Maria Doudékova-Puydebois

Équipe DSA, rattachée à l'Institut de Mathématiques de Luminy
CMI, Universite de Provence
39,rue F.Joliot Curie, 13534 Marseille cedex 13

Domaine de Recherche

Le domaine de recherche dans lequel je m'investis est à l'intersection de la Théorie Ergodique, de la Théorie des Nombres et des Systèmes Dynamiques. Plus précisément, je me suis intéressée aux systèmes de numérations généralisés et à leur représentation comme des systèmes symboliques. L'action d'additionner 1 dans l'ensemble des entiers est décrite comme une action sur un espace symbolique, mais aussi comme une transformation ergodique sur l'intervalle unité. Ces transformations peuvent être vues comme l'action du shift (décalage) sur un espace symbolique associé à une substitution.

L'article de départ a été "*Odometers and systems of numérations*" de Grabner, Liardet et Tichy [Gra-Li-Ti]. Une première étape a été l'étude de la dynamique provenant de l'addition de 1 sur les entiers en tant que dynamique sur l'intervalle $[0, 1[$. L'application d'additionner 1, appelée odomètre, est définie relativement à une base de numération et aux développements des entiers dans cette base. La famille étudiée $\Lambda^{(q)}$ est très proche de la base q-adique classique, ($q \geq 2$ entier), mais la dynamique associée s'en éloigne nettement. Cette base de numération est intéressante, car l'odomètre correspondant n'est plus défini sur un groupe, comme c'est le cas pour les bases q-adique, de Cantor ou d'Ostrowski (voir [Gra-Li-Ti]).

La transformation sur $[0, 1[$ correspondant à l'odomètre associé à $\Lambda^{(q)}$ est construite par la méthode géométrique cutting-stacking (couper-empiler) introduite par Friedman [Frie]. Nous montrons que cette transformation de $[0, 1[$ est une transformation d'échange d'intervalles et qu'elle est métriquement isomorphe à l'odomètre étudié.

Sur certaines transformations issues de systèmes de numérations

Maria Doudékova-Puydebois

Les odomètres associés à des systèmes de numération ont de nombreuses propriétés topologiques et métriques. Dans [Gra-Li-Ti]une présentation générale du sujet est donnée et les odomètres généralisés sont introduits. L'exemple classique est le q-odomètre, relié à la base de numération 1, q, q^2, ... des puissances d'un entier $q \geq 2$. L'odomètre étudié ici est proche du q-odomètre par sa définition arithmétique, mais ses propriétés dynamiques sont très différentes. Ces odomètres sont décrits comme des transformations sur l'intervalle unité. D'autre part, on peut aussi en donner une représentation symbolique.

Un système (ou base) de numération G est une suite strictement croissante d'entiers $(G_n)_n$ avec $G_0 = 1$. Chaque entier N a une représentation unique donnée par la propriété

$$\forall \ell \geq 0, \quad e_\ell \geq 0 \quad \& \quad e_0 G_0 + e_1 G_1 + \ldots + e_\ell G_\ell \ < \ G_{\ell+1}$$

avec $N = \sum_{0 \leq j \leq k} e_j G_j$. La représentation de tout entier dans la base G est une suite de l'espace produit $X_G = \prod_{\ell=0}^{\infty} = \{0, ..., n_\ell\}$, où n_ℓ est le plus grand entier vérifiant $0 < n_\ell \leq G_{\ell+1}/G_\ell$. L'espace X_G, muni de la topologie produit des topologies discrètes, est un espace métrisable compact.

Les suites vérifiant (1) sont appelées suites G-admissibles et sont des éléments de X_G. On notera $\mathcal{K}_G$ l'ensemble compact des suites admissibles, appelé aussi le G-compactifié de $\mathbb{N}$, et il sera muni de la topologie induite de la topologie produit sur X_G.

