_i(r) = \sum_{n=0}^{d} n^i \sigma_n^2 r^{2n},$$

Remarquons tout d'abord que, pour tout domaine *D*, la probabilité que P admette un zéro sur ∂D est nulle. Nous pouvons par conséquent utiliser le théorème de Rouché et nous obtenons :

$$N(D) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$$

Calculer $\mathbf{E}N(D)$ revient donc à calculer $\mathbf{E}(P'/P)$.

Lemme 1. *Pour tout nombre complexe z, on a :*

$$\mathbf{E}\left(\frac{zP'(z)}{P(z)}\right) = \frac{A_1(|z|)}{A_0(|z|)}.$$

Preuve:. *Notons* $P(z) = X_1 + iX_2 etzP'(z) = Y_1 + iY_2$. *Le vecteur* (X_1, X_2, Y_1, Y_2) *est gaussien centré de matrice de covariance* C *où*

$$C = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & A_0 & 0 & A_1 \\ A_1 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Considérons une matrice L triangulaire inférieure telle que $LL^t = C$. *On aura alors :*

$$(X_1, X_2, Y_1, Y_2)^t \stackrel{loi}{=} L(\xi 1, \xi 2, \xi 6, \xi 4)^t$$

où $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ *désignent des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites et indépendantes. Le calcul explicite de L permet d'obtenir :*

$$\mathbf{E}\left(\frac{zP'(z)}{P(z)}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{A_1(\xi_1 + i\xi_2) + \sqrt{A_2 A_0 - A_1^2}(\xi_3 + i\xi_4)}{A_0(\xi_1 + i\xi_2)}\right) = \frac{A_1}{A_0}$$

Une conséquence immédiate du lemme 1 est le résultat suivant, déjà obtenu par A. Edelman et E. Kostlan [1] :

Théorème 1. *Pour un domaine D de C, on a :*

$$\boldsymbol{E}N(D) = \int_{\partial D} \frac{A_1(z)}{A_0(z)} \frac{dz}{2i\pi z}$$

En particulier, si D_r désigne le disque de rayon $r > 0$ et de centre 0, nous obtenons

$$\boldsymbol{E}N(D_r) = \frac{A_1(r)}{A_0(r)}$$

Remarque. Le théorème 1 implique l'existence d'une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$) du nombre moyen de zéros d'un polynôme à coeffi-cients complexes gaussiens.

2. Variance de $\boldsymbol{N(D)}$ On calcule de façon similaire l'espérance de $N(D)^2$, pour un domaine D vérifiant les mêmes conditions qu'en 1). Il faut cette fois-ci évaluer l'espérance de

$$\frac{P'(z_1)}{P(z_1)} \frac{P'(z_2)}{P(z_2)}$$

Notons pour tout entier i positif, et $j = 1$ ou 2, $A_{ij}(z_1, z_2) = A_i(z_j)$ et

$$B_i(z_1, z_2) = \sum_{n=0}^{d} n^i \sigma_n^2 z_1^n \overline{z}_2^n.$$

Lemme 2. *On a*

$$E\left(\frac{z_1 P'(z_1)}{P(z_1)} \frac{z_1 P'(z_2)}{P(z_2)}\right) = \frac{A_{11}A_{12} + |B_1|^2 - B_0\overline{B_1}A_{11}/A_{01} - B_1\overline{B_0}A_{12}/A_{02}}{(A_{01}A_{02} - |B_0|^2)z_1 z_2}(z_1, z_2).$$

Preuve: 1. *La matrice de covariance Γ du vecteur de $\mathcal{R}^8$ formé des parties réelles et imaginaires des polynômes $z \to P(z)$ et $z \to zP'(z)$ pris en $z = z_1$ ou $z = z_2$ s'écrit en fonction des $A_{ij}, i = 0, 1, 2$ et $j = 1$ ou 2, ainsi que des parties réelles et imaginaires des fonctions $B_i(z_1, z_2)$. On écrit à nouveau Γ sous la forme $\Gamma = MM^t$, où M est une matrice triangulaire inférieure et on utilise la même égalité en loi que pour la preuve du lemme 1. On remarque alors que l'espérance que l'on cherche à calculer s'exprime en fonction des termes figurant dans les quatre premières colonnes de la matrice M et de la loi de la variable aléatoire U_2/U_l où U_1 et U_2 désignent deux variables aléatoires gaussiennes complexes indépendantes, centrées et réduites. Quelques lignes de calculs permettent de conclure.*

Le lemme 2 implique le résultat suivant :

Théorème 2. *On a*

$$\boldsymbol{E}(N(D))^2 = \frac{-1}{4\pi^2}\int_{\partial D\times\partial D} \frac{A_{11}A_{12}+|B_1|^2-\frac{A_{11}}{A_{01}}B_0\overline{B_1}-\frac{A_{12}}{A_{02}}B_1\overline{B_0}}{A_{01}A_{02}-|B_0|^2}(z_1,z_2)\frac{dz_1dz_2}{z_1z_2}$$

Lorsque D est le disque D_r centré en 0 et de rayon r, on obtient

$$\boldsymbol{var}(N(D_r)) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|B_0A_{11}-B_1A_{01}|^2}{A_{01}^2(A_{01}^2-|B_0|^2)}(r,re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}$$

Remarque. Il ne peut exister de densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$ pour la variance, c'est-à-dire de fonction positive f telle que $\mathbf{var}(N(D)) = \int_D f(x,y)dxdy$. Supposons en effet que d est fini et que les a_n ont la même variance. Il est facile de voir que $N(D_r)$ et $N(C\ D_{1/r})$ suivent la même loi et ont donc la même variance. Or puisque d est fini, $N(C\ D_{1/r})$ est presque sûrement égal à $d - N(D_{1/r})$, ce qui implique que $N(D_{1/r})$ et $N(D_r)$ ont la même variance. L'un de ces deux disques étant inclus dans l'autre, et ce résultat étant vérifié pour tout r, la densité f ne peut exister.

3. Comportement asymptotique de $N_d(D)$

Nous étudions dans cette partie le comportement asymptotique du nombre de zéros dans un disque d'un polynôme à coefficients aléatoires gaussiens complexes, indépendants et identiquement distribués lorsque le degré du polynôme tend vers l'infini. Rappelons que si les coefficients sont indépendants, identiquement distribués et intégrables, le rayon de convergence de la série infinie est 1 presque sûrement.

Les résultats classiques (voir [2]) sur les zéros des sommes partielles d'une série entière permettent d'affirmer que, presque sûrement, le nombre de zéros de P_d dans un disque de rayon $r < 1$ tend lorsque le degré d tend vers $+\infty$, vers le nombre de zéros de la série infinie, dans ce même disque. Les techniques développées ci-dessus nous permettent de conclure que cette convergence est encore vraie au sens de la norme L^2.

Théorème 3. *On a, pour tout $r < 1$,*

$$\lim_{d\to\infty} \boldsymbol{E}(N_d(D_r) - N_\infty(D_r))^2 = 0.$$

Il suffit pour voir cela d'évaluer $\mathbf{E}(N_d(D_r)N_\infty(D_r))$, les autres quantités se calculant à l'aide des résultats du paragraphe précédent, et de vérifier que la convergence a bien lieu.

Bibliographie

[1] *A. Edelman, E. Kostlan*, How many zeros of a random polynomial are real? Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **32** (1995), 1-37.

[2] *A. Edrei, E. Saff, R. Varga*, Zeros of sections of power series, Lecture Notes in Mathematics **1002**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983.

[3] *I. Ibragimov, I. Maslova,* On the expected number of real zeros of random polynomials. I. Coefficients with zero means. Theor. Probab. Appl. **16** (1971), 228-248.

[4] *I. Ibragimov, O. Zeitouni*, On roots of random polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 2427-2441.

[5] *M. Kac*, On the average number of a random algebraic equation, Bull. Amer. Soc. **49** (1943), 314-320.

[6] *L. Shepp, R. Vanderbei*, The complex zeros of random polynomials. Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 4365-4384.

Laboratoire de Probabilités
Université Claude Bernard Lyon 1
43, Boulevard du 11 Novembre 1918
69622 Villeurbanne CEDEX FRANCE
duheille@jonas.univ-lyonl .fr