Définition. *L'addition de 1 sur les entiers naturels, prolongée aux suites G-admissibles, définit une application $\tau : \mathcal{K}_G \to \mathcal{K}_G$, appelée G-odomètre. Le système $(\mathcal{K}_G, \tau)$ est également appelé G-odomètre.*

La famille des systèmes de numération considérés $\{\Lambda^{(q)}, q \geq 2\}$, est donnée par la relation de récurrence

$$\Lambda^{(q)}_{n+1} = q\Lambda^{(q)}_n.$$

Nous noterons aussi $\Lambda = \Lambda^{(q)}$ et nous avons un premier résultat :

Théorème. *Les suites Λ-admissibles sont un sous-ensemble de $\{0, 1, ..., q\}^\infty$, donné par*

$$\mathcal{K}_\Lambda = \{0, 1, ..., q-1\}^\infty \cup \bigcup_{n \geq 0} 0^{(n)} q \{0, 1, ..., q-1\}^\infty$$

La connaissance des suites Λ-admissibles permet de décrire explicitement l'odomètre τ associé. Une question importante est la continuité de τ sur $\mathcal{K}_G$, la continuité en un point $x \in \mathcal{K}_G$ pouvant être exprimée par le fait que, si un autre point $y \in \mathcal{K}_G$ est suffisament proche de x , c'est-à-dire si x et y ont un début identique suffisament long, leurs images par τ sont arbitrairement proches.

Proposition. *L'application* $\tau : \mathcal{K}_\Lambda \to \mathcal{K}_\Lambda$ *est injective, non surjective, n'est pas continue.*

La méthode géométrique du cutting-stacking [Frie] permet de représenter l'odomètre associé à $\Lambda^{(q)}$ comme une transformation T d'échange infini d'intervalles sur $[0,1[$. À l'aide de cette construction, nous prouvons aussi l'ergodicité, le mélange faible et l'absence de mélange fort de T. Nous montrons également que le spectre du système correspondant au cas étudié est continu, alors que celui du cas q-adique est discret.

Nous étudions aussi le système dynamique symbolique correspondant à l'odomètre T. Ce système est engendré par des substitutions non primitives, ayant un point fixe non minimal. Nous faisons un parallèle avec la tranformation de Chacon [Cha], qui est proche de $\Lambda^{(3)}$) et a les mêmes propriétés métriques. Néanmoins, les constructions par cutting-stacking pour les systèmes de Chacon et celui associé à $\Lambda^{(3)}$ sont différentes, la substitution de Chacon ayant un point fixe minimal.

Une autre motivation de cette étude est la recherche de suites de $[0,1[$ de faible discrépance. La discrépance $D_N(x)$ d'ordre N permet de mesurer la répartition d'une suite $x = x_0, x_1, \ldots$ dans $[0,1[$ et peut être définie par

$$D_N(x) = \sup_{0\le a<b\le 1} \left| \frac{1}{N} \text{card}\{n, 0 \le n < N \quad \& \quad a \le x_n, < b\} - (b-a) \right|.$$

Nous nous sommes intéressés au fait que la construction géométrique par cutting-stacking associée à des transformations ergodiques permet d'obtenir des suites dans $[0,1[$ de faible discrépance. Par exemple, en construisant la transformation de Kakutani par cutting-stacking (voir [Frie]), on génère la suite numérique de Van der Corput, de discrépance faible en $c_0 \frac{logN}{N}$, où c_0 est une constante (cf. [Kui-Nie]). Pour la transformation de Chacon, on obtient une suite de discrépance en $c_1 \frac{logN}{N}$, c_1 étant une constante. La famille $\Lambda^{(q)}$ permet de construire aussi des suites de faible discrépance en $c_q \frac{logN}{N}$, avec des constantes c_q arbitrairement grandes.

Bibliographie

[Cha] R. Chacon, *Weakly mixing transformations which are not strongly mixing*, Proc. Amer. Math. Soc. **22**, 1969, 559-562.

[Fr] N. Friedman, *Replication and stacking in Ergodic Theory*, Amer. Math. Monthly **99**, 1992, 31-41.

[Gra-Li-Ti] P. Grabner, P. Liardet, R. Tichy, *Odometers and systems of numeration*, Acta Arithmetica **LXX. 2**, 1995, 103-123.

[Kui-Nie] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley and Sons, New York London Sydney, Toronto, 1974